Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **09/02/06**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 75 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se observa la va

$$x = s + r + i$$

siendo s una variable determinista de la que se sabe que $|s| < a$; r un ruido aditivo de ddp triangular

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(a - |r|\right), & |r| < a \\ 0, & |r| > a \end{cases}$$

$a > 0$; e i una interferencia impulsiva independiente de r con ddp

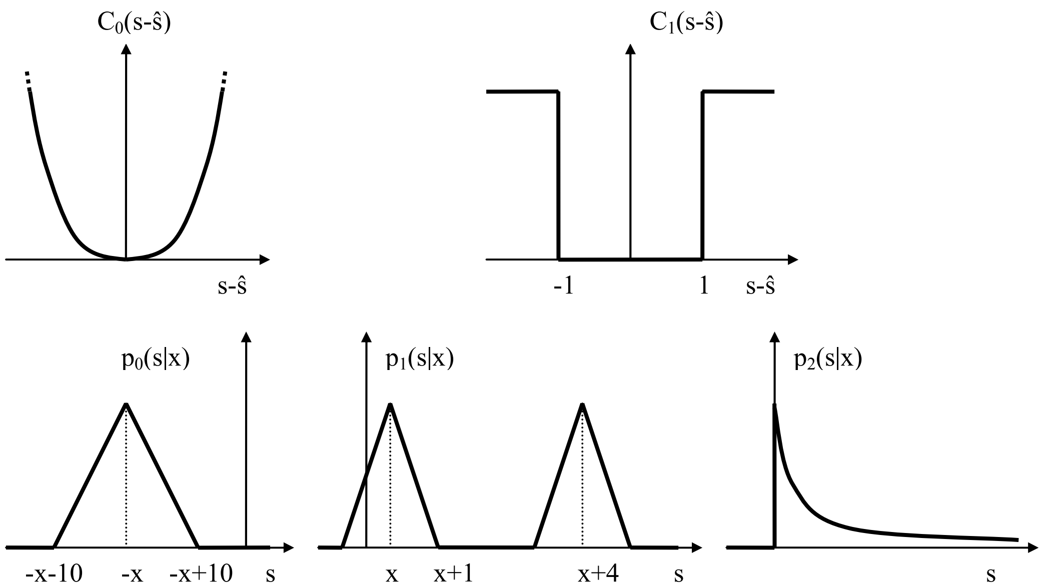
$$p(i) = P\,\delta(i - I) + (1 - P)\delta(i)$$

con $0 < P \ll 1$ (probabilidad de que aparezca la interferencia I en la observación x) e $I \gg a$.

Discútase cualitativamente el efecto de aplicar una estimación ML de s, obteniendo $\hat{s}_{ml}$, sin tener en cuenta la presencia de la interferencia impulsiva.

(25 min; 1p)

T2.- Considere los costes $C_0(s - \hat{s})$ y $C_1(s - \hat{s})$ representados en las figuras, así como las distribuciones $p_0(s|x)$, $p_1(s|x)$ y $p_2(s|x)$.



Sea $\hat{s}_{ij}$ el estimador que minimiza $E\{C_i\}$ para distribución $p_j(s|x)$. ¿En qué casos (i,j) se puede afirmar el cumplimiento de la igualdad $\hat{s}_{ij} = \hat{s}_{ms}$?

(25 min; 1 p)

T3.- Se desea encontrar la frontera de clasificación que divide el conjunto de datos $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ en las clases +1 y -1. Para ello, a partir de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ y sus correspondientes etiquetas $\{d^{(k)}\}$ (de valores ±1, según pertenezca el dato a la clase +1 ó -1), se entrena una red neuronal mediante un algoritmo de descenso por gradiente secuencial que minimiza la siguiente función de coste,

$$\overline{C}(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{K} \exp\left(\alpha \;\; f(\mathbf{x}^{(k)})\, d^{(k)}\right)$$

siendo $f(\mathbf{x})$ la salida de la red neuronal.

a) Represente el coste para la muestra k-ésima, $C^{(k)}(\mathbf{w})$, respecto a $f(\mathbf{x}^{(k)})d^{(k)}$ para distintos valores de α, e indique el rango de valores de α para los que $\overline{C}(\mathbf{w})$ es una cota del error de clasificación

$$E_{clasif} = \sum_{k=1}^{K} \left(\text{sign}(f(\mathbf{x}^{(k)})) \neq d^{(k)}\right)$$

b) Derive la regla de actualización de pesos $\mathbf{w}$ de la red neuronal cuando

b.1) $f(\mathbf{x})=\mathbf{w}^T\mathbf{x}$

b.2) $f(\mathbf{x})=\tanh(\mathbf{w}^T\mathbf{x})$, siendo $\tanh(z)=\dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

(25 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérese el problema de decisión binaria descrito por

$$p(x|H_0) = \begin{cases} K_0\left(\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} K_1\left(\frac{1}{4} - \left|x - \frac{1}{4}\right|\right) & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \alpha K_1\left(\frac{1}{4} - \left|x - \frac{3}{4}\right|\right) & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

siendo K_0, K_1, $\alpha > 0$.

a) Calcule los valores de las constantes K_0 y K_1, e indique como influye el valor de α en $p(x|H_1)$.
b) Diseñe el decisor ML, indicando según los valores de α las distintas versiones analíticas que resultan para el decisor.
c) Considerando que se ha diseñado el decisor para $\alpha = 1$, cuando su valor real es $1/2$, calcule la probabilidad de error que se obtendrá de la aplicación de ese decisor.
d) Diseñe un nuevo decisor, aplicando el criterio de Neyman-Pearson, para fijar la probabilidad de falsa alarma a 0.25 cuando $\alpha = 1$.

(60 min; 2.5 p)

P2.- El parámetro determinista $s > 0$ es observado a través de

$$x = \sqrt{s}\ r$$

donde r es un ruido multiplicativo $G(0,\ v)$.

Se realizan K observaciones independientes de x, $\{x^{(k)}\}$.

a) Determínese el estimador de máxima verosimilitud $\hat{s}_{ml}$.

b) Calcúlese el sesgo y la varianza de $\hat{s}_{ml}$.

c) ¿Como habría que proceder si la media de r fuese un valor m conocido distinto de 0?.

(60 min; 2.5p)