Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **25/01/08**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese el problema de decisión dado por las hipótesis

$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{r}_0$
$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1$

siendo $\mathbf{r}_i$ ruidos gaussianos de media cero y matrices de covarianzas V_i (i = 1,2) y $\mathbf{s}_i$ señales deterministas conocidas (y diferentes entre sí).
Justifíquese en qué condiciones la solución óptima del problema de decisión binario resulta en una solución:

a) de forma lineal.

b) basada en la energía ($\|\mathbf{x}\|_2^2$) de la observación.

(20 min; 1p)

T2.- Se desea diseñar un modelo de regresión a partir de un conjunto de datos de entrenamiento $\left\{\mathbf{x}^{(k)}, s^{(k)}\right\}$ que contiene K pares, con dim(s)=1 y dim($\mathbf{x}$)=100. Sin embargo, se sabe que, para el problema bajo análisis, algunas de las variables del espacio de entrada no contienen información relevante, y que su uso daría lugar a un modelo con una pobre capacidad de generalización.

Indíquese cómo solucionaría el problema mediante un procedimiento de selección de variables, utilizando una búsqueda basada en algoritmos genéticos; en concreto, explique cómo realizaría la codificación binaria de las posibles soluciones, y discuta cómo implementaría la función de ajuste (“fitness”) que permita determinar la capacidad de generalización de cada individuo de la población.

(20 min; 1 p)

T3.- Dadas las siguientes funciones de coste:

$C_1(s,\hat{s}) = |s-\hat{s}+a_1| + (s-\hat{s}-b_1)^2$

$C_2(s,\hat{s}) = a_2(s-\hat{s})^2 + b_2\log(s-\hat{s})$, con $a_2, b_2 > 0$

Indíquese si existen valores (indicando cuáles son en caso afirmativo) a_i, b_i, con i=1,2, que hacen que se verifique $\hat{s}_i = \hat{s}_{ms}$, siendo $\hat{s}_i$ el estimador óptimo asociado al coste C_i, i=1,2, y $\hat{s}_{ms}$ el estimador de error cuadrático medio mínimo, cuando:

a) $p(s\,|\,\mathbf{x})$ es simétrica respecto a su media.

b) Para cualquier $p(s\,|\,\mathbf{x})$.

(20 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **25/01/08**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 180 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Un sistema genera dos observaciones, x_1 y x_2, que, tanto bajo hipótesis H_0 como H_1, son independientes e idénticamente distribuidas, siendo

$$p\left(x_i \middle| H_1\right) = 2x_i, \qquad 0 < x_i < 1 \tag{1}$$

$$p\left(x_i \middle| H_0\right) = 2\left(1 - x_i\right), \qquad 0 < x_i < 1 \tag{2}$$

para i=1,2. Suponga hipótesis equiprobables.

a) Determine el decisor MAP basado en x_1 y calcule su probabilidad de error.

b) Sea DMAP1 el decisor del apartado a), suponga que si $|x_1-0.5|<a$ (siendo $0<a<0.5$), se observa x_2 y, con objeto de seguir aplicando decisión por umbral, se descartan x_1 y la decisión de DMAP1. En su lugar, se aplica un segundo decisor, basado en x_2 y también MAP, que llamaremos DMAP2.

Represente gráficamente sobre el plano x_1-x_2, para un valor de a arbitrario, las regiones de decisión del esquema conjunto DMAP1-DMAP2.

c) Determine la probabilidad de error global del esquema conjunto DMAP1-DMAP2.

d) Determine la máxima reducción de la probabilidad de error global que puede conseguirse utilizando el esquema conjunto, respecto al decisor DMAP1.

e) Compare las prestaciones del decisor conjunto DMAP1-DMAP2 con las del decisor MAP que utiliza simultáneamente x_1 y x_2

(75 min; 2.5 p)

P2.- Las vvaa s y x obedecen a la ddp conjunta

$$p(s,x) = c, \begin{cases} 0 < s < 1 \\ s < x < 2s \end{cases}$$

siendo c una constante.

a) Tras representar el soporte de la ddp, calcúlese el valor de c.

b) Establézcase las expresiones de las ddp marginales p(s) y p(x).

c) Determínense analíticamente la forma del estimador de error cuadrático medio mínimo de s a la vista de x, $\hat{s}_{ms}(x)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de p(s,x), y discútase si es posible determinarla directamente.

d) Calcúlese el error cuadrático medio $E[e_{ms}^2(x)]$ que proporciona la aplicación del estimador anterior.

e) Determínese la forma del estimador lineal de error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{lms}(x)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte p(s,x), y coméntese su aspecto.

f) Calcúlese el error cuadrático medio $E[e_{lms}^2(x)]$ que proporciona la aplicación del estimador anterior, y compárese con $E[e_{ms}^2(x)]$.

(105 min; 2.5 p)