Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **23/06/06**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese el problema de decisión dado por las hipótesis

$$H_0: \quad x = s_0 + n_0$$
$$H_1: \quad x = s_1 + n_1$$

donde s_0 y s_1 son variables deterministas y n_0, n_1 son v.a. unidimensionales con densidad de probabilidad conjunta

$$G\left(\underline{0}, \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right)$$

Diseñe el decisor basado en la observación de x para los casos:

a) $v_{11} = v_{22} = v$ y $v_{21} = v_{12} = 0$

b) $v_{11} = v_1$, $v_{22} = v_2$ y $v_{21} = v_{12} = 0$

(20 min; 1p)

T2.- Considérese un algoritmo de gradiente conjugado que minimiza el coste medio, $\bar{C}(\underline{w})$. Suponiendo conocida la dirección de búsqueda $\underline{d}^{(k)}$, ¿cómo determinaría el valor de $\eta^{(k)}$?

(20 min; 1 p)

T3.- Las variables aleatorias s y x siguen una distribución conjunta

$$G_{\left\{\underline{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right\}}(s,x) \quad (|\rho|<1).$$

Determínese si existe el estimador absolutamente eficiente de s a la vista de x.

(20 min; 1p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 105 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Un juego consiste en una sucesión indefinida de jugadas en las que el primer jugador lanza una moneda equilibrada y, tras ver el resultado (cara: H_1; cruz: H_0), establece el importe de la apuesta, x ($x>0$). El segundo jugador puede aceptar o no la apuesta; si la acepta, lanza la moneda: la cara gana a la cruz, y el empate no tiene consecuencias.

En una partida, el segundo jugador sabe que las apuestas del primero siguen las leyes probabilísticas:

$$p(x|H_i)=\begin{cases}1, & |x-m_i| <1/2 \\ 0, & |x-m_i| >1/2\end{cases} \qquad 1/2<m_0 \le m_1$$

y conoce también los valores de m_0 y m_1.

a) Calcúlese el beneficio medio (importe de la apuesta por la probabilidad de ganarla menos la probabilidad de perderla) a la vista de x para el segundo jugador.

b) Considerando el resultado del apartado anterior, establézcase la regla de decisión para aceptar o rechazar la apuesta que ha de aplicar el segundo jugador para maximizar su beneficio.

c) Calcúlese el beneficio medio del segundo jugador cuando sigue la regla determinada en el apartado anterior.

d) Indíquese como debe elegir m_1 y m_0 el primer jugador para minimizar sus pérdidas. Coméntese el resultado.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Se pretende estimar el valor de cierta v.a. s a partir de las observaciones $\{x^{(k)}, k=1,\ldots K\}$ que están relacionadas con ella a través de la expresión

$$x^{(k)}=\exp(-s)+r^{(k)}$$

siendo $\{r^{(k)}, k=1,\ldots K\}$ una colección de muestras de ruido independientes entre sí e independientes de s, con densidad de probabilidad

$$p(r)=\frac{2}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left[-r^2/2v\right]u(r)$$

a) Determínese el estimador ML de s

b) Suponiendo p(s) uniforme en el intervalo [a,b] (siendo b>a>0), calcúlese el estimador MAP de s. Represéntese gráficamente $\hat{s}_{MAP}$ en función de $\hat{s}_{ML}$

(45 min; 2.5 p)