TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 70 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Un problema de decisión ternario unidimensional de hipótesis equiprobables está definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p(x \mid H_0) = 2\left(1 - 2\left|x - \tfrac{1}{2}\right|\right), \qquad 0<x<1$$
$$p(x \mid H_1) = 1, \qquad 0<x<1$$
$$p(x \mid H_2) = 2x, \qquad 0<x<1$$

a) Determínese el decisor de mínima probabilidad de error.

b) Discútase si es equivalente el decisor anterior al constituido por un primer decisor de mínima probabilidad de error que decide entre H_0 y $H_1 \bigcup H_2$, y, tras ello, si se acepta $H_1 \bigcup H_2$, un segundo decisor de mínima probabilidad de error para decidir entre H_1 y H_2.

(25 min; 1p)

T2.- Se desea aproximar la función $f(x)=2^x$ en el intervalo [0,3] mediante polinomios sencillos, utilizando técnicas de regresión. Para ello, se toman los puntos $x^{(k)}=k-1$, con $1 \le k \le 4$, y se diseña una curva de regresión $y=g(x)$, donde $g(x)$ es un polinomio, siguiendo el criterio de minimizar el error cuadrático dado por

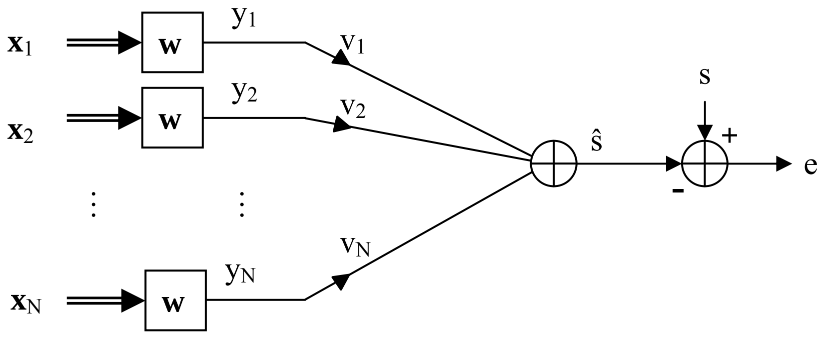
$$E = \sum_{k=1}^{4}\left[g\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k)}\right)\right]^2$$

a) Suponiendo $g(x)=w_0+w_1x+w_2x^2$, determínese la ecuación matricial que debe verificar el vector de coeficientes $\mathbf{w} = [w_0,w_1,w_2]^T$ de mínimo error.

b) Suponiendo $g(x)=vx^2$, determínese el coeficiente v.

(20 min; 1 p)

T3.- La siguiente figura representa un sistema para la estimación de una variable aleatoria s a partir de un conjunto de vectores de observaciones, $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N$:



de forma que $\hat{s} = \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i\right)$.

Exprésense las reglas secuenciales de descenso por gradiente que permiten obtener los vectores de parámetros $\mathbf{v} = [v_1,\ldots,v_N]^T$ y $\mathbf{w}$ que minimizan el error cuadrático medio del estimador, a partir de un conjunto de entrenamiento $\{\mathbf{x}_1^{(k)},\ldots,\mathbf{x}_N^{(k)}, s^{(k)}\}$.

(25 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 150 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Las verosimilitudes

$$p(\mathbf{x} \mid H_0) = G(\mathbf{x} \mid \mathbf{0}, v\mathbf{I})$$
$$p(\mathbf{x} \mid H_1) = G(\mathbf{x} \mid \mathbf{m}, v\mathbf{I})$$

donde **0** y **m** son vectores N-dimensionales de componentes 0 y $\{m_n\}$, respectivamente, e **I** la matriz unitaria N×N, corresponden a las observaciones **x** (N-dimensionales) en un problema de decisión binaria (gaussiano).

a) Diséñese el decisor ML.

b) ¿Cuánto y en qué sentido habría que trasladar el umbral del decisor anterior si $\Pr(H_0)=1/4$ y se desease diseñar un decisor de mínima probabilidad de error?

c) Calcúlense P_{FA} y P_M para el decisor ML. ¿Qué ocurre si crece el número de dimensiones y $\{m_n\} \neq 0$?

d) Si en la práctica se tiene acceso a

$$z=\mathbf{m}^T\mathbf{x}+n$$

donde n es $G(n|m',v_n)$ e independiente de **x**, en lugar de a las observaciones **x**, ¿cómo ha de modificarse el diseño del decisor ML?

e) Calcúlense P'_{FA} y P'_M para el diseño del apartado d). ¿Cómo varían respecto a P_{FA} y P_M?

Nota: Utilícese, cuando convenga, la función de error complementario dada por la expresión:

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

(75 min; 2.5 p)

P2.- Se desea estimar la va s a partir de la va x, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p(x,s) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le s \quad 0 \le s \le 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese el estimador de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{MSE}$.

b) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud de s dado x, $\hat{s}_{ML}$.

c) Establézcanse las ddps de ambos estimadores, $p(\hat{s}_{MSE})$ y $p(\hat{s}_{ML})$, y represéntense gráficamente ambas.

d) Calcúlense la media y la varianza del error de ambos estimadores.

(75 min; 2.5 p)