**Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones** **05/06/08**
**UCIIIM**

# TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

## TEORÍA
(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

**T1.-** En un problema de decisión M-aria bidimensional con observaciones $\underline{x}=[x_1\ x_2]^T$, se comprueba que $p(x_1|x_2,H_j)$ no depende de j. Se desea diseñar un decisor ML, aunque se sabe que las probabilidades a priori, $\{Pr(H_j)\}_{j=1,\ldots M}$, son diferentes. Discútase cuál de los siguientes diseños es válido:

a) $j^*=\arg\max_j\left\{p(x_1|H_j)\right\}$

b) $j^*=\arg\max_j\left\{p(x_2|H_j)\right\}$

c) $j^*=\arg\max_j\left\{p(x_2,H_j)\right\}$

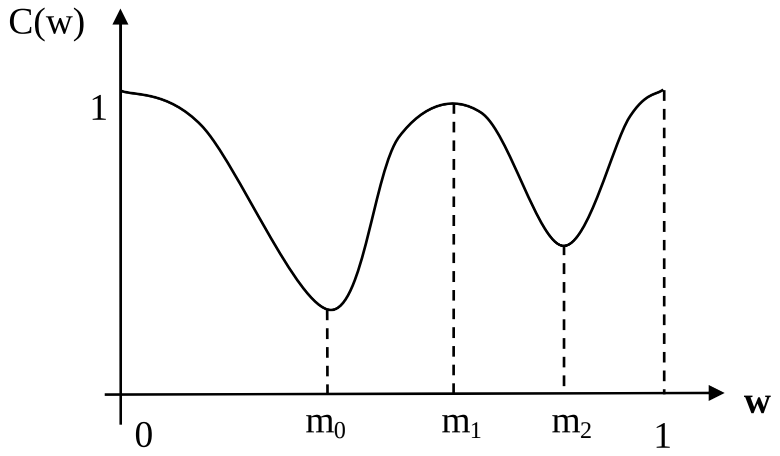
---

(15 min; 1p)

**T2.-** Se desea encontrar el mínimo de la función de coste de la figura. Suponga que, fuera del intervalo [0,1], C(w) es constante e igual a 1.

a) Suponiendo que se aplica búsqueda por gradiente con un valor del paso de adaptación suficientemente pequeño para garantizar la convergencia en el intervalo [0, 1], y que se elige el punto de inicio aleatoriamente, con distribución uniforme entre 0 y 1, determine una expresión para la probabilidad de convergencia al mínimo global ($m_0$).

b) Suponga que se repite la búsqueda por gradiente varias veces, eligiendo un punto de inicio diferente (y también de forma aleatoria U[0,1]) en cada ocasión. Finalmente, se elige, de entre todos los mínimos obtenidos, el que proporciona el menor valor de C(w). Determine una expresión para el número de repeticiones que se necesitan para garantizar que se encuentra el mínimo global con una probabilidad mayor que 0.99.




---

(20 min; 1 p)

**T3.-** La d.d.p. conjunta de dos variables aleatorias s y x es:

$$p(s,x)=\begin{cases} 6s & 0<s<x, \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

obténgase:

a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{MSE}$ .

b) El sesgo de dicho estimador.

---

(20 min; 1 p)

# TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

## PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

**P1.-** Se conocen las d.d.p. de tres variables aleatorias independientes:

$$p(x_1)=\begin{cases}1 & , 0<x_1<1\\ 0 & , \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$p(x_2)=2\exp(-2x_2) \qquad x_2>0$$

$$p(x_3)=2\exp\left[2(x_3-1)\right] \qquad x_3<1$$

Considerando las hipótesis:

$H_1$: $x=x_1$
$H_2$: $x=x_2$
$H_3$: $x=x_3$

obténgase:

a) el decisor bayesiano que minimiza el coste medio global cuando las tres hipótesis son equiprobables y la política de costes es $C_{ii}=0$, $i=1, 2, 3$ y $C_{ij}=C$ $\forall i,j$ con $i\neq j$.
b) las probabilidades de decidir $D_i$ dada la hipótesis $H_i$, i.e., $Pr(D_i|H_i)$ para $i=1, 2, 3$.

Considerando ahora el problema de decisión binaria dado por:

$H_1$: $x=x_1$

$H_2$: $x=x_2+x_3$

obténgase:

c) el correspondiente decisor ML.
d) las probabilidades de falsa alarma, $Pr(D_1|H_0)$, y de pérdidas, $Pr(D_0|H_1)$.

---

(60 min; 2.5 p)

**Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones** **05/06/08**
**UCIIIM**

**P2.-** La d.d.p. conjunta de las vv.aa. s y x, sigue la forma:

$$p(s,x)=\alpha, \quad -1<x<1, \quad 0<s<|x|$$

a) Determínese la d.d.p. de la v.a. x, $p_x(x)$, especificando el valor de α.

b) Establézcanse las expresiones de los estimadores de s en función de x que minimizan los costes cuadrático $\left(\overline{C}_{ms}=E\left\{\left(s-\hat{s}\right)^2\right\}\right)$ y absolutos $\left(\overline{C}_{ab}=E\left\{|s-\hat{s}|\right\}\right)$ medios, $\hat{s}_{ms}$ y $\hat{s}_{ab}$, respectivamente.

c) Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en x, establézcanse las expresiones de los estimadores $\hat{s}_{qms}=w_1x^2$ y $\hat{s}_{qab}=w_2x^2$ que minimizan los costes antes mencionados (cuadrático y absoluto medios, respectivamente).

---

(75 min; 2.5 p)