Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **05/06/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 55 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese el par de hipótesis equiprobables:

H_0: $x = n$

H_1: $x = n + a \cdot s$

donde n y s son variables aleatorias gaussianas independientes, con medias nulas y varianzas v_n y v_s, respectivamente, y a es una constante conocida.

a) Verifíquese que el test de mínima probabilidad de error tiene la forma

$$c_1 \exp\left(c_2 x^2\right) \gtrless \eta$$

y calcúlense las constantes c_1 y c_2, indicando el criterio de decisión asociado.

b) Determínense las regiones de decisión sobre x. Nótese que dichas regiones pueden expresarse en función de las constantes c_1 y c_2.

(15 min; 1p)

T2.- Sean las variables aleatorias s y x cuya densidad de probabilidad conjunta tiene la forma

$$p(x,s) = \left(\frac{1}{2} + 2xs\right), \qquad 0 \le x,s \le 1$$

Se desea estimar s a la vista de x mediante el estimador lineal $\hat{s} = wx$, siguiendo el criterio de mínimo coste medio, para un coste

$$C(s,\hat{s}) = (s - \hat{s})^2$$

a) Determínese una expresión para el coste medio en función de w.

b) Determínese la expresión de la regla de descenso por gradiente para minimización del coste medio.

c) Supóngase que p(x,s) es desconocido, pero se dispone de una colección de K realizaciones independientes, $\{x^{(k)},s^{(k)}\}$, que pueden utilizarse para aproximar el coste medio mediante un promedio. Determínese la regla de aprendizaje secuencial por gradiente para minimización de dicho coste promedio.

(25 min; 1 p)

T3.- Explíquese en qué consiste la regla del perceptrón, y discútanse sus ventajas e inconvenientes.

(15 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- La densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias x y z es

$$p(x,z) = x + z, \qquad 0 \leq x,z \leq 1$$

Considérese el problema de decisión basado en la observación de x (pero no de z) dado por las hipótesis:

H_0: z < 0'6

H_1: z > 0'6

a) Determínese p(z|x).

b) Obténganse las probabilidades a posteriori de ambas hipótesis.

c) Determínese el decisor MAP basado en x.

d) Calcúlese la probabilidad de falsa alarma del decisor MAP.

e) Aplicando el Teorema de Bayes, calcúlense $p(x|H_0)$ y $p(x|H_1)$.

f) Determínese el decisor ML basado en x.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Una variable aleatoria x sigue una distribución exponencial unilateral con parámetro $a > 0$:

$$p(x) = \frac{1}{a}\exp(-x/a), \quad x > 0$$

Como se sabe, la media y varianza de x están dadas por a y a^2, respectivamente.

a) Determínese el estimador de máxima verosimilitud de a, $\hat{a}_{ML}$, basado en un conjunto de K observaciones independientes de la variable aleatoria x, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

b) Se propone un nuevo estimador basado en el anterior y que obedece a la expresión:

$$\hat{a} = c \cdot \hat{a}_{ML},$$

donde $0 \le c \le 1$ es una constante que permite un reescalado del estimador ML. Obténganse el sesgo al cuadrado, la varianza y el error cuadrático medio (MSE) del nuevo estimador, y represéntense todos ellos en una misma figura en función del valor de c.

c) Determínese el valor de c que minimiza el MSE, c*, y discútase su evolución conforme el número de observaciones disponibles aumenta. Calcúlese el MSE del estimador asociado a c*.

d) Obténgase el intervalo de valores de c para los que el MSE de $\hat{a}$ es menor que el MSE del estimador ML, y explíquese cómo varía dicho intervalo cuando $K \to \infty$. Discútase el resultado obtenido.

(60 min; 2.5 p)