Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **20/09/02**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Establezca las expresiones analíticas de los costes medios $\overline{C}(\hat{s})$ y $\overline{C}(\hat{s}|\mathbf{x})$ resultantes de aplicar el estimador $\hat{s}$ de una v.a. s, y justifique la coincidencia de los argumentos ($\hat{s}$) de sus valores máximos.

(20 min; 1 p)

T2.- Explique razonadamente qué implicacion tiene la restricción $\nabla_{\mathbf{w}}^{T}\left(\mathbf{w}^{(k+1)}\right)\mathbf{d}^{(k)} = 0$ en los algoritmos de Gradiente Conjugado.

(20 min; 1 p)

T3.- Considere el estimador de la media de una v.a. dado por el promedio de una colección de observaciones independientes. Comente la calidad de este estimador: ¿es siempre insesgado? ¿es consistente? ¿es siempre un estimador de máxima verosimilitud?

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 2h. Puntos: 5/8)

P1.- Se procede a estimar la v.a. s mediante una combinación lineal de las x_1, x_2 y x_3 (todas las vv.aa. se suponen de medias nulas) minimizando el error cuadrático medio. Se sabe que s tiene varianza v_s, y que todas las observaciones x_i tienen varianza unitaria, y que sus covarianzas valen

$$v_{x_1x_2} = \rho \quad (|\rho| < 1)$$
$$v_{x_1x_3} = 0$$
$$v_{x_2x_3} = 0$$

así como que las covarianzas de s con las observaciones son

$$v_{sx_1} = 1$$
$$v_{sx_2} = \frac{1}{2}$$
$$v_{sx_3} = 1$$

a) Indíquese la expresión del estimador lineal buscado.

b) Determínese el error cuadrático medio de la estimación.

c) ¿Cuánto aumenta el error cuadrático si se rediseña el estimador sin hacer uso de x_3?¿Y si se rediseña sin hacer uso de x_1? ¿A qué se debe la diferencia?

(60 min; 2.5 p)

P2.- La divergencia de Kullback-Leibler (KL) entre dos densidades de probabilidad p(x) y q(x) cualesquiera se define como

$$D(p,q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

Considere las densidades de probabilidad $p_0(x) = G(m_0,v_0)$, $p_1(x) = G(m_1,v_1)$ y $q(x) = G(m,v)$.

a) Determine $D(p_0,q)$.

b) Sea $p_2(x) = \lambda\, p_0(x) + (1-\lambda)\, p_1(x)$. Determine los valores de m y v que minimizan $D(p_2, q)$.

c) Establezca el algoritmo paso a paso de gradiente para estimación de máxima (log)-verosimilitud de los parámetros λ, m_0 y v_0 de $p_2(x)$ (puede omitir las reglas de estimación para m_1 y v_1) a partir de una colección de observaciones estadísticamente independientes $\{x^{(k)}, k=1,...,N\}$.

(60 min; 2.5 p)