TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 55 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese la minimización de cierta función C(**w**) de la forma

$$C(\mathbf{w}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$$

siendo **A** una matriz definida positiva (lo que garantiza que C(**w**) tiene un único mínimo global). Considere los siguientes procedimientos:

1. Algoritmo de gradiente conjugado
2. Algoritmo de descenso por gradiente
3. Método de Newton.

Indique cuál de las siguientes situaciones corresponde a cada caso y justifique muy brevemente su respuesta.

A. El algoritmo converge en un paso
B. El algoritmo converge en un número finito de pasos
C. El algoritmo converge en un número posiblemente infinito de pasos
D. El algoritmo puede divergir si su parámetro libre no se elige de manera adecuada
E. El algoritmo no converge al mínimo

(solamente una opción A-E es correcta para cada caso 1-3).

(15 min; 1p)

T2.- La intensidad que atraviesa la rama de un circuito viene caracterizada por la ecuación

$$i(t) = A\cos(w_o t)\,e^{-\alpha t} + B\,\mathrm{sen}(w_o t)\,e^{-\alpha t} + C$$

donde w_0 y α son dos constantes conocidas. Para la determinación de los parámetros del modelo, A, B y C, se dispone un conjunto de medidas de $i(t)$ para K instantes de tiempo, es decir, del conjunto de pares $\left\{t^{(k)}, i(t^{(k)})\right\}_{k=1}^{K}$. Proporciónense las expresiones que permiten obtener los parámetros A, B y C que minimizan el error cuadrático del modelo promediado sobre el conjunto de muestras disponibles.

(20 min; 1 p)

T3.- Se desea estimar la media de una v.a. x a partir de un conjunto de K observaciones independientes $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, para lo que se construye el siguiente estimador:

$$\hat{\mu} = \frac{a}{K}\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}$$

siendo a una constante a determinar.

a) Calcúlense el sesgo y la varianza del estimador en función del valor de a.

b) ¿Para qué valor de a se minimiza la varianza? ¿Existe algún valor de a para el que el estimador sea insesgado?

c) Obténgase el error cuadrático medio del estimador y el valor de a que lo minimiza.

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS
(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérese el problema de decisión binario dado por $P(H_1) = 2P(H_0)$ y verosimilitudes:

$$P(x \mid H_0) = 2(1-x), \qquad 0 \le x \le 1$$
$$P(x \mid H_1) = 2x - 1, \qquad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$$

a) Determínese el decisor de mínimo coste medio con $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{10} = 4\, c_{01}$.
b) Determínese el decisor de Neyman-Pearson dado por $P_{FA} = 0.04$.
c) Determínense, en función del parámetro α, las probabilidades de detección y falsa alarma de la familia de decisores de la forma

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \alpha$$

d) Represéntese gráficamente (de forma aproximada) la curva característica de operación (ROC), tomando α como parámetro libre, e indicando cómo varía el punto de trabajo del decisor en función de su valor.
e) Indíquese si los decisores de los apartados a) y b) se corresponden con algún punto de la ROC y, en su caso, indique con cuál(es).

(60 min; 2.5 p)

P2.- Para la estimación de una variable aleatoria s se dispone de las dos siguientes observaciones:

$$x_1 = s + n_1$$
$$x_2 = \alpha \cdot s + n_2$$

donde α es una constante conocida, y s, n_1 y n_2 son variables aleatorias gaussianas independientes, de media nula y varianzas v_s, v_n y v_n, respectivamente.

a) Calcúlense los estimadores de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x_1 y x_2, $\hat{s}_1$ y $\hat{s}_2$, respectivamente.
b) Calcúlese el error cuadrático medio de cada uno de los estimadores del apartado anterior. ¿Cuál de ellos propociona menor error cuadrático medio? Discuta su respuesta para los distintos valores que pueda tomar el parámetro α.
c) Determínese el estimador de mínimo error cuadrático medio de s a la vista del vector de observaciones $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\hat{s}_{mse}$.

(60 min; 2.5 p)