TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 70 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Supóngase que la ddp conjunta de las vv.aa. s y $\underline{x}$, $p(s,\underline{x})$, es una mezcla de L ddps conjuntas $\{p_\ell(s,\underline{x})\}_{\ell=1}^{L}$; es decir

$$p(s,\underline{x}) = \sum_{\ell=1}^{L} \pi_\ell p_\ell(s,\underline{x})$$

donde $\{\pi_1\}_{\ell=1}^{L}$ son los coeficientes de mezcla (tales que $\{\pi_\ell\} > 0 \ \forall \ell$ y $\sum_{\ell=1}^{L} \pi_\ell = 1$). Demuéstrese que el estimador de error cuadrático medio mínimo de s a la vista de $\underline{x}$, $\hat{s}_{MMS}(\underline{x})$, tiene la forma

$$\hat{s}_{MMS}(\underline{x}) = \sum_{\ell=1}^{L} g_\ell(\underline{x}) \hat{s}_{MMS,\ell}(\underline{x}),$$

siendo

$$g_\ell(\underline{x}) = \frac{\pi_\ell p_\ell(\underline{x})}{\sum_{\ell'=1}^{L} \pi_{\ell'} p_{\ell'}(\underline{x})}, \quad 1 \le \ell \le L$$

(donde $\{p_\ell(\underline{x})\}_{\ell=1}^{L}$ son las ddp marginales de $\{p_\ell(s,\underline{x})\}_{\ell=1}^{L}$ respecto a s

$$p_\ell(\underline{x}) = \int p_\ell(s,\underline{x}) ds, \ 1 \le \ell \le L \ )$$

y

$$\hat{s}_{MMS,\ell}(\underline{x}) = E_\ell\{s|\underline{x}\} = \int s p_\ell(s|\underline{x}) ds, \ 1 \le \ell \le L$$

(25 min; 1p)

T2.- Se quiere estimar el parámetro s de una distribución uniforme

$$p(x) = U_{\{0,s\}}(x) = \begin{cases} 1/s & , 0<x<s \\ 0 & , \text{caso contrario} \end{cases}$$

a partir de una única observación de la misma, $x^{(1)}$.

a) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud, $\hat{s}_{ML}$.

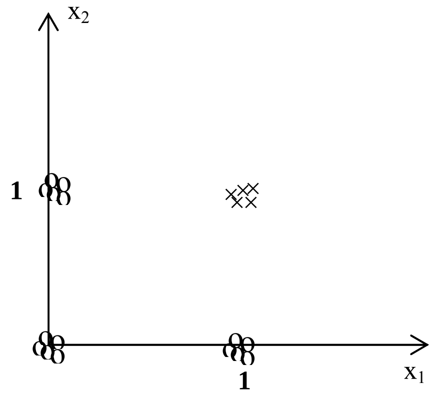
b) Calcúlese el estimador lineal $\hat{s} = \hat{w}x$ de mínimo error cuadrático medio ($E\left\{(\hat{s}-s)^2 \mid s\right\}$).

c) Compárense los sesgos y varianzas de ambos estimadores.

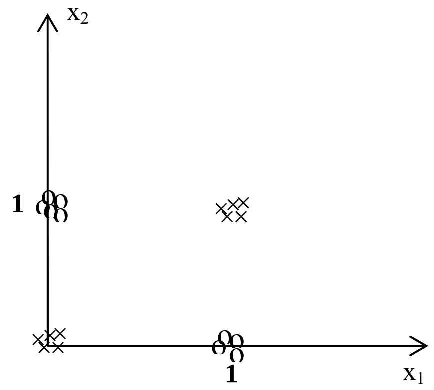
(25 min; 1 p)

T3.- Los perceptrones monocapa "duros" pueden asociarse en capas para ofrecer regiones de decisión más generales.

a) Determínese una arquitectura y unos pesos que proporcionen una frontera separadora en el problema de clasificación dado por los datos de la figura (donde "o" son los datos de la clase 0, y "×" los datos de la clase 1).



b) Repita el apartado a) para los datos de la siguiente figura.



(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Se mide el parámetro determinista desconocido s, s>0, mediante dos sistemas, que proporcionan las observaciones

$$x_i = a_i s + n_i, \quad i = 1, 2$$

siendo $\{a_i\}, \{n_i\}$, vv.aa. gaussianas e independientes entre sí, con medias $E\{a_i\}=1, E\{n_i\}=0$, y varianzas $\{v_{ai}\}, \{v_{ni}\}$, respectivamente (i=1,2).

a) Establézcase la expresión que proporciona el estimador ML de s, $\hat{s}_{ML}$.

b) Calcúlese $\hat{s}_{ML}$ para el caso particular $v_{ai}=0$, i=1,2.

c) Calcúlese $\hat{s}_{ML}$ para el caso particular $v_{ni}=0$, i=1,2.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Considérese el problema de decisión binaria especificado por los costes C_{00}= C_{11}=0, C_{01}= C_{10}=1, y

$$p(x|H_0) = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 x) \quad x \geq 0$$
$$p(x|H_1) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) \quad x \geq 0$$

siendo $\lambda_0 = 2\lambda_1$.

a) Diséñese el decisor de mínimo coste medio suponiendo $Pr(H_1)$=1/2.

b) Determínense las probabilidades P_{FA} y P_M del decisor obtenido en a).

c) Suponiendo que el verdadero valor de $Pr(H_1)$ es P>0, represente gráficamente el coste medio del detector obtenido en a) en función de P.

d) Se aplica la decisión anterior a dos observaciones independientes. Determínese la probabilidad de cometer exactamente 0, 1 y 2 errores, en función de P.

e) Supóngase que el coste total asociado a las dos decisiones no es la suma de los costes de cada decisión, sino que
   - El coste de acertar en ambas decisiones es 0.
   - El coste de cometer un solo error es 1.
   - El coste de cometer 2 errores es C=18.

   Represéntese gráficamente el valor medio del coste total en función de P.

(75 min; 2.5 p)