Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **28/01/05**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considere un problema de decisión binaria donde las observaciones de cada clase proceden de una distribución gaussiana bidimensional de media $\mathbf{m}_0$ y $\mathbf{m}_1$ y matrices de covarianza $\mathbf{V}_0=\mathbf{V}_1=v\mathbf{I}$, respectivamente.

Teniendo en cuenta que $P(H_0)=P(H_1)$ y que los costes asociados a cada decisión vienen dados por $C_{01}=C_{10}=1$, $C_{00}=C_{11}=0$:

1. Describa en términos cualitativos la frontera de decisión óptima.
2. Discuta, en términos cualitativos (y por separado) qué efecto tiene sobre la frontera
   a) Un aumento de la varianza de la clase 1.
   b) Un aumento de $P(H_1)$ respecto a $P(H_0)$.
   c) Un aumento del coste C_{01}.

(20 min; 1 p)

T2.- Sean s, x_1 y x_2 tres variables aleatorias de medias nulas. Se dispone de un estimador lineal de error cuadrático medio mínimo con la expresión:

$$\hat{s}_{lms} = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

Para mejorar la estima es posible añadir una nueva variable, escogida entre x_3 y x_4, que son variables aleatorias de media nula y tales que:

$$x_3: \begin{cases} E\{s x_3\} = 1 \\ E\{x_3^2\} = 1 \\ \text{ortogonal a } x_1 \text{ y } x_2 \end{cases} \qquad x_4: \begin{cases} E\{s x_4\} = 3 \\ E\{x_4^2\} = 1 \\ x_4 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

a) Justifique cuál de las dos nuevas variables incorporaría a la estima.
b) ¿Cómo será el nuevo estimador?
c) ¿Cuánto se reduce el error cuadrático?

(20 min; 1 p)

T3.- Las muestras correspondientes a un problema de decisión binaria son linealmente separables: lo que implica, según se sabe, que el entrenamiento de un decisor lineal mediante la Regla del Perceptrón converge en un número finito de pasos. ¿Tendría algún inconveniente la aplicación práctica de ese procedimiento?.

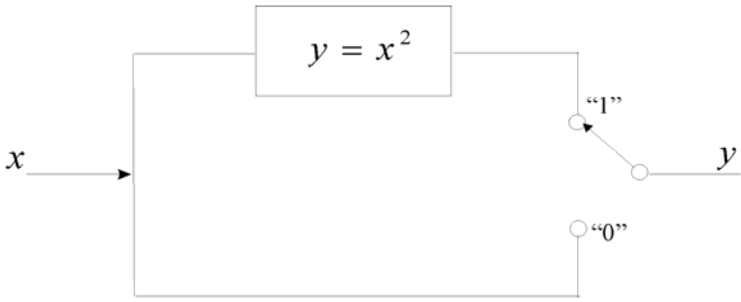
(20 min; 1p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

P1 .- El conmutador de la figura se encuentra en su posición superior (“1”) con probabilidad conocida P. La variable aleatoria x tiene una densidad de probabilidad uniforme $U(0,1)$.



La posición del conmutador no se puede observar, aunque sí el valor y presente a su salida. A partir de la observación de este valor, se pretende aplicar un decisor bayesiano para determinar cuál es la posición del conmutador: siendo la política de costes $C_{00} = C_{11} = 0$, $C_{10} = 2C_{01}$.

a) Formúlese el problema del modo habitual.
b) Determínese el correspondiente test, teniendo en cuenta los posibles valores de P.
c) Calcúlense P_{FA} y P_M.

(Sugerencia: para determinar $p(y)$, relaciónense las funciones de distribución de y y de x).

(60 min; 2.5 p)

P2. - Considere la variable aleatoria x dada por

$$x = bs$$

siendo b una variable aleatoria binaria con $Pr\{b=1\}=q_1$ y $Pr\{b=2\}=q_2=1-q_1$, y s una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza unidad.

Suponiendo que b y s son estadísticamente independientes:

a) Determine $p(x)$.
b) Determine el estimador MMSE de s a la vista de x.
c) Determine el estimador MAP de s a la vista de x.

(60 min; 2.5p)