Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **19/09/07**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN
TEORÍA
(Tiempo: 80 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se desea estimar un vector aleatorio **s** a partir de un vector de observaciones **x** relacionado con él:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\,\mathbf{s} + \mathbf{r}$$

donde **H** es una matriz conocida, **r** es un vector de ruido con distribución $G(\mathbf{0}, v_r\mathbf{I})$, y **s** es el vector aleatorio a estimar, cuya distribución es $G(E\{\mathbf{s}\}, \mathbf{V}_s)$.

Sabiendo que **s** y **r** son vectores aleatorios independientes:

a) Calcúlese el estimador ML de **s**, $\hat{\mathbf{s}}_{ml}$.

b) Determínese si dicho estimador es sesgado o no. Justifique su respuesta.

c) Según se sabe, el estimador MSE de **s** viene dado por la expresión:

$$\hat{\mathbf{s}}_{mse} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + v_r\,\mathbf{V}_s^{-1})^{-1}\,\mathbf{H}^T\,\mathbf{x}$$

Calcúlese el sesgo de $\hat{\mathbf{s}}_{mse}$ e indíquese en qué condiciones dicho sesgo tiende a 0.

(25 min; 1p)

T2.- Se pretende ajustar el modelo de regresión:

$$\hat{s}(x) \quad = \quad a_0 + \sum_{m=1}^{M}\left\{a_m \operatorname{sen}\frac{2\pi m x}{M} + b_m \cos\frac{2\pi m x}{M}\right\}$$

Para el ajuste de a_0, $\{a_m\}$ y $\{b_m\}$ se dispone de un conjunto de entrenamiento $\left\{x^{(k)}, s^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$. Obténgase la expresión que permite determinar los coeficientes $a_0, \{a_m, b_m\}$, $m=1,\ldots,M$, que minimizan el error cuadrático medio de dicha regresión (medido sobre el conjunto de entrenamiento).

(25 min; 1 p)

T3.- Se dispone de K muestras, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, tomadas independientemente, de una v.a. x cuya d.d.p. viene dada por

$$p_X(x)=\frac{1}{bx^2}\exp\left(-\frac{1}{bx}\right)u(x)$$

con b>0.

a) Determínese $\hat{b}_{ml}$ en función de dichas muestras.

b) Verifíquese que la v.a. y=1/x sigue una d.d.p. $p_Y(y)$ de tipo exponencial unilateral, y establézcase el valor de la media de dicha distribución.

c) Considerando todo lo que antecede, ¿es $\hat{b}_{ml}$ un estimador insesgado?

(25 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p(x_1,x_2 \mid H_i)=a_i^2 \exp\left[-a_i(x_1+x_2)\right]u(x_1)u(x_2) \quad i=0,1$$

donde $a_0=1$ y $a_1=2$.

a) Diséñese el decisor MAP correspondiente en función del parámetro $R=\dfrac{\Pr(H_1)}{\Pr(H_0)}$.

b) Compruébese que $t=x_1+x_2$ es un estadístico suficiente y calcúlense las verosimilitudes de dicho estadístico, $p(t|H_i)$, $i=0,1$.

c) Calcúlense las probabilidades de falsa alarma, de pérdida y de error del decisor diseñado en a).

d) Tras haber diseñado el decisor, se sabe que el coeficiente real de probabilidades a priori es $2R$. Sin modificar el decisor diseñado, calcúlese su verdadera probabilidad de error, comparándola con el resultado obtenido en el apartado anterior.

(60 min; 2.5 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **19/09/07**
UCIIIM

P2.- Considérese la familia de funciones de coste dadas por

$$C_N(s,\hat{s}) = \frac{1}{N+1}\hat{s}^{N+1} - \frac{1}{N}s\hat{s}^N$$

siendo N un número entero no negativo e impar.

a) Analícese el cumplimiento del principio de invarianza para dicha familia de funciones de coste y distribución conjunta de s y x arbitraria (x es la variable observable).

b) Suponiendo que

$$p(s,x) = \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right)u(s)u(x), \;\; \lambda > 0$$

determínese el estimador de mínimo coste medio.

c) Determínese el mínimo coste medio.

d) Determínese el coeficiente w que minimiza el coste medio del estimador de la forma

$$\hat{s} = wx^m$$

siendo m un entero positivo.

e) Obsérvese la dependencia de w con N. ¿Contradice el principio de invarianza?

Indicación: $\int_0^\infty x^N \exp(-x)\,dx = N!$

(75 min; 2.5 p)