Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **14/09/05**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se desea estimar una v.a. s a partir de otra x, siendo la relación entre ambas:

$$x = s + n_1 + n_2$$

con $s : G(0, v_s)$ y $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} : G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$, y siendo n_1 y n_2 independientes de la variable que se desea estimar.

a) Determine el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x.

b) ¿Existe un estimador no lineal que supere en prestaciones al anterior? (Razone su respuesta)

(20 min; 1p)

T2.- Se desea estimar una v.a. s mediante una combinación convexa de estimadores lineales:

$$\hat{s} = \lambda \hat{s}_1 + (1-\lambda)\hat{s}_2$$

siendo $\hat{s}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$, y λ un parámetro de mezcla comprendido entre 0 y 1, y relacionado biunívocamente con una variable a de tipo real mediante:

$$\lambda = \text{sgm}(a) = \frac{1}{1 + \exp(-a)}$$

a) Obtenga la regla secuencial de gradiente para la actualización muestra a muestra de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, si ambos vectores se modifican con el objetivo de minimizar los costes $C_1 = (s - \hat{s}_1)^2$ y $C_2 = |s - \hat{s}_2|$, respectivamente.

b) Obtenga la regla secuencial de gradiente para el parámetro a, considerando que dicha variable se actualiza con el objetivo de minimizar $C = (s - \hat{s})^2$.

(20 min; 1 p)

T3.- Las muestras correspondientes a un problema de decisión binaria son linealmente separables, lo que implica, según se sabe, que el entrenamiento de un decisor lineal mediante la regla del perceptrón converge en un número finito de pasos. ¿Tendría algún inconveniente la aplicación práctica de ese procedimiento?

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considere el problema de decisión binaria dado por hipótesis equiprobables, siendo

$$P(x \mid H_0) = (n_0 + 1)(1 - x)^{n_0} \qquad 0 \le x \le 1$$
$$P(x \mid H_1) = (n_1 + 1)x^{n_1} \qquad 0 \le x \le 1$$

siendo n_0 y n_1 números enteros no negativos. Considere los costes $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{01} = 1$, $c_{10} = c > 0$.

1. Observando la forma de las verosimilitudes de las hipótesis, demuestre que el decisor óptimo (de mínimo coste medio) tiene la forma

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta$$

para algún valor de η.

2. Determine la relación entre el umbral η y el coste c para el caso $n_0 = n_1 = n$

3. Determine la curva característica de operación (P_D vs. P_{FA}) como función del parámetro c, también para el caso para el caso $n_0 = n_1 = n$, y represente gráficamente, de forma aproximada, los casos n=1 y n=2. Discuta la influencia del parámetro n.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Considere una v.a. x con distribución de probabilidad dada por:

$$p(x\,|\,R) = \frac{2x}{R}\exp\left(-\frac{x^2}{R}\right)u(x), \quad R > 0$$

de la que se hacen K observaciones independientes, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

a) Determine el estimador de máxima verosimilitud de R, $\hat{R}_{ML}$.

Para el estimador obtenido en a):

b) Determine su sesgo

c) Discuta su consistencia.

(75 min; 2.5 p)