Ejercicios TDS/TDI - Curso 2008-2009

Tema 2: "Decisión Analítica"

2.Q1 Un problema de decisión ternario unidimensional con hipótesis equiprobables está definido por las siguientes verosimilitudes:

$$\begin{array}{lll} p(x|H_0) = 2(1-2|x-\frac{1}{2}|) & , & 0<x<1 \\ p(x|H_1) = 1 & , & 0<x<1 \\ p(x|H_2) = 2x & , & 0<x<1 \end{array}$$

a) Determínese el decisor de mínima probabilidad de error.

b) Discútase si el decisor anterior es equivalente al constituido por un primer decisor de mínima probabilidad de error que elige entre H_0 y $H_1 \cup H_2$, y tras ello, caso de aceptar la hipótesis $H_1 \cup H_2$, se aplica un segundo decisor, también de mínima probabilidad de error, para decidir entre H_1 y H_2.

2.E1 Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p(x|H_1) = a\exp(-ax)u(x) \quad (a>0)$$

$$p(x|H_0) = \begin{cases} a/2, & 0<x<2/a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Diséñese el decisor ML

b) Calcúlese P_{FA} y P_M

c) Si el decisor que se ha diseñado en a) se aplica a una situación en la que la verosimilitud de las observaciones supuesta H_0 es en realidad

$$p'(x|H_0) = \begin{cases} a/4, & 0<x<4/a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

discútase los efectos que se producen, calculando también las (nuevas) P'_{FA} y P'_M.

2.E2 Considérense las hipótesis binarias

$$\begin{array}{l} H_0 : x = n \\ H_1 : x = s+n \end{array}$$

siendo $s>0$ una constante conocida, y estando el ruido n caracterizado por

$$p(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{s}\left(1-\dfrac{|n|}{s}\right), & |n|<s \\ \\ 0, & |n|>s \end{cases}$$

Las probabilidades de las hipótesis son $\Pr(H_0) = 1/3$, $\Pr(H_1) = 2/3$.

a) Establézcase el decisor MAP

b) Calcúlense las correspondientes P_{FA} y P_M, así como la probabilidad de error

c) Calcúlese cuánto variarían las anteriores probabilidades si se aplicase a esta situación el mismo tipo de decisor pero diseñado suponiendo que n fuese gaussiano con igual varianza que el ruido verdaderamente presente (y media también nula).

2.E3 Considérese un problema bidimensional de decisión binaria con verosimilitudes

$$p(x_1, x_2|H_1) = \begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2), & x_1^2 + x_2^2 \leq 1/4 \quad \text{y} \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x_1, x_2|H_0) = \begin{cases} b, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Diséñese el decisor MAP correspondiente. Discútanse las formas de las regiones de decisión en función de los márgenes de valores del parámetro $c = \Pr(H_0)/\Pr(H_1)$.

b) Calcúlense P_{FA}, P_M y P_e cuando $\Pr(H_0) = 2/3$.

2.E4 Considérese el problema de detección

$$H_1: \quad \mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{r}$$

$$H_0: \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

donde $\mathbf{m}$ es un vector N-dimensional conocido y $\mathbf{r}$ un vector de N muestras independientes, la n-ésima distribuida como gaussiana de media 0 y varianza v_n

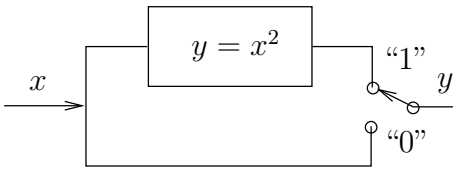
a) Diséñese el detector ML

b) Determínense P_{FA} y P_D en función de los datos del problema ($\mathbf{m}$ y $\mathbf{v}$), expresándolas mediante la función

$$\text{erfc}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-t^2/2)\, dt$$

c) Discútase cómo afectan los niveles de las componentes de señal y ruido (m_n^2 y v_n) al comportamiento de las probabilidades que se han calculado en el apartado b).

2.E8 El conmutador de la figura se encuentra en su posición superior ("1") con probabilidad conocida P. La variable aleatoria x tiene una densidad de probabilidad uniforme $U(0, 1)$.



La posición del conmutador no se puede observar, aunque sí el valor y presente a su salida. A partir de la observación de este valor, se pretende aplicar un decisor bayesiano para decidir cuál es la posición del conmutador: siendo la política de costes $C_{00} = C_{11} = 0$, $C_{10} = 2C_{01}$.

a) Formúlese el problema en la forma habitual.

b) Determínese el correspondiente test, teniendo en cuenta los posibles valores de P.

c) Calcúlense P_{FA} y P_M.

(Sugerencia: para determinar $p(y)$, relaciónense las funciones de distribución de y y de x).

2.E9 Se ha de decidir por máxima verosimilitud si una cierta variable aleatoria x de media nula y varianza v sigue una densidad de probabilidad gaussiana o laplaciana (exponencial bilateral) a partir de K medidas $\{x^{(k)}\}$ de dicha variable tomadas independientemente,

a) Dada la forma habitual de la densidad de probabilidad laplaciana

$$p(x) = \frac{a}{2} \exp\left(-a|x|\right) \qquad (a > 0)$$

presentar esta densidad de probabilidad en función de su varianza v.

b) Establézcase el decisor necesario, tomando la gaussianidad como H_1.

c) Resuélvase el problema determinando umbrales para $K = 1$.

d) A la vista del resultado de c), discútase el efecto de las muestras en el caso general según su tamaño respecto a la desviación típica.

2.E10 Se lanza al aire un dado tradicional (caras con puntos de 1 a 6) y se genera la v.a. x tal que

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right), & 0 < x < a \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de modo tal que su media viene dada por el resultado del lanzamiento (es igual a los puntos que muestra la cara de arriba).

Supóngase que, para una tirada, se tiene acceso a 3 medidas del valor de x tomadas independientemente, de valores $x^{(1)} = 2, x^{(2)} = 5, x^{(3)} = 10$. Decídase a partir de ellas el resultado del lanzamiento del dado según el criterio de máxima verosimilitud.

2.E13 Un juego consiste en una sucesión indefinida de jugadas en las que el primer jugador lanza una moneda equilibrada y, tras ver el resultado (cara: H_1; cruz: H_0), establece el importe de la apuesta, x ($x > 0$). El segundo jugador puede aceptar o no la apuesta; si la acepta, lanza la moneda: la cara gana a la cruz, y el empate no tiene consecuencias. En una partida, el segundo jugador sabe que las apuestas del primero siguen las leyes probabilísticas:

$$p(x|H_i) = \begin{cases} 1, & |x - m_i| < 1/2 \\ \\ 0, & |x - m_i| > 1/2 \end{cases} \qquad 1/2 < m_0 \leq m_1 < m_0 + 1$$

y conoce también los valores de m_0 y m_1.

a) Calcúlese el beneficio medio (importe de la apuesta por la probabilidad de ganarla menos la probabilidad de perderla) a la vista de x para el segundo jugador.

b) Considerando el resultado del apartado anterior, establézcase la regla de decisión para aceptar o rechazar la apuesta que ha de aplicar el segundo jugador para maximizar su beneficio.

c) Calcúlese el beneficio medio del segundo jugador cuando sigue la regla determinada en el apartado anterior.

d) Indíquese como debe elegir m_1 y m_0 el primer jugador para minimizar sus pérdidas. Coméntese el resultado.

2.E14 Un problema de decisión binaria bidimensional viene caracterizado por la equiprobabilidad de las hipótesis y por las verosimilitudes

$$p(x_1, x_2|H_0) = K_0 x_1(1 - x_2) \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < 1$$

$$p(x_1, x_2|H_1) = K_1 x_1 x_2 \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < 1$$

$(K_0, K_1 > 0)$

a) Calcúlense los valores de las constantes K_0 y K_1.

b) Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error, e indíquese el carácter de los estadísticos x_1 y x_2.

c) Determínense las ddp marginales $p_{X_i|H_j}(x_i) = p(x_i|H_j)$, $i = 1, 2$ y $j = 0, 1$. ¿Qué relación estadística hay entre x_1 y x_2 bajo cada hipótesis?

d) Calcúlense P_{FA}, P_M y P_e.

e) En la práctica, la medida de x_2 viene acompañada de un ruido aditivo n independiente de x_1 y x_2; es decir, se observa $y = x_2 + n$. Diséñese el decisor óptimo para esta situación cuando la ddp de este ruido tiene la forma:

$$p(n) = 1, \quad 0 < n < 1$$

f) Calcúlense P'_{FA}, P'_M y P'_e para la situación y el diseño del apartado anterior.

2.A1 Los decisores "con duda" admiten, además de la aceptación de una de las hipótesis posibles, la declaración de que no se toma decisión (se "duda"), de acuerdo con una apropiada definición de costes.

Así, supóngase en el caso binario:

- coste nulo, si no hay error
- coste unitario, si hay error
- coste d, $0 < d < 0.5$, si se declara D ("duda").

a) Diséñese el correspondiente decisor bayesiano en función de las probabilidades "a posteriori" (para lo que debe considerarse que hay tres posibles decisiones (D_0, D_1 y D), y que debe elegirse, a la vista de $\mathbf{x}$, la que implique menor coste).

Exprésese el mecanismo de decisión por máximos.

¿Qué implicaría $d > 0.5$?

b) Supóngase un caso unidimensional con $\Pr(H_i) = 1/2$, $(i = 0, 1)$ y $p(x|H_i)$ gaussiana de media m_i $(m_1 > m_0)$ y varianza v. Imponiendo las condiciones del decisor bayesiano con "duda" diseñado en a) a las probabilidades "a posteriori", exprésese tal decisor en función de x (mediante la aplicación de umbrales).

Tema 3: "Estimación"

3.Q1 Considérese la variable aleatoria x con ddp

$$p(x) = a \exp\,[-a(x-d)]u(x-d)$$

con parámetros $a > 0$ y d.
Establézcanse las expresiones de los estimadores de máxima verosimilitud de ambos parámetros, $\hat{a}_{ML}$ y $\hat{d}_{ML}$, en función de los valores de K muestras de x tomadas independientemente, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

3.E1 Considérese la observación

$$x = s + n$$

con la señal s inmersa en un ruido n independiente de ella, y siendo sus densidades de probabilidad

$$p_S(s) = \begin{cases} 1, & 0 < s < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(s - 1/2)$$

$$p_N(n) = \begin{cases} 1, & -1/2 < n < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(n)$$

Establézcase el estimador de error cuadrático medio mínimo de s, $\hat{s}_{ms}$. Discútase el resultado.

3.E2 Se dispone de K muestras, tomadas independientemente, de una variable x laplaciana $L(m, v)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2v}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{v}}|x-m|\right)$$

Obtener el estimador ML conjunto de m, v.

3.E7 La v.a. señal s se ve perturbada por un ruido aditivo r independiente de s, dando lugar a la v.a. observable

$$x = s + r$$

El comportamiento de la señal y ruido viene descrito por las d.d.p.

$$p(s) = a \exp(-as)u(s)$$

$$p(r) = b \exp(-br)u(r)$$

$$a, b > 0 \quad a \neq b$$

a) Determínese $\hat{s}_{ms}$.

b) Considérese $b >> a, 1$ y $bx >> 1$, y establézcase el valor a que tiende asintóticamente $\hat{s}_{ms}$. Discútase si ese valor es pausible a la vista de las características del problema en esta situación.

c) Considérese $a >> b, 1$ y $ax >> 1$, y procédase como en el apartado anterior.

d) Establézcase $\hat{s}_{ml}$.

e) A la vista de los resultados anteriores, indíquese cuando sería razonable emplear $\hat{s}_{ml}$.

3.E8 Se mide el parámetro determinista desconocido s, $s > 0$, mediante dos sistemas, que proporcionan las observaciones

$$x_i = a_i s + n_i, \quad i = 1, 2$$

siendo $\{a_i\}, \{n_i\}$, vv.aa. gaussianas e independientes entre sí, con medias $\mathrm{E}\{a_i\} = 1$,$\mathrm{E}\{n_i\} = 0$, y varianzas $\{v_{ai}\}$,$\{v_{ni}\}$, respectivamente ($i = 1, 2$).

a) Establézcase la expresión que proporciona el estimador ML de s,$\hat{s}_{ML}$.

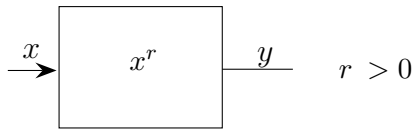
b) Calcúlese $\hat{s}_{ML}$ para el caso particular $v_{ai} = 0, i = 1, 2$.

c) Calcúlese $\hat{s}_{ML}$ para el caso particular $v_{ni} = 0, i = 1, 2$.

3.E9 La v.a. x con ddp

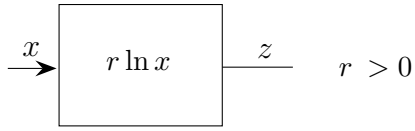
$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se transforma como indica en la figura, dando lugar a la v.a. observable y.



a) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de r, $\hat{r}_{ML}$, a partir de K observaciones de y tomadas de forma independiente.

b) Considérese la situación



y obténgase $\hat{r}_{ML}$ de K observaciones de z tomadas independientemente. Coméntese el resultado.

3.A1 El empleo de la estimación ML, y en particular de la media muestral, es coherente con la visión "frecuentista", o clásica, de la probabilidad.

En efecto: la aparición de un suceso A puede asociarse con la v.a. "indicadora"

$$x_A = \begin{cases} 1, & \text{si se da } A \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y la secuencia $\{x_A^{(k)}\}$ que se observa en K sucesos independientes tiene una probabilidad que depende de la del suceso A, P (desconocida).

a) Estímese P vía ML.

b) ¿A qué característica estadística de x_a corresponde P?, ¿Y a qué estimador de ésta corresponde el obtenido para P?

3.A2 El método de los momentos para estimar variables deterministas $\mathbf{s}$ a partir de observaciones $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ consiste en obtener las estimaciones a partir de igualar la media y los consecutivos momentos (centrales, típicamente) calculados analíticamente a sus estimaciones muestrales. Resulta ventajoso cuando la estimación ML conduce a ecuaciones acopladas de difícil solución

a) Considérese la función densidad de probabilidad $B(p,q)$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B_I(p,q)}, & 0 \leq x \leq 1 \qquad (p,q>0) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $B_I(p,q)$ es la función β integral

$$B_I(p,q) = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy$$

Compruébese que la estimación ML de p y q a partir de la observación de K muestras $\{x^{(k)}\}$ tomadas independientemente, conduce a ecuaciones acopladas de solución no inmediata.

b) Previo cálculo de la media y la varianza de $p(x)$, determínense los estimadores $\hat{p}_{mt}$ y $\hat{q}_{mt}$ utilizando el método de los momentos (sobre $\overline{x}$ y $\overline{v}$).
(Recuérdese: $B_I(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B_I(p,q)$)

3.A3 Sea $\hat{s}$ un estimador de punto estadísticamente creciente de un parámetro determinista s; es decir, si $s_2 > s_1$ son dos valores de s, se verifica que $\Pr\{(\hat{s} > \hat{s_1})|s_2\} > \Pr\{(\hat{s} > \hat{s_1})|s_1\}$, donde $\hat{s_1}$ es cualquier valor de $\hat{s}$.
El estimador de intervalo (del parámetro determinista s) asociado a dicho estimador de punto es el par ordenado de valores $\{s_a, s_b\}$ correspondientes a un valor estimado $\hat{s_0}$ (que se obtendría a partir de una observación $\underline{x}_0$) que minimiza $s_b - s_a$, anchura del intervalo $[s_a, s_b]$,cumpliendo la condición

$$\Pr\{(\hat{s} < \hat{s_0})|s_a \cap (\hat{s} > \hat{s_0})|s_b\} = 1 - \delta$$

siendo $\delta(\delta << 1)$ el nivel de confianza (1-δ,el coeficiente de confianza) del estimador de intervalo; nivel que se preselecciona para realizar los cálculos.

a) Compruébese que la condición citada equivale a

$$\Pr\{(\hat{s} > \hat{s_0})|s_a\} + \Pr\{(\hat{s} < \hat{s_0})|s_b\} = \delta$$

b) Suponiendo que $\Pr\{(\hat{s} > \hat{s_0})|s_a\} = \delta_1(< \delta)$, compruébese que para $s_1 < s_a$ se verifica $\Pr\{(\hat{s} > \hat{s_0})|s_1\} < \delta_1$; de modo que resulta muy improbable que si el parámetro s toma el valor s_1 se obtenga el valor $\hat{s_0}$ para el estimador de punto. Análogamente ocurre para $s_2 > s_b$.

c) En la práctica, y salvo que conduzca a resultados que vulneren claramente la minimización de la anchura del intervalo de confianza, se acepta el resultado de aplicar separadamente

$$\Pr\{(\hat{s} > \hat{s_0})|s_a\} < \delta/2$$
$$\Pr\{(\hat{s} < \hat{s_0})|s_b\} < \delta/2$$

que proporciona, en general, prestaciones (levemente) subóptimas. Mediante la introducción de la v.a. normalizada

$$z = \frac{\hat{s} - E\{\hat{s}|s\}}{\sqrt{V\{\hat{s}|s\}}}$$

donde $E\{\hat{s}|s\}$ y $V\{\hat{s}|s\}$ son la media y la varianza de $\hat{s}$ dado s, respectivamente (que se suponen no relacionadas entre sí), que se admiten conocidas, y la utilización de los percentiles[1] de z. Verifíquese que las ecuaciones implícitas para determinar s_a y s_b son

$$\hat{s_0} = E\{\hat{s}|s_a\} + \sqrt{V\{\hat{s}|s_a\}}z_{1-\delta/2}$$

$$\hat{s_0} = E\{\hat{s}|s_b\} + \sqrt{V\{\hat{s}|s_b\}}z_{\delta/2}$$

d) Determínese el estimador de intervalo $\{m_a, m_b\}$ con nivel de confianza δ(dado) de la media m de una v.a. x de varianza conocida v (no relacionada con m) asociado a la media muestral $\overline{x}$ calculada a partir de K observaciones de x,$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{K}$,tomadas independientemente, siendo K suficientemente alto como para considerar que $\overline{x}$ tiene un comportamiento gaussiano.

3.A4 Se puede definir el estimador de intervalo de una v.a. s dada una observación $\mathbf{x}$ como el par ordenado de valores $\{s_a(\mathbf{x}), s_b(\mathbf{x})\}$ que minimiza $s_b - s_a$ (anchura del intervalo de confianza, $[s_a, s_b]$) cumpliendo:

$$\Pr\{s_a < s < s_b|\mathbf{x}\} = 1 - \delta$$

donde δ ($\delta << 1$) es el nivel de confianza del estimador; $1 - \delta$ se denomina coeficiente de confianza.
Considése la situación descrita por:

$$x = s + n$$

siendo:

$$s : G_{\{m,v_s\}}(s)$$

$$n : G_{\{0,v_n\}}(n)$$

e independientes entre sí.

a) Determínese el estimador de intervalo de nivel de confianza δ de s, expresado en función del percentil 100(1-δ/2) de la v.a. $z : G_{\{0,1\}}(z)$; es decir, el valor $z_{1-\delta/2}$ que verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{1-\delta/2}} exp(-z^2/2)dz = 1 - \delta/2$$

b) ¿Qué ocurre si $v_n >> v_s$?

c) ¿Qué ocurre si $v_s >> v_n$?

[1]El percentil z_ϵ de una v.a. z se define mediante

$$\int_{-\infty}^{z_\epsilon} P(y)dy = \epsilon$$

obviamente z_ϵ=$P^{-1}(\epsilon)$, siendo $P(z)$ la función de distribución de z; es decir, z_ϵ es aquel valor tal que la v.a. z permanece por debajo de él con una probabilidad ϵ.

Tema 4: "Los casos generales gaussianos"

4.E1 A partir de las variables aleatorias unidimensionales s y r, con densidad de probabilidad conjunta

$$G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right),$$

se forma la observación $x = s + r$

a) Determínese $\hat{s}_{ms}$.

b) ¿Era previsible el resultado? (Considérese la relación que existe entre $E\{r|x\}$ y $E\{s|x\}$).

4.E2 Considere el problema de decisión binaria sobre la variable tetradimensional $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

$$H_0 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ es } G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

x_4 es $U[0, \sqrt{v}]$ (uniforme entre 0 y $\sqrt{v}$) e independiente de las anteriores

$$H_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ es } G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix}\right)$$

x_4 es $U[0, 1]$ e independiente de las anteriores.

Suponiendo $v > 1$:

a) Establezca el decisor ML.

b) Calcule P_{FA} y P_M.

4.E3 Considérese el problema bidimensional binario Gaussiano:

$$H_0 \quad : \quad \mathbf{x} \text{ es G}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$H_1 \quad : \quad \mathbf{x} \text{ es G}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}\right), \quad v > 1$$

a) Establézcase el decisor ML en función del estadístico suficiente $z = x_1^2 + x_2^2$.

b) Determínense las verosimilitudes de z a través del cálculo de las correspondientes funciones de distribución,

$$P(z|H_i) = \Pr\left\{x_1^2 + x_2^2 < z|H_i\right\}$$

c) Calcúlense P_{FA} y P_M a partir de las verosimilitudes de z.

4.E4 Las verosimilitudes

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, v\mathbf{I})$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G(\mathbf{x}|\mathbf{m}, v\mathbf{I})$$

donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{m}$ son vectores N-dimensionales de componentes 0 y $\{m_n\}$, respectivamente, e $\mathbf{I}$ la matriz unitaria $N \times N$, corresponden a las observaciones $\mathbf{x}$ (N-dimensionales) en un problema de decisión binaria (gaussiano).

a) Diséñese el decisor ML.

b) ¿Cuánto y en qué sentido habría que trasladar el umbral del decisor anterior si $Pr(H_0) = 1/4$ y se desease diseñar un decisor de mínima probabilidad de error?

c) Calcúlense P_{FA} y P_M para el decisor ML. ¿Qué ocurre si crece el número de dimensiones y $\{m_n\} \neq 0$?

d) Si en la práctica se tiene acceso a

$$z = \mathbf{m}^T\mathbf{x} + n$$

donde n es $G(n|m', v_n)$ e independiente de $\mathbf{x}$, en lugar de a las observaciones $\mathbf{x}$, ¿cómo ha de modificarse el diseño del decisor ML?

e) Calcúlense P'_{FA} y P'_M para el diseño del apartado d). ¿Cómo varían respecto a P_{FA} y P_M?

Nota: Utilícese, cuando convenga, la función de error complementario dada por la expresión:

$$\mathrm{erfc}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-t^2/2)\, dt$$

4.A1 Extender las formulas de la estimación en el caso general gaussiano y sus situaciones particulares cuando señal $\mathbf{s}$ y ruido $\mathbf{r}$ tienen medias no nulas: $\mathbf{m}_s$ y $\mathbf{m}_r$, respectivamente. (Sugerencia: retírense las medias de las variables).

Interprétese el resultado para el caso de observaciones independientes de la misma variable en ruido i.i.d. en función de la presencia de $\mathbf{m}_s$ y la media muestral corregida (según la media del ruido, $\mathbf{m}_r$).

Tema 6: "Estimación y regresión lineales"

6.E1 Sean s, x_1 y x_2 tres variables aleatorias de medias nulas tales que:

- la matriz de covarianzas de x_1 y x_2 es:

$$\mathbf{V}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

- el vector de covarianzas cruzadas de s con x tiene como expresión:

$$\mathbf{v}_{sx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcúlense los coeficientes w_1 y w_2 del estimador

$$\hat{s}_{lms} = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

b) Determínese el valor cuadrático medio del error de estimación.

c) Discútase el papel de la variable x_2 , que, según se ve, está incorrelacionada con la variable s a estimar.

6.E2 Se desea estimar la variable aleatoria s mediante una combinación lineal de las x_1, x_2, x_3, de modo que se minimice el error cuadrático medio. Todas las variables tienen media nula y se sabe que:

$$\begin{array}{rcll} v_{x_i x_i} & = & 1, & \forall i \\ v_{x_1 x_2} & = & \rho & \\ v_{x_1 x_3} & = & 0 & \\ v_{x_2 x_3} & = & 0 & \\ v_{s x_1} & = & 1 & \\ v_{s x_2} & = & 1/2 & \\ v_{s x_3} & = & 1 & \end{array}$$

(v_{ss} es suficientemente grande para permitir el margen de variación que realmente tenga ρ).

a) Calcúlense los coeficientes del estimador lineal buscado.

b) Determínese el error cuadrático medio de la estimación

c) ¿Cuánto aumenta el error cuadrático medio si se rediseña el estimador sin hacer uso de x_1? Probar que la variación es, efectivamente, un aumento para cualquier valor posible de ρ.

d) Si $0 < |\rho| < 1/2$, ¿cuáles son los valores de ρ para los que el aumento de c) es máximo y mínimo?.

6.E3 Se presentan en la tabla los valores observados de un índice s de rendimiento de un proceso químico en función de la medida x de una de las materias primas utilizadas, realizándose 7 observaciones por medida.

x	20	22	24	26
s	120	112	139	140
	106	134	121	152
	109	120	122	162
	103	119	121	133
	122	120	123	148
	105	112	135	148
	107	121	126	136

a) Determínese la recta de regresión de s sobre x.

b) Calcúlense los residuos.

6.E4 Se dispone de un conjunto de pares $\{x^{(k)}, s^{(k)}\}_{k=1}^{K}$ para diseñar la curva de regresión de s sobre x conforme al modelo

$$\hat{s} = \sum_{i \in I} w_i \exp\left[-\frac{(x - x^{(i)})^2}{2v}\right]$$

siendo I un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, K\}$ y v una constante dada.

a) Calcule los pesos w_i que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos, i.e., $C = \|\mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{K} \left[s^{(k)} - \hat{s}^{(k)}\right]^2$, para

k	1	2	3	4	5	6
$x^{(k)}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$s^{(k)}$	-0.01	0.9	0.35	-0.85	-0.76	0

utilizando $I = \{2, 5\}$ y $v = 0.005$. Represente gráficamente (de forma aproximada) la curva de regresión resultante.

b) Para $I = \{1, 2, \ldots, K\}$, obtenga el vector de pesos $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_K]^T$ que minimiza la siguiente función de coste suavizada:

$$C' = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \delta\|\mathbf{w}\|_2^2, \qquad \delta > 0$$

Analice el efecto del parámetro δ, considerando para ello la solución en los casos extremos: $\delta = 0$ y $\delta = \infty$.

6.A1 Las vv.aa s, x tienen una distribución conjunta

$$G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} v & \rho v \\ \rho v & v \end{bmatrix}\right).$$

Un analista desea diseñar un estimador lineal de s a la vista de x que proporcione mínimo error cuadrático medio; pero no conoce la distribución conjunta. Recurre a sustituir en la formulación teórica correspondiente los estadísticos reales $(E\{s\}, E\{x\}, v_{xx}, v_{sx}, v_{ss})$ por sus estimaciones muestrales $(\overline{s}, \overline{x}, \overline{v}_{xx}, \overline{v}_{sx}, \overline{v}_{ss})$ obtenidas a partir de un conjunto de datos etiquetados. En particular, el analista obtiene $\overline{x} = C$.

a) Establézcase la expresión del estimador lineal teórico que proporciona el error cuadrático medio mínimo, $\hat{s}_{lms}(x)$, y determínese el valor de dicho error cuadrático medio mínimo, $E\{e^2_{lms}(x)\}$

b) Determínese la expresión del estimador lineal diseñado por el analista, $\hat{s}_a(x)$, y calcúlese en cuánto excede el correspondiente error cuadrático medio, $E\{e^2_a(x)\}$, del anterior $E\{e^2_{lms}(x)\}$.

c) Tras realizar el diseño de $\hat{s}_a(x)$, el analista percibe, por consideraciones físicas, que s y x tienen medias nulas, y diseña un nuevo estimador, $\hat{s}'_a(x)$, calculando las varianzas muestrales teniéndolo en cuenta. ¿En qué difiere $\hat{s}'_a(x)$ de $\hat{s}_a(x)$?

d) Calcúlese la ventaja que proporciona $\hat{s}'_a(x)$ respecto a $\hat{s}_a(x)$ en cuanto a reducción de error cuadrático medio.

e) ¿Podría el analista percibir la ventaja que se ha calculado en el apartado d) si sustituyese en las expresiones de los errores cuadráticos medios los estadísticos reales por sus valores estimados muestralmente?

Tema 7: "Métodos analíticos, semianalíticos y máquina"

7.E1 En un problema de decisión binaria planteado bajo el criterio ML, las verosimilitudes de las observaciones son:

$$p(x|H_0) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} 1/a, & 0 < x < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $a \geq 1$ un parámetro determinista.

a) Diséñese el decisor óptimo supuesto que es conocido el valor de a.

b) Supóngase ahora que el valor de a es desconocido. Se opta por aplicar una estrategia minimax, fijando para la toma de decisiones un umbral x_m elegido para minimizar el máximo coste medio (correspondiente al criterio ML); es decir,

$$x_m = \arg\left\{\min_{x_u}\left\{\max_{a} \bar{C}_{ML}(x_u, a)\right\}\right\}$$

siendo x_u un umbral de decisión genérico

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} x_u$$

Determínese x_m.

c) Calcúlese el incremento del coste medio (ML) que se produce al aplicar la estrategia minimax respecto al que se tendría si a fuese conocida.

7.E2 Como se sabe, en el caso de que las observaciones de un problema de decisión se comporten dependiendo de los valores de parámetros deterministas desconocidos se aplican los test de cociente de verosimilitudes generalizados (GLRT): estimando primero los parámetros y aplicando después el LRT que corresponde a esos valores estimados.

a) Sean las verosimilitudes de la variable observada

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \frac{c}{2}\exp\left(-c\,|x-m|\right)$$

e iguales las probabilidades a priori. Se realizan cinco observaciones de la variable x, que toma los valores -4, -1, 0, 2 y 3. Diséñese el GLRT que se obtiene de estimar los parámetros desconocidos aplicando el criterio ML, tomando como objetivo a minimizar por el test la probabilidad de error.

b) Calcúlense P_{FA} y P_M para el decisor anterior en función de los valores reales de los parámetros.

7.E3 En un problema de decisión binaria unidimensional se sabe que la v.a. observada x bajo la hipótesis H_0 responde a una ddp $p(x|H_0)$ de media 0, simétrica y decreciente en torno a la media, con varianza v; mientras que bajo la hipótesis H_1 pasa a tomar media $m_1 > 0$, conservando su forma (es decir, $p(x|H_1) = p(x - m_1|H_0)$). Las hipótesis son equiprobables.

a) Diséñese el decisor ML.

b) En la práctica, m_1 es desconocida. Un diseñador opta por estimarla mediante la media muestral $\overline{x}_{(1)}$ de K observaciones de x bajo la hipótesis H_1, $\left\{x_{(1)}^{(k)}\right\}_{k=1}^{k}$, tomadas independientemente; estableciendo a partir de ella un estimador U del umbral teórico, y tomando la decisión mediante

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} U, \quad si \quad U > 0$$

$$x \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} U, \quad si \quad U < 0$$

Justifíquese esta forma de decidir, y determínese la expresión de U.

c) Obviamente, U es una v.a. Calcúlense su media y su varianza en función de las de las muestras, m_1 y v.

d) Considerada U como v.a, cuando se aplica al decisor con umbral U se produce falsa alarma

- si $U > 0$, cuando la v.a. x bajo la hipótesis H_0 supera el valor de la v.a. U;
- si $U < 0$, cuando la v.a. x bajo la hipótesis H_0 es inferior al valor de U.

Explicítese la expresión que permite calcular P_{FA}.

e) Cuando $K >> 1$ y admitiendo que $p(x|H_0)$ obedece al Teorema Central del Límite, U puede considerarse gaussiana. Suponiéndolo y también que $m_1 = 1$ y

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

(que no satisface la condición de decrecimiento en torno a la media; pero el diseñador no lo sabe), calcúlese la P_{FA} del diseño empírico (el que maneja U).

f) ¿A qué tiende la probabilidad de error del diseño empírico del apartado anterior cuando $K \to \infty$, admitiendo que, por simetría, $P_M \to P_{FA}$? Compárese con la del diseño ML supuesto m_1 conocida, $P_e(T)$.

Nota: Empléese la función de error complementario de Van Trees:

$$\mathrm{erfc}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-t^2/2)\, dt$$

Tema 8: "Estimación de densidades de probabilidad"

8.Q1 Un problema unidimensional binario de hipótesis equiprobables presenta las siguientes verosimilitudes:

$$p(x|H_0) = \begin{cases} 1/4, & 0 < x < 4 \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} 1/2, & 3 < x < 5 \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error y calcúlense las características P_{FA}, P_M y P_e.

b) Un diseñador no conoce dichas verosimilitudes, pero le resulta posible tomar tres valores de x bajo cada una de las hipótesis, que resultan ser:

- bajo H_0: $x_0^{(1)} = 1.56$, $x_0^{(2)} = 2.64$, $x_0^{(3)} = 3.30$
- bajo H_1: $x_1^{(1)} = 3.16$, $x_1^{(2)} = 4.40$, $x_1^{(3)} = 4.73$

El diseñador aplica un decisor tipo 1-NN para clasificar las muestras posteriores. Indíquense los márgenes de valores de x para los que el esquema 1-NN llevará a tomar las decisiones D_0 y D_1.

c) A partir de lo anterior, calcúlense las características P'_{FA}, P'_M y P'_e para el decisor 1-NN, y compárense los resultados con los del decisor óptimo calculado en a).

d) Explíquese lo que ocurriría si el diseñador pudiese tomar un número muy elevado de muestras etiquetadas para utilizarlas con el esquema 1-NN, dando aproximaciones para P''_{FA}, P''_M y P''_e.

Tema 11: "Sobre los costes"

11.E1 Las vv.aa. s y x tienen una ddp conjunta

$$p(s,x) = \begin{cases} a_f, & 0 < s < f(x) \quad y \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo a_f una constante.

Se desea estimar s a la vista de x mediante estimadores lineales de la forma

$$\hat{s}_i = w_i x, \quad i = 1, 2$$

empleando funciones de coste $C_i(s, \hat{s}_i)$ que cumplen

$$\frac{\partial C_1(s, \hat{s_1})}{\partial \hat{s_1}} = -(s - \hat{s_1})$$

$$\frac{\partial C_2(s, \hat{s_2})}{\partial \hat{s_2}} = -\hat{s_2}(s - \hat{s_2})$$

a) Sea $f(x) = f_1(x) = x$

a1. Determínese a_{f1}.

a2. Determínense los valores de los coeficientes $\{w_i\}_{i=1,2}$, que minimizan los costes medios correspondientes a las funciones de coste indicadas.

b) Sea $f(x) = f_2(x) = x^2$

b1. Determínese a_{f2}.

b2. Determínense los valores de los coeficientes $\{w_i\}_{i=1,2}$, que minimizan los costes medios correspondientes a las funciones de coste indicadas.

b3. Discútase en qué se diferencia esta situación de la que se produce en el apartado a).

11.E2 La d.d.p. conjunta de las vv.aa. s y x sigue la forma:

$$p(s,x) = \alpha, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < s < |x|$$

a) Determínese la d.d.p. de la v.a. x, $p_X(x)$, especificando el valor de α.

b) Establézcanse las expresiones de los estimadores de s en función de x que minimizan los costes cuadrático medio ($\overline{C}_{ms} = E\left\{(s - \hat{s})^2\right\}$) y absoluto medio ($\overline{C}_{ab} = E\left\{|s - \hat{s}|\right\}$), $\hat{s}_{ms}$ y $\hat{s}_{ab}$, respectivamente.

c) Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en x, establézcanse las expresiones de los estimadores $\hat{s}_{qms} = w_1 x^2$ y $\hat{s}_{qab} = w_2 x^2$ que minimizan los costes antes mencionados (cuadrático y absoluto medios, respectivamente).

11.A3 El efecto de los valores fuera de margen puede ilustrarse mediante el siguiente ejemplo simplificado.

Considérese la observación

$$x = s + r$$

donde la señal s es $G\{0, v\}$, mientras que el ruido r, independiente de la señal, toma la forma de una interferencia impulsiva

$$p(r) = P\delta(r) + (1 - P)\delta(r - R) \qquad (R > 0)$$

siendo $P >> 1 - P$.

a) Determínese $\hat{s}_{ms}$.

b) Calcúlese el estimador óptimo $\hat{s}_T$ para la función de coste de Talvar

$$C_T(s - \hat{s}) = \begin{cases} (s - \hat{s})^2, & |s - \hat{s}| < e_0 \\ e_0^2, & |s - \hat{s}| > e_0 \end{cases}$$

con $2e_0 < R$; definiendo los intervalos de valores de x en que ha de aplicarse cada valor de este estimador.

c) Compárense los dos estimadores obtenidos.

Tema 12: "Calidad de estimadores y decisores"

12.Q1 Las variables aleatorias s y x siguen una distribución conjunta

$$G\left\{\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right\}^{(s,x)} \quad (|\rho| < 1)$$

Determínese si existe el estimador absolutamente eficiente de s a la vista de x.

12.E1 Considérese la observación

$$x = s + r$$

de la señal s inmersa en ruido r; la señal sigue la distribución exponencial unilateral $E_{\{1,a\}}$

$$p(s) = a \exp(-as)u(s)$$

y el ruido, independiente de s, la distribución Erlang (Gamma) $E_{\{2,a\}}$

$$p(r) = a^2 r \exp(-ar)u(r)$$

a) Determínese $\hat{s}_{ms}$.

b) Calcúlese la media $\mathrm{E}\{\hat{s}_{ms} - s\}$ y la varianza $\mathrm{Var}\{\hat{s}_{ms} - s\}$ del error, y discútase la influencia de a.

c) Determínese $p(\hat{s}_{ms}|s)$.

12.E2 El parámetro determinista s es observado a través de

$$x = \sqrt{s}r$$

donde r es un ruido multiplicativo $G(0, v)$. Se realizan K observaciones independientes de x, $\{x^{(k)}\}$.

a) Determínese el estimador de máxima verosimilitud $\hat{s}_{ml}$.

b) Calcúlese el sesgo y la varianza de $\hat{s}_{ml}$.

12.E3 Las vv.aa. s y x obedecen a la ddp conjunta

$$p(s, x) = c, \begin{cases} 0 < s < 1 \\ s < x < 2s \end{cases}$$

siendo c una constante.

a) Tras representar el soporte de la ddp, calcúlese el valor de c.

b) Establézcanse las expresiones de las ddp marginales $p(s)$ y $p(x)$.

c) Determínese analíticamente la forma del estimador de error cuadrático medio mínimo de s a la vista de x,$\hat{s}_{ms}(x)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de $p(s, x)$, y discútase si es posible determinarla directamente.

d) Calcúlese el error cuadrático medio $E\{e_{ms}^2(x)\}$ que proporciona la aplicación del estimador anterior.

e) Determínese la forma del estimador lineal de error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{lms}(x)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de $p(s, x)$, y coméntese su aspecto.

f) Calcúlese el error cuadrático medio $E\{e_{lms}^2(x)\}$ que proporciona la aplicación del estimador anterior, y compárese con $E\{e_{ms}^2(x)\}$.

g) ¿Qué ocurre si se percibe (p.ej., visualizando muestras) que hay un comportamiento (estadístico) distinto para $0 < x < 1$ y $1 < x < 2$, y se diseña un estimador lineal óptimo diferente para cada uno de estos intervalos ($\hat{s}_{A,lms}(x)$ y $\hat{s}_{B,lms}(x)$, respectivamente)? Verifíquese analíticamente la solución que se proponga.