# TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

**T1.-** La v.a. unidimensional x se distribuye de forma gaussiana con media $m_i$ y varianza $v_i$ bajo la hipótesis $H_i$, i = 0, 1. Discútase si siempre es posible resolver el correspondiente problema de decisión binaria mediante un test de umbral aplicado sobre x:

$$x \underset{D_{\bar{i}}}{\overset{D_i}{\gtrless}} T$$

(20 min; 1p)

**T2.-** Una v.a. s toma valores positivos. Para estimarla por vía bayesiana, se aplica una función de coste de la forma

$$C(s,\hat{s}) = a\,|s-\hat{s}|^k, \quad k > 0$$

¿Qué condiciones han de cumplir a y k para que $\hat{s} = \hat{s}_{ms}$ ?

(20 min; 1 p)

**T3.-** Considere la siguiente función no lineal:

$$f_\alpha(z) = \text{sign}(z)\,|z|^\alpha; \quad \alpha > 0$$

a) Dibuje $f_\alpha(z)$ para 3 valores de $\alpha$ que den lugar a 3 curvas cualitativamente distintas.

b) Obtenga la expresión del algoritmo secuencial de gradiente para actualizar los parámetros **w** y $\alpha$ del siguiente modelo, a fin de minimizar el error cuadrático medio:

$$y[n] = f_\alpha(\mathbf{w}^T\mathbf{x}[n])$$

(20 min; 1 p)

# TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considere la v.a. x dada por

$$x = s\,t$$

siendo s y t v.a. independientes y uniformes entre 0 y 1

1. Determine p(x)
2. Determine el estimador MMSE de s a la vista de x, $\hat{s}_{ms}$
3. Determine el estimador MAP de s a la vista de x, $\hat{s}_{map}$
4. Determine el sesgo del estimador MAP.

---

(70 min; 2.5 p)

P2.- Se dispone de un conjunto de pares $\left\{x^{(k)}, s^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$ para diseñar la curva de regresión de s sobre x, conforme al modelo:

$$\hat{s} = \sum_{i \in I} w_i \exp\left( - \frac{\left(x - x^{(i)}\right)^2}{2v} \right)$$

siendo I un subconjunto de {1, 2, ..., K} y v una constante dada.

1.- Calcule los pesos $w_i$ que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos, i.e., $C = \|\mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{K}\left(s^{(k)} - \hat{s}^{(k)}\right)^2$, para

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{(k)}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| $s^{(k)}$ | -0.01 | 0.9 | 0.35 | -0.85 | -0.76 | 0 |

utilizando I = {2, 5} y v = 0.005. Represente gráficamente (de forma aproximada) la curva de regresión resultante.

2.- Para I = {1, 2, ..., K}, obtenga el vector de pesos $\mathbf{w} = [w_1, w_2, ..., w_K]^T$ que minimiza la siguiente función de coste suavizada:

$$C' = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \delta\|\mathbf{w}\|_2^2, \quad \delta > 0$$

Analice el efecto del parámetro δ, considerando para ello la solución en los casos extremos: $\delta = 0$ y $\delta \to \infty$.

---

(65 min; 2.5p)