Tema 4: Capacidad de Canal
Semana 1

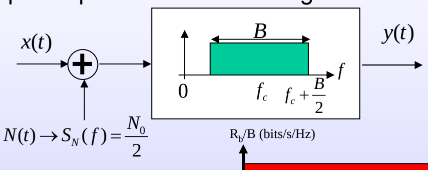
Sistemas y Canales de Transmisión

Universidad Carlos III de Madrid

Maximización de la velocidad de transmisión

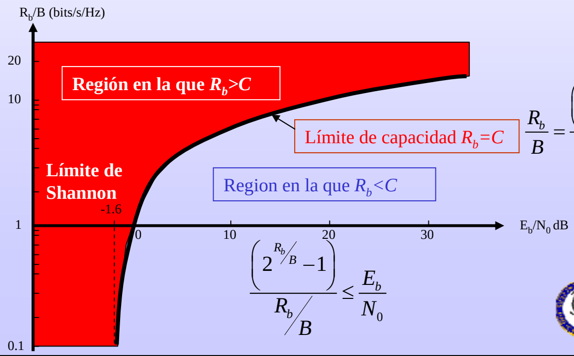
Teorema de capacidad de canal de Shannon

- Máxima cantidad de información que puede transmitirse por un canal sin errores
  - Ejemplo: capacidad de un canal gaussiano limitado en banda (bits/seg)



$$C = B\log_2\left(1+\frac{P_R}{P_N}\right) = B\log_2\left(1+\frac{E_b R_b}{N_0 B}\right)$$

$$\frac{R_b}{B} = \frac{\left(2^{C/B}-1\right)}{\frac{E_b}{N_0}}$$



$$\frac{R_b}{B} = \frac{\left(2^{R_b/B}-1\right)}{E_b/N_0}$$

Maximización de la velocidad de transmisión

- En algunos canales la SNR depende de la frecuencia
  - Ejemplo: canales ADSL

$$s_T(t) \rightarrow \boxed{|H_c(f)|^2 = e^{-k(d)\sqrt{f}}} \rightarrow \oplus \rightarrow s_R(t) \qquad S_R(f) = S_T^{Usuario}(f)e^{-k(d)\sqrt{f}}$$

Ruido: NEXT

  - donde $k(d) = k_1 \dfrac{d}{d_{\text{Ref}}}$
    - Típicamente
      - k_1=1.158
      - d_{Ref}=6 Km.
  - Ruido
    - Modelo $S_N(f) = S_T^{Interf}(f)|H_{XT}(f)|^2 = S_T^{Interf}(f)\beta f^{3/2}$
      - Típicamente β=10^{-9}

Ejemplo: canal ADSL

- En canales ADSL

$$s_T(t) \rightarrow \boxed{|H_c(f)|^2 = e^{-k(d)\sqrt{f}}} \rightarrow \oplus \rightarrow s_R(t) \qquad S_R(f) = S_T^{Usuario}(f)e^{-k(d)\sqrt{f}}$$

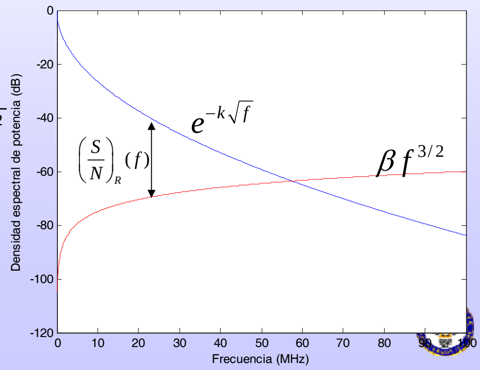
Ruido: NEXT $S_N(f) = S_T^{Interf}(f)\beta f^{3/2}$

  - Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_T^{Usuario}(f)|H_C(f)|^2}{S_T^{Interf}(f)|H_{XT}(f)|^2} \approx \frac{|H_C(f)|^2}{|H_{XT}(f)|^2} = \frac{e^{-k\sqrt{f}}}{\beta f^{3/2}}$$

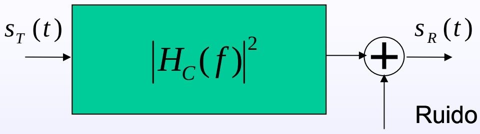
    - Es una función de la frecuencia

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = SNR(f) = \frac{e^{-k(d)\sqrt{f}}}{\beta f^{3/2}}$$



Capacidad en canales con SNR variable

- Modelo de canal

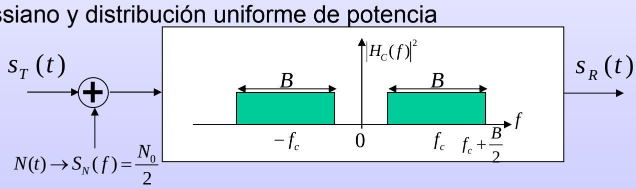


$$S_R(f) = S_T(f)|H_c(f)|^2$$

- Capacidad

$$C = \int_{f\in\{B\}} \log_2\left(1+SNR(f)\right)df = \int_{f\in\{B\}} \log_2\left(1+\frac{S_T(f)|H_C(f)|^2}{S_N(f)}\right)df$$

- Ejemplo: canal gaussiano y distribución uniforme de potencia

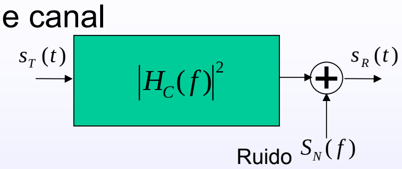


$$P_R = \int_{f\in\{B\}} S_T(f)|H_C(f)|^2\,df$$

$$C = \int_{f\in\{B\}} \log_2\left(1+\frac{P_R/2B}{N_0/2}\right)df = B\log_2\left(1+\frac{P_R}{N_0 B}\right)$$

Capacidad en canales con SNR variable

- Modelo de canal



$$C = \int_{f\in\{B\}} \log_2\left(1+SNR(f)\right)df$$
$$= \int_{f\in\{B\}} \log_2\left(1+\frac{S_T(f)|H_C(f)|^2}{S_N(f)}\right)df$$

- Capacidad
  - Si queremos maximizar la velocidad de transmisión, el único "parámetro" que se puede ajustar es la distribución de potencia transmitida: $S_T(f)$
  - Objetivo: encontrar $S_T(f)$ (distribución de potencia transmitida) que maximiza

$$C = \max_{S_T(f)} \int_{f\in\{B\}} \log_2\left(1+\frac{S_T(f)|H_C(f)|^2}{S_N(f)}\right)df$$

- Restricción: la potencia total está limitada a P_X vatios

$$P_X = \int_{f\in\{B\}} S_T(f)\,df$$

Distribución de potencia transmitida

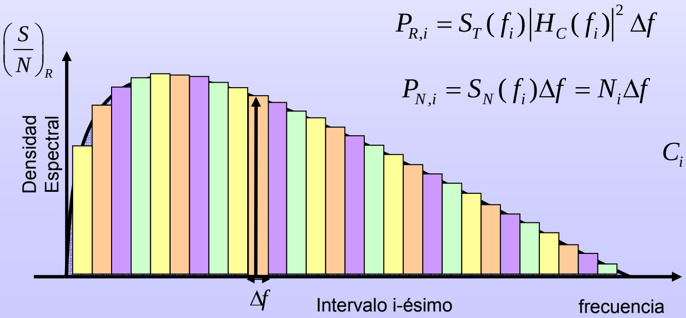
- En canal con ruido blanco gaussiano, la potencia se distribuye uniformemente en todo el ancho de transmisión.
  - Relación señal a ruido constante
- Pero cuando la relación señal a ruido no es constante...
  - Se divide el espectro en intervalos en los que pueda considerarse blanca
  - Modulaciones multiportadora

$$P_{R,i} = S_T(f_i)\left|H_C(f_i)\right|^2 \Delta f$$

$$P_{N,i} = S_N(f_i)\Delta f = N_i \Delta f$$

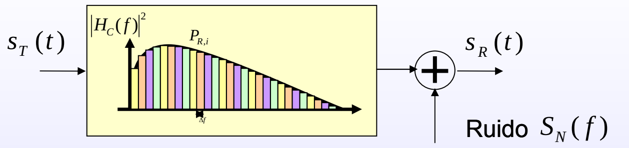
$$C_i = \Delta f \log_2\left(1 + \frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)$$

$$C = \sum_i C_i$$



Distribución de la potencia transmitida

- Distribución de la potencia transmitida



$$C_i = \Delta f \log_2\left(1 + \frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)$$

  - Objetivo: Maximizar la capacidad

$$\max_{P_{R,i}} \sum_i \Delta f \log_2\left(1 + \frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right) \qquad P_{R,i} = S_T(f_i)\left|H_C(f_i)\right|^2 \Delta f = P_{T,i}\left|H_C(f_i)\right|^2$$

$$P_{N,i} = S_N(f_i)\Delta f = N_i \Delta f$$

    - Encontrar la distribución de potencia recibida $P_{R,i}$ que maximiza la capacidad es equivalente a calcular la $P_{T,i}$ óptima: sólo difieren en una constante ($H_C(f_i)$)
  - Restricciones
    - La potencia total está limitada

$$\sum_i P_{T,i} = P_T \Leftrightarrow \sum_i P_{R,i} = P_R$$

    - Puede haber bandas en las que no se transmita potencia ($P_{R,i}$=0)

$$P_{R,i} \geq 0$$

Water-filling discreto

- Distribución de potencia en canales "paralelos"
  - Objetivo: Maximizar la capacidad

$$\max_{P_{R,i}} \sum_i \Delta f \log_2\left(1+\frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)$$

  - Restricciones $\sum_i P_{R,i} = P_R \qquad P_{R,i} \geq 0$
  - Lagrangiano $\max_{P_{R,i}} L(P_{R,i},\lambda) = \max_{P_{R,i}} \left\{ \sum_i \Delta f \log_2\left(1+\frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right) + \lambda\left(P_R - \sum_i P_{R,i}\right)\right\}$
    - Si $P_{R,i} \uparrow\uparrow \rightarrow \log_2\left(1+\frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)\uparrow\uparrow$ pero $\lambda\left(P_R - \sum_i P_{R,i}\right)\downarrow\downarrow$
    - El lagrangiano permite encontrar una solución que maximice la capacidad y que cumpla las restricciones.

Waterfilling discreto

- Distribución de potencia en canales "paralelos"
  - Objetivo: Maximizar la capacidad

$$\max_{P_{R,i}} \sum_i \Delta f \log_2\left(1+\frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)$$

  - Restricciones $\sum_i P_{R,i} = P_R \qquad P_{R,i} \geq 0$
  - Lagrangiano $\max_{P_{R,i}} L(P_{R,i},\lambda) = \max_{P_{R,i}} \left\{ \sum_i \Delta f \log_2\left(1+\frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right) + \lambda\left(P_R - \sum_i P_{R,i}\right)\right\}$
    - Realizando la derivada parcial respecto de $P_{R,i}$

$$\frac{\partial L(P_{R,i},\lambda)}{\partial P_{R,i}} = \frac{\Delta f}{\ln 2}\frac{\frac{1}{N_i \Delta f}}{\left(1+\frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)} - \lambda = \frac{\Delta f}{(\ln 2)\left(P_{R,i} + N_i \Delta f\right)} - \lambda$$

    - e igualando a 0

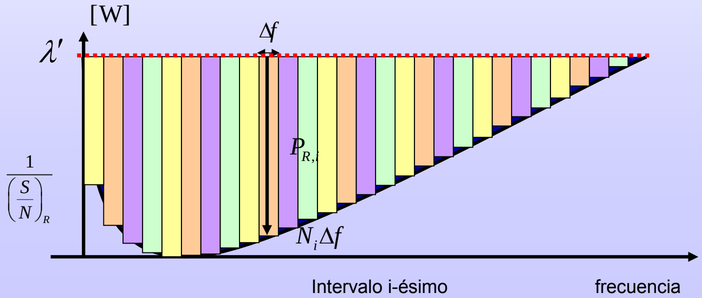
$$\boxed{\left(P_{R,i} + N_i \Delta f\right) = \frac{\Delta f}{\lambda \ln 2} = \text{cte.} = \lambda' \text{ [W]}}$$

Waterfilling discreto

- Distribución de potencia

$$\left(P_{R,i} + N_i \Delta f\right) = \frac{\Delta f}{\lambda \ln 2} = \text{cte.} = \lambda' \ \text{[W]}$$

  - Water Filling
    - Método subóptimo.

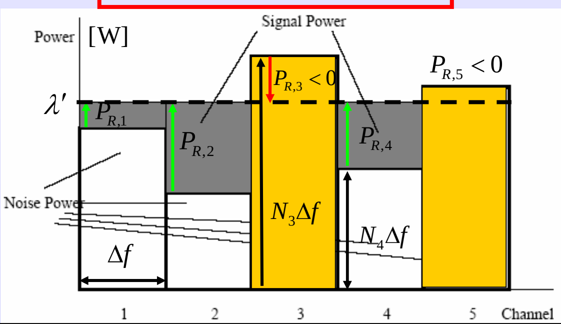


Waterfilling discreto

- Ejemplo de distribución de potencia en canales “paralelos”
  - Para maximizar la capacidad

$$\max_{P_{R,i}} \sum_i \Delta f \log_2\left(1 + \frac{P_{R,i}}{N_i \Delta f}\right)$$

  - ... y cumplir las restricciones $\sum_i P_{R,i} = P_R \qquad P_{R,i} \geq 0$
  - Solución $\left(P_{R,i} + N_i \Delta f\right) = \frac{\Delta f}{\lambda \ln 2} = \text{cte.} = \lambda'$



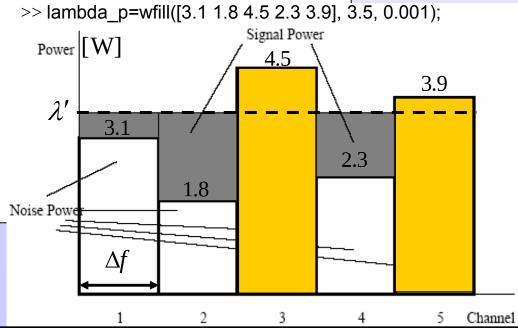
$$P_{R,1} + P_{R,2} + P_{R,4} = P_R$$

Water-filling discreto

- Algoritmo Matlab

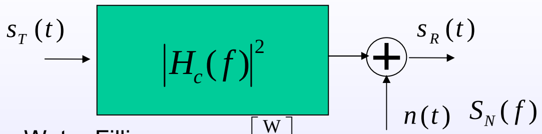
```
function wline=wfill(vec, pcon, tol)
%   WFILL: The Water Filling algorithm.
%   WLINE = WFILL(VEC, PCON, TOL) performs the water filling algorithm
%   VEC is a noise absolute or relative level in LINEAR units at different frequencies,
%   space or whatever bins.
%   PCON is a total power constrain given in the same units as the VEC.
%   TOL is an acceptable tolerance in the units of VEC.
%   WLINE indicates the WATERLINE level in units of VEC so that:
%                        abs(PCON-SUM(MAX(WLINE-VEC, 0)))<=TOL
N=length(vec);

%first step of water filling
wline=min(vec)+pcon/N; %initial waterline
ptot=sum(max(wline-vec,0)); %total power for current

%gradual water filling
while abs(pcon-ptot)>tol
    wline=wline+(pcon-ptot)/N;
    ptot=sum(max(wline-vec,0));
end
```

```
>> lambda_p=wfill([3.1 1.8 4.5 2.3 3.9], 3.5, 0.001);
```

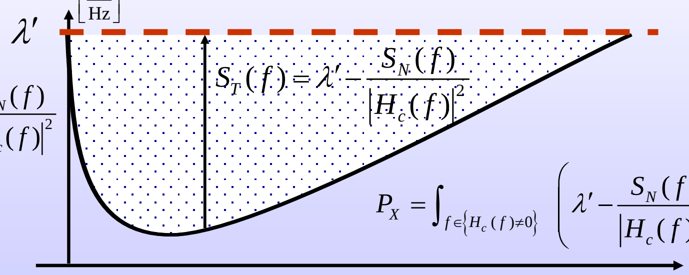


Water Filling continuo

- En canales



- Water Filling



$$S_T(f) = \lambda' - \frac{S_N(f)}{|H_c(f)|^2}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{S}{N}\right)_R} \sim \frac{S_N(f)}{|H_c(f)|^2}$$

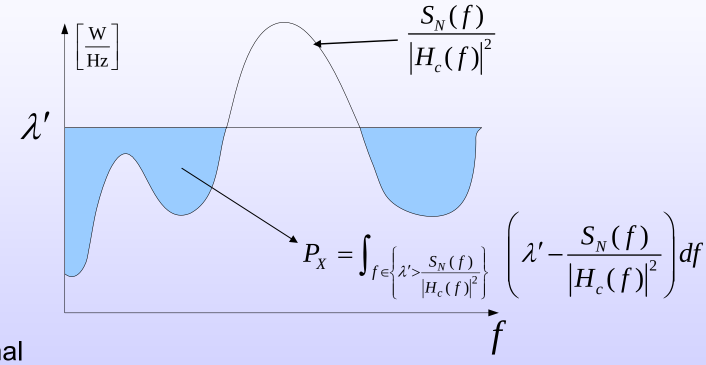
$$P_X = \int_{f \in \{H_c(f) \neq 0\}} \left(\lambda' - \frac{S_N(f)}{|H_c(f)|^2}\right) df$$

- Capacidad de canal

$$C = \int_{f \in \{B\}} \log_2\left(1 + \frac{S_T(f)|H_C(f)|^2}{S_N(f)}\right) df \underset{S_T(f)=\lambda' - \frac{S_N(f)}{|H_c(f)|^2}}{=} \int_{f \in \{H_c(f) \neq 0\}} \log_2\left(\lambda' \frac{|H_c(f)|^2}{S_N(f)}\right) df$$

Water Filling continuo

- Ejemplo
  - Water Filling

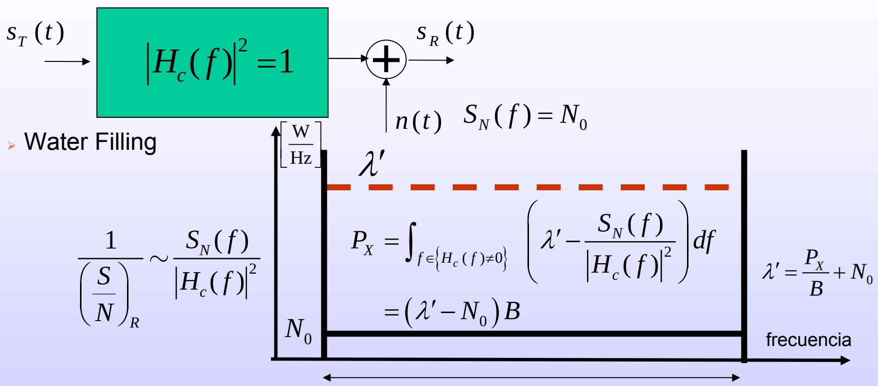


- Capacidad de canal

$$C = \int_{f \in \left\{ \lambda' > \frac{S_N(f)}{|H_c(f)|^2} \right\}} \log_2 \left(\lambda' \frac{|H_c(f)|^2}{S_N(f)} \right) df$$

Water Filling continuo

- Ejemplo: canal gaussiano de ancho de banda B
  - Water Filling



- Capacidad de canal

$$C = \int_{f \in \{H_c(f) \neq 0\}} \log_2 \left(\lambda' \frac{|H_c(f)|^2}{S_N(f)} \right) df = B \log_2 \left(\frac{\frac{P_X}{B} + N_0}{N_0} \right)$$