# TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

## TEORÍA
## (Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

**T1.-** Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático (mse) que permita estimar la variable aleatoria s a partir de la v.a. $x_1$. Se conoce la siguiente información estadística:

$$E\{x_1\} = 0, \quad E\{s\} = 1,$$
$$E\{x_1^2\} = 1, \; E\{sx_1\} = 2$$

a) Indíquese cuál de los siguientes diseños mse proporcionará un error cuadrático medio menor:

$$\hat{s}_a = w_{0a} + w_{1a}x_1$$
$$\hat{s}_b = w_{1b}x_1$$

b) Si se dispone ahora de una segunda v.a. $x_2$ de la que se sabe:

$$E\{x_2\} = 1, \quad E\{x_2^2\} = 2,$$
$$E\{x_1x_2\} = 1/2, \; E\{sx_2\} = 2,$$

justifíquese si el estimador

$$\hat{s}_c = w_{0c} + w_{1c}x_1 + w_{2c}x_2$$

presenta un error cuadrático medio menor que los estimadores propuestos en a).

(20 min; 1p)

**T2.-** Se estima la varianza v de una v.a. x con media nula a partir de K observaciones $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$ de dicha variable tomadas independientemente, utilizando el estimador

$$\hat{v} = \frac{1}{K}\left[\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}\right]^2$$

a) Determínese el sesgo del estimador.

b) Para K =2 y suponiendo $E\{x^4\} = \alpha$, determínese la varianza del estimador.

(25 min; 1 p)

**T3.-** Descríbase el funcionamiento de las siguientes configuraciones en las que se utilizan habitualmente filtros adaptativos: identificación de sistemas (modelado directo) e igualación (modelado inverso).

---

(15 min; 1 p)

# TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

## PROBLEMAS

## (Tiempo: 180 minutos. Puntos: 5/8)

**P1.-** Considérese la situación descrita por

$$x = s + n$$

siendo s y n vv.aa. con ddps:

$$s : G_{\{m, v_s\}}(s)$$

$$n : G_{\{0, v_n\}}(n)$$

e independientes entre sí.

a) Calcúlese la ddp p(s|x).

b) Se puede definir el estimador de intervalo de una v.a. s dada una observación x como el par ordenado de valores $\{s_a(x), s_b(x)\}$ que minimiza $s_b$-$s_a$ (anchura del intervalo de confianza, $[s_a, s_b]$) cumpliendo

$$\Pr\{s_a < s < s_b \,|x\} = 1- \delta$$

donde $\delta$ ($\delta$<<1) es el nivel de confianza del estimador; 1- $\delta$ se denomina coeficiente de confianza.

Determínese el estimador de intervalo de s con nivel de confianza $\delta$, expresado en función del percentil 100(1-$\delta$/2) de la v.a. $\gamma$: $G_{\{0,1\}}(\gamma)$; es decir, el valor $\gamma_{1-\delta/2}$ que verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma_{1-\delta/2}} \exp(-\gamma^2 / 2) d\gamma = 1- \delta/2$$

c) ¿Qué ocurre si $v_n >> v_s$?

d) ¿Qué ocurre si $v_s >> v_n$?

---

(90 min; 2.5 p)

**P2.-** Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p(x_1, x_2|H_0) = \begin{cases} \alpha x_2 & \text{si } 0 \le x_1 \le 1/4 \text{ y } 0 \le x_2 \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x_1, x_2|H_1) = \begin{cases} \beta x_1 & \text{si } 0 \le x_1 \le 1 \text{ y } 0 \le x_2 \le 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Tras obtener los valores de las constantes $\alpha$ y $\beta$, represéntense las regiones de decisión correspondientes a un decisor LRT. Indíquese cómo varían las regiones de decisión en función del umbral del clasificador. ¿Existe algún valor de dicho umbral para el que el clasificador obtenido sea lineal?

b) Obténganse las densidades de probabilidad marginales de $x_1$ y $x_2$ bajo ambas hipótesis ($H_0$ y $H_1$). ¿Qué relación estadística existe entre $x_1$ y $x_2$?

c) Por sencillez, se decide utilizar un detector de umbral basado en una única observación, $x_1$ o $x_2$:

$$\text{DEC1: } x_1 \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta_1 \quad ; \quad \text{DEC2: } x_2 \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} \eta_2$$

Calcúlense las probabilidades de falsa alarma y de detección de los clasificadores DEC1 y DEC2, expresándolas en función de los umbrales de dichos decisores: $\eta_1$ y $\eta_2$, respectivamente.

d) Dibújense las curvas características de operación (OC) (i.e., las curvas que representan $P_D$ en función de $P_{FA}$) correspondientes a los decisores DEC1 y DEC2, y discútase cómo cambia el punto de operación de cada clasificador al modificar el valor del umbral correspondiente.

e) A la luz de los resultados obtenidos, ¿puede concluirse que alguno de los dos decisores propuestos, DEC1 o DEC2, sea superior al otro?

---

(90 min; 2.5 p)