Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **05/09/06**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN
TEORÍA
(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese el problema de decisión dado por las hipótesis

$$H_0 : \underline{x} = \underline{m}_0 + \underline{n}_0$$
$$H_1 : \underline{x} = \underline{m}_1 + \underline{n}_1$$

siendo $\underline{m}_0$ y $\underline{m}_1$ conocidas y $\underline{n}_0$ y $\underline{n}_1$ vectores de ruido gaussiano con medias nulas y matrices de covarianzas V_0 y V_1 respectivamente. Discútase bajo qué condiciones se puede expresar el decisor óptimo en función de las distancias euclídeas de $\underline{x}$ a $\underline{m}_0$ y $\underline{x}$ a $\underline{m}_1$

(20 min; 1p)

T2.- Se desea estimar el valor de la v.a. s a partir de observaciones de las vv.aa. x_1 y x_2 y posiblemente x_3. Minimizando el error cuadrático medio, se obtienen los estimadores lineales:

$\hat{s}_A = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$ (empleando x_3)
$\hat{s}_B = w_1'x_1 + w_2'x_2$ (prescindiendo de x_3)

Sean $E_A=E[(s-\hat{s}_A)^2]$ y $E_B=E[(s-\hat{s}_B)^2]$. Con la información disponible, indique en cuáles de los siguientes supuestos puede afirmarse que se cumple $E_A=E_B$:

a) $x_3 = x_1+2x_2$

b) x_3 es independiente de s

c) $x_3 = x_1+r$, siendo r una v.a tal que $p(x_1,x_2,r,s)=p(x_1,x_2,s)p(r)$

d) $x_3 = x_1x_2$

(20 min; 1 p)

T3.- Discútase la validez del siguiente argumento:

"El estimador absolutamente eficiente $\hat{s}$ de un parámetro determinista s siempre existe, ya que de la condición

$$\frac{\partial \ln p(x|s)}{\partial s} = k(s)(\hat{s}-s)$$

se puede despejar

$$\hat{s} = s + \frac{1}{k(s)}\frac{\partial \ln p(x|s)}{\partial s}$$"

(20 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **05/09/06**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérense las hipótesis binarias

$H_0 : x = x_0$
$H_1 : x = x_1$

donde x_0 y x_1 son dos vv.aa. de las que se conoce su ddp conjunta $p(x_0, x_1)$, dada por

$$p(x_0, x_1) = \begin{cases} \alpha^2 x_0 x_1 \exp(-x_0 - \alpha x_1) \; ; & x_0 > 0 \text{ y } x_1 > 0 \\ 0 \; ; & \text{resto} \end{cases}$$

siendo $\alpha > 1$.

a) Calcúlense las verosimilitudes de cada una de las hipótesis, $p(x|H_0)$ y $p(x|H_1)$.

b) Diséñese el decisor ML, y analícese su comportamiento para los casos en que α es próximo a 1 y $\alpha >> 1$.

c) Considérese un valor de $\alpha = 2$, independientemente del valor obtenido en el apartado anterior, y calcúlese la probabilidad de error del decisor diseñado en b).

(60 min; 2.5 p)

P2.- Las vv.aa. s y x tienen una d.d.p. conjunta

$$p(s, x)=\begin{cases} a_f \ , & 0<s<f(x) \text{ y } 0<x<1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo a_f una constante.

Se desea estimar s a la vista de x mediante estimadores lineales de la forma

$$\hat{s}_i = w_i x \ , \qquad i=1,2$$

empleando funciones de coste $C_i(s, \hat{s}_i)$ que cumplen

$$\frac{\partial C_1(s,\hat{s}_1)}{\partial \hat{s}_1} = -(s-\hat{s}_1)$$
$$\frac{\partial C_2(s,\hat{s}_2)}{\partial \hat{s}_2} = -\hat{s}_2(s-\hat{s}_2)$$

a) Sea $f(x)= f_1(x)=x$

a1. Determínese a_{f1}
a2. Determínese los valores de los coeficientes $\{w_i\}_{i=1,2}$, que minimizan los costes medios correspondientes a las funciones de coste indicadas.

b) Sea $f(x)= f_2(x)=x^2$

b1. Determínese a_{f2}
b2. Determínese los valores de los coeficientes $\{w_i\}_{i=1,2}$, que minimizan los costes medios correspondientes a las funciones de coste indicadas.
b3. Discútase en qué se diferencia esta situación de la que se produce en el apartado a).

(75 min; 2.5 p)