Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **30/01/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se tiene un problema de clasificación binaria bidimensional definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p(x_1,x_2 \mid H_0) = G\left(\mathbf{0}, v_0\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$p(x_1,x_2 \mid H_1) = G\left(\mathbf{m}, v_1\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Represéntese en el plano x_1-x_2 la frontera de decisión que proporciona el decisor MAP cuando se satisfacen las siguientes condiciones: $Pr(H_0) = Pr(H_1)$, $v_0=v_1$ y $\rho=0$.

Indique cómo se modificaría la frontera anterior si:
a) Las probabilidades a priori fuesen $Pr(H_0) = 2\, Pr(H_1)$.
b) Se incrementase el valor de ρ.

(15 min; 1p)

T2.- Sabiendo que la f.d.p. conjunta de las vv.aa. x y s viene dada por

$$p(x,s) = \begin{cases} x+s & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le s \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Obténgase el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{LMS} = w_o + w_1 x$.

(30 min; 1p)

T3.- Explíquese en qué consiste el problema de sobreentramiento en un escenario de estimación o clasificación máquina, y discútase un procedimiento que permita evitar dicho inconveniente mediante la aplicación de algoritmos iterativos de búsqueda.

(15 min; 1p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **30/01/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 150 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- En un problema de clasificación binaria se sabe que las observaciones presentan distribuciones discretas de Bernoulli con parámetros p_0 y p_1 ($p_1 > p_0$):

$$P(x \mid H_0) = \begin{cases} p_0, & x = 1 \\ 1 - p_0, & x = 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \qquad P(x \mid H_1) = \begin{cases} p_1, & x = 1 \\ 1 - p_1, & x = 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Para la toma de la decisión se dispone de un conjunto de K observaciones independientes y tomadas bajo la misma hipótesis: $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$. Se define el siguiente estadístico de las observaciones: $t = \sum_{k=1}^{K} x^{(k)}$, i.e., la variable aleatoria t es igual al número de observaciones que son igual a la unidad.

a) Obténgase el decisor ML basado en el conjunto de observaciones $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$. Exprésese el resultado en función de la v.a. t.

b) Sabiendo que la media y la varianza de una distribución Bernoulli con parámetro p valen p y p(1-p), respectivamente, determínense las medias y varianzas del estadístico t bajo ambas hipótesis: m_0 y v_0 (para H_0) y m_1 y v_1 (para H_1).

Considérese para el resto del ejercicio $p_0 = 1 - p_1$.

Para K suficientemente grande, se decide aproximar la v.a. t mediante una distribución Gaussiana, tomando las medias y varianzas calculadas en el apartado anterior.

c) Calcúlense las P_{FA} y P_M del decisor de umbral

$$t \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta$$

en función del valor de η. Exprésese el resultado utilizando la función de error complementario.

d) Represéntese de forma aproximada la curva OC del decisor anterior, indicando:
- Cómo se desplaza el punto de trabajo al aumentar η.
- Cómo se modificaría la curva OC si creciese el número de observaciones disponibles (K).
- Cómo varía la curva OC si el valor de p_1 crece (manteniendo la condición $p_0 = 1 - p_1$).

Función error complementario: $\mathrm{erfc}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Se desea estimar el valor de la v.a. positiva s a partir de una observación aleatoria x, relacionada con s mediante

$$x = r / s$$

siendo r una v.a. independiente de s con distribución

$$p(r) = \exp(-r) \quad r > 0$$

a) Calcúlese la verosimilitud, p(x|s).
b) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de s a la vista de x, $\hat{s}_{ML}$.

Sabiendo que la f.d.p. de s es

$$p(s) = \exp(-s) \quad s > 0$$

calcúlense:

c) La distribución conjunta de s y x, p(s,x), y la distribución a posteriori de s, p(s|x).
d) El estimador de máximo a posteriori de s a la vista de x, $\hat{s}_{MAP}$.
e) El estimador de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{MSE}$.
f) El sesgo de los estimadores $\hat{s}_{MAP}$ y $\hat{s}_{MSE}$.

(90 min; 2.5 p)