Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **16/01/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 50 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese un problema de decisión binario con hipótesis H_0 y H_1 y observación x. Cierto decisor adopta D_1 si x se encuentra en una región R_1 y D_0 en caso contrario, obteniendo probabilidades de falsa alarma y detección P_{FA} y P_D, respectivamente.

El decisor opuesto decide D_0 si x se encuentra en R_1 y D_1 en caso contrario, siendo P_{FA}' y P_D' sus probabilidades de falsa alarma y detección, respectivamente. Determínese la relación entre las probabilidades de falsa alarma y detección de ambos decisores.

(10 min; 1p)

T2.- Se desea construir un estimador de una variable aleatoria s con la siguiente forma analítica: $\hat{s} = w_0 + wx^3$.

a) Si se define la v.a. $y = x^3$, indíquese qué estadísticos son suficientes para determinar los pesos del modelo de estimación.

b) Un analista desea ajustar el modelo anterior, pero desconoce la estadística del problema, por lo que recurrre a estimaciones muestrales de los estadísticos suficientes, basadas en el conjunto disponible de pares etiquetados de las variables aleatorias: $\{x^{(k)}, s^{(k)}\}_{k=1}^{4} = \{(-1, -0'55), (0, 0'5), (1, 1'57), (2, 8'7)\}$. Determínense los pesos w_0 y w obtenidos por el analista.

(25 min; 1 p)

T3.- Se aplica la regla del perceptrón para clasificar dos conjuntos de muestras linealmente separables mediante un perceptrón monocapa duro.

a) ¿Se puede predecir el tiempo de convergencia?
b) Una vez que el algoritmo converja, ¿puede tener la solución algún inconveniente?

(15 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **16/01/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Las vvaa s y x se distribuyen conjuntamente según la ddp

$$p(s,x) = \alpha s x^2, \quad 0 < s < 1 - x, \quad 0 < x < 1$$

siendo α un parámetro a determinar.

a) Establézcanse las expresiones de las ddp marginales p(x) y p(s).
b) Calcúlese el estimador MAP de s dado x, $\hat{s}_{MAP}(x)$.
c) Calcúlese el estimador ML de s dado x, $\hat{s}_{ML}(x)$.
d) Calcúlese el estimador de s dado x de error cuadrático medio mínimo, $\hat{s}_{MSE}(x)$.
e) Compárense los estimadores calculados según el coste medio dado x que se emplea para establecer el estimador MAP.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Se tiene un problema de decisión binaria definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p(x_1, x_2 \mid H_0) = G\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right) \qquad p(x_1, x_2 \mid H_1) = G\left(\begin{bmatrix}m\\m\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right)$$

siendo m>0 y $|\rho| < 1$.

a) Sabiendo que $Pr(H_0)=Pr(H_1)$, obténgase el decisor bayesiano de mínima probabilidad de error. Represéntese en el plano x_1-x_2 la frontera de decisión obtenida.
b) Sobre el clasificador obtenido en a), compruébese que z= x_1+x_2 es un estadístico suficiente para la decisión. Obténganse las verosimilitudes de la variable aleatoria z, $p(z|H_0)$ y $p(z|H_1)$.
c) Calcúlense las probabilidades de falsa alarma, de pérdida y de error del decisor anterior; exprésense estas probabilidades utilizando la función error complementario

$$\text{erfc}(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

d) Analícese cómo varía la probabilidad de error con el valor de ρ; para ello, considérense los casos $\rho = -1$, $\rho = 0$ y $\rho = 1$. Indíquese sobre el plano x_1-x_2, para cada valor de ρ, cómo se distribuyen las verosimilitudes, y represéntese la frontera de decisión.

(60 min; 2.5 p)