Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **14/02/08**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 70 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese la variable aleatoria x con ddp

$$p(x) = a \exp\left[-a\left(x-d\right)\right] u\left(x-d\right)$$

con parámetros a>0 y d.

Establézcanse las expresiones de los estimadores de máxima verosimilitud de ambos parámetros, $\hat{a}_{ML}$ y $\hat{d}_{ML}$, en función de los valores de K muestras de x tomadas independientemente, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

(20 min; 1p)

T2.- Considérese el problema de decisión descrito por las siguientes verosimilitudes:

$$p\left(x \middle| H_0\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2}x & 0 < x < a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$p\left(x \middle| H_1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & 0 < x < a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Represéntese la curva característica de operación (P_D vs P_{FA}) del decisor bayesiano que permite resolver dicho problema. Represéntese sobre dicha curva el punto de trabajo del decisor de máxima verosimilitud e indíquese como varía su posición al modificar el valor de a.

(30 min; 1 p)

T3.- El filtro adaptativo de Mínimo Error Cuadrático Medio (LMS) "con pérdidas" se obtiene como resultado de la minimización por gradiente (estocástico) de la siguiente función de coste:

$$J(n) = e^2(n) + \alpha \|\mathbf{w}(n)\|^2, \quad \alpha > 0$$

donde $\mathbf{w}(n)$ son los pesos del filtro y $e(n) = d(n) - y(n)$, siendo $d(n)$ la señal deseada e $y(n)$ la salida del filtro.

a) Establézcase la regla de adaptación de los pesos del LMS con pérdidas cuando la salida del filtro se obtiene como $y(n) = \mathbf{w}^T(n)\, \mathbf{x}(n)$, siendo $\mathbf{x}(n)$ el vector de entradas al filtro en el instante n.

b) Repítase el apartado anterior para $y(n) = \tanh[\mathbf{w}^T(n)\, \mathbf{x}(n)]$.

c) Obténgase la condición que deben satisfacer el paso de adaptación y la constante α para que, en ausencia de entrada ($\mathbf{x}(n) = 0$), los pesos del filtro tiendan a 0.

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 165 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Un problema de decisión binaria bidimensional viene caracterizado por la equiprobabilidad de las hipótesis y por las verosimilitudes

$$p(x_1, x_2 | H_0) = K_0 x_1 (1 - x_2), \qquad 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1$$
$$p(x_1, x_2 | H_1) = K_1 x_1 x_2, \qquad 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1$$

($K_0, K_1 > 0$).

a) Calcúlense los valores de las constantes K_0 y K_1.

b) Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error, e indíquese el carácter de los estadísticos x_1 y x_2.

c) Determínense las ddp marginales $p_{X_i|H_j}(x_i) = p(x_i \mid H_j)$, $i = 1,2$ y $j = 0,1$. ¿Qué relación estadística hay entre x_1 y x_2 bajo cada hipótesis?

d) Calcúlense P_{FA}, P_M y P_e.

e) En la práctica, la medida de x_2 viene acompañada de un ruido aditivo n independiente de x_1 y x_2; es decir, se observa $y = x_2 + n$. Diséñese el decisor óptimo para esta situación cuando la ddp de este ruido tiene la forma:
$$p(n) = 1, \qquad 0 < n < 1$$

f) Calcúlense P'_{FA}, P'_M y P'_e para la situación y el diseño del apartado anterior.

(90 min; 2.5 p)

P2.- Las variables aleatorias s y x tienen una función de densidad de probabilidad conjunta

$$p(s,x) = \begin{cases} 10s & 0 < s < x^2 \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se desea estimar s a la vista de x minimizando la siguiente función de coste:

$$C(s,\hat{s}) = s^2 \left(s - \hat{s}\right)^2$$

Obténganse:

a) el estimador óptimo de s, $\hat{s}_C$, que minimiza el coste medio $\overline{C}(s,\hat{s})$ dada la observación x.
b) el estimador de la forma $\hat{s}_L = wx$ que minimiza el coste medio $\overline{C}(s,\hat{s})$.
c) el coste medio global de ambos estimadores, $\overline{C}(s,\hat{s}_C)$ y $\overline{C}(s,\hat{s}_L)$.
d) el sesgo de ambos estimadores, $E\left\{s-\hat{s}_C\right\}$ y $E\left\{s-\hat{s}_L\right\}$.
e) la varianza de ambos estimadores, $\mathrm{Var}\left\{s-\hat{s}_C\right\}$ y $\mathrm{Var}\left\{s-\hat{s}_L\right\}$.

(75 min; 2.5 p)