Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **09/09/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 70 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Las siguientes verosimilitudes caracterizan un problema de decisión binario bidimensional con $P(H_0) = \frac{3}{5}$:

$$p(x_1, x_2 \mid H_0) = \begin{cases} 2; & 0 < x_1 < 1 \text{ y } 0 < x_2 < 1 - x_1 \\ 0; & \text{resto} \end{cases}$$

$$p(x_1, x_2 \mid H_1) = \begin{cases} 3(x_1 + x_2); & 0 < x_1 < 1 \text{ y } 0 < x_2 < 1 - x_1 \\ 0; & \text{resto} \end{cases}$$

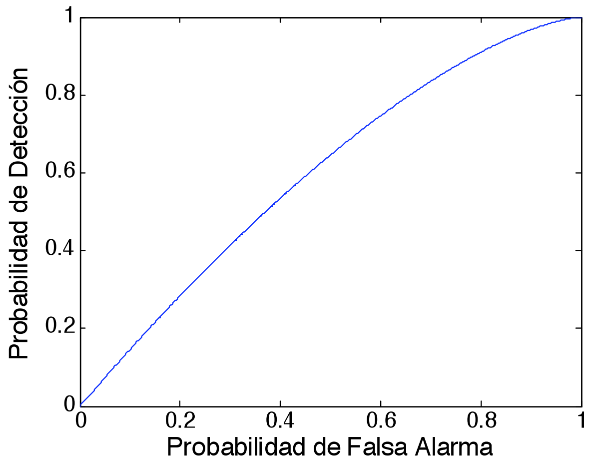
Considérese un decisor LRT genérico con umbral η,

a) Calcúlese la P_{FA} en función de η.

b) La siguiente figura representa la curva ROC. Justificando su respuesta:

  b.1) Indíquese sobre la curva cómo varía el punto de trabajo del decisor al aumentar o disminuir el umbral del test.

  b.2) Sitúense sobre la curva los puntos de trabajo correspondientes al decisor ML, al decisor de mínima probabilidad de error y al decisor de Neyman-Pearson con $P_{FA} = 0.3$.



(25 min; 1p)

T2.- Indíquese, justificando muy brevemente la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) La búsqueda global permite obtener siempre soluciones estrictamente mejores que la búsqueda local en términos de minimización de la función de coste.

b) El algoritmo NLMS permite solventar los problemas de búsqueda en zig-zag que padece el LMS convencional.

c) Los algoritmos de gradiente conjugado seleccionan direcciones de búsqueda que apuntan al mínimo de la función de coste.

d) El cumplimiento de la condición de conjugación en los algoritmos de gradiente conjugado permite seleccionar en cada iteración el valor óptimo del paso de adaptación.

e) Se desea resolver un problema de estimación aplicando reglas basadas en gradiente estocástico. Sabiendo que la distribución a posteriori de la variable a estimar es gaussiana, el principio de invarianza permite asegurar que es indiferente utilizar las reglas de gradiente basadas en coste cuadrático o absoluto.

(20 min; 1 p)

T3.- Se desea estimar la media m de una v.a. x con varianza v, para lo que se dispone de un conjunto de K+1 observaciones independientes $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K+1}$ de dicha v.a. Considérense los estimadores siguientes:

$$\hat{m}_1 = \frac{a}{K}\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}$$

$$\hat{m}_2 = x^{(K+1)}$$

$$\hat{m}_3 = \lambda\,\hat{m}_1 + (1-\lambda)\,\hat{m}_2$$

siendo a una constante positiva y estrictamente menor que uno, y λ otra constante a determinar.

a) Compárense los estimadores $\hat{m}_1$ y $\hat{m}_2$ en base a sus sesgos y varianzas.

b) Obténgase el sesgo, la varianza, y el error cuadrático medio (MSE) del estimador $\hat{m}_3$, simplificando el resultado obtenido para $K \rightarrow \infty$.

(25 min; 1 p)

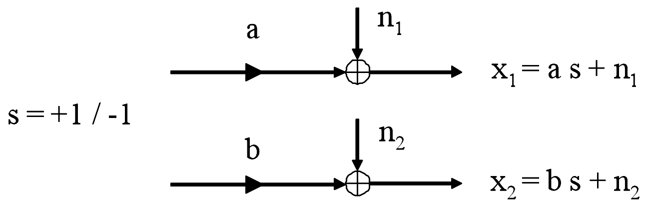
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **09/09/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérese un sistema de comunicaciones en el que los símbolos "+1" ó "-1" se transmiten simultáneamente por dos canales ruidosos, tal y como se ilustra en la figura:



$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \sim G\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right]$$

siendo a y b dos constantes desconocidas que caracterizan a los canales. Se sabe, además, que las probabilidades de transmisión de ambos símbolos son iguales.

a) Si se desea construir un decisor para discriminar cuál fue el símbolo transmitido utilizando únicamente una de las dos observaciones disponibles, x_1 o x_2, indíquese cuál de las dos variables utilizaría, justificando su respuesta en función de los valores de las constantes. Proporciónese la forma analítica del decisor ML correspondiente.

b) Obténgase el decisor binario de mínima probabilidad de error basado en la observación conjunta de x_1 y x_2, expresando el resultado como función de a, b y ρ. Simplifique la expresión de dicho decisor tanto como le sea posible.

c) Para ρ = 0, calcúlese la probabilidad de error del decisor diseñado en b). Exprese su resultado utilizando la función de error complementario:

$$\mathrm{erfc}(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

d) Para el cálculo de las constantes a, b y ρ, se transmite inicialmente una secuencia de entrenamiento, de forma que para el diseño se dispone de un conjunto $\left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right\}_{k=1}^{K_1}$ de observaciones correspondientes a K_1 transmisiones independientes del símbolo "+1", y otro conjunto $\left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right\}_{k=1}^{K_{-1}}$ de observaciones correspondientes a K_{-1} transmisiones independientes del símbolo "-1". Obténganse los estimadores ML de a, b y ρ, a partir de las observaciones disponibles.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Se desea construir un modelo de regresión lineal de bajo coste computacional para una variable aleatoria s. Se sabe que esta variable depende de otras tres variables aleatorias x_1, x_2 y x_3, que constituyen las observaciones. La siguiente tabla muestra cuatro realizaciones independientes del proceso aleatorio.

x_1	x_2	x_3	s
3	-1	0	-1
-2	0	1	-2
0	-1	2	0
-1	2	-3	3

El objetivo del problema consiste en evaluar dos estrategias para construir el citado regresor de bajo coste computacional:

- Construir un regresor lineal exacto de mínimo error cuadrático medio usando únicamente dos de las variables disponibles.
- Construir una aproximación al estimador lineal de mínimo error cuadrático medio usando las tres variables. La aproximación consiste en suponer que la matriz de covarianzas de las observaciones es diagonal.

Para ello:

a) Determínese cuáles de las tres variables observables se van a incluir en el regresor del primer diseño. La selección se realiza en dos pasos: en primer lugar se elige la variable cuya covarianza muestral (i.e., estimada a partir de los datos) con s presenta un mayor valor absoluto. La segunda variable será aquella cuya covarianza muestral con la seleccionada en el primer paso tenga menor valor absoluto.

b) Constrúyase el regresor lineal de s de mínimo error cuadrático medio empleando las dos variables elegidas en el apartado anterior.

c) Constrúyase el estimador lineal aproximado especificado en el segundo diseño. Para ello, estímense en primer lugar los elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas de las observaciones y el vector de covarianzas de las observaciones con s a partir de las muestras disponibles.

d) ¿Cuál de los dos diseños propuestos obtiene un menor error cuadrático promedio sobre los datos disponibles?

(75 min; 2.5 p)