Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **27/06/07**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA

(Tiempo: 80 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- La densidad de probabilidad tipo Erlang de orden N viene dada por la expresión

$$p(x) = \frac{a^N x^{N-1} \exp(-ax)}{(N-1)!} \qquad x > 0 \quad y \quad a > 0$$

Supóngase que N es conocida. Considerando que la media viene dada por m = N/a, determínense:

a) El estimador ML de su media, $\hat{m}_{ML}$, a partir de K observaciones independientes de la variable .

b) El sesgo de $\hat{m}_{ML}$.

c) ¿Es $\hat{m}_{ML}$ un estimador consistente en varianza?

(20 min; 1p)

T2.- Considérese el problema bidimensional binario Gaussiano

$$H_0: \mathbf{x} \text{ es } G\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$H_1: \mathbf{x} \text{ es } G\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

Las probabilidades de las hipótesis son Pr (H_0) = 2/3 y Pr (H_1) = 1/3, y los costes asociados son C_{00}= C_{11}=0, C_{01}= C_{10}= 1.

a) Establézcase la expresión que proporciona el correspondiente decisor Bayesiano en función del vector de observaciones $\mathbf{x}$.

b) Represéntese en un dibujo cómo se desplaza la frontera de decisión si se varía el valor de Pr(H_0).

(30 min; 1 p)

T3.- Considérese el algoritmo regularizado de Newton caracterizado por la siguiente regla de actualización:

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \left[\varepsilon\mathbf{I} + \mathbf{H}_w\left(\mathbf{w}^{(k)}\right)\right]^{-1}\mathbf{g}_w\left(\mathbf{w}^{(k)}\right) \qquad (1)$$

Análogamente al caso del algoritmo secuencial de gradiente, es posible definir un algoritmo secuencial de Newton, cuya formulación se obtiene de sustituir en (1) aproximaciones del Hessiano y del gradiente, $\mathbf{H}_\mathbf{w}(w^{(k)})$ y $\mathbf{g}_\mathbf{w}(w^{(k)})$ respectivamente, calculadas únicamente a partir de la muestra k-ésima del conjunto de entrenamiento. Para una red que implementa su salida como $y^{(k)} = w_0 + \mathbf{w}^T\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{w}_e^T\mathbf{x}_e^{(k)}$, y suponiendo coste cuadrático:

a) Demuéstrese que la regla de actualización del algoritmo secuencial de Newton es:

$$\mathbf{w}_e^{(k+1)} = \mathbf{w}_e^{(k)} + (d^{(k)} - y^{(k)})\left(\varepsilon\mathbf{I} + \mathbf{x}_e^{(k)}\mathbf{x}_e^{(k)T}\right)^{-1}\mathbf{x}_e^{(k)} \qquad (2)$$

b) Aplicando el siguiente lema de inversión (identidad de Woodbury):

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{c}\mathbf{c}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}}$$

siendo **c** un vector columna y **A** una matriz de dimensiones adecuadas, muéstrese que dicha regla de actualización es equivalente al algoritmo NLMS.

c) ¿Qué ventajas de índole práctica ofrece el algoritmo NLMS frente al empleo directo de la expresión (2)? ¿Y frente al LMS sin normalización?

(30 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **27/06/07**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN
PROBLEMAS

(Tiempo: 150 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Un analista construye un estimador lineal de una v.a. s en función de otra observable x a partir de un conjunto de datos etiquetados $\{s^{(k)}, x^{(k)}\}$, recurriendo a sustituir en la formulación correspondiente al estimador de mínimo error cuadrático medio los estadísticos reales ($E\{s\}, E\{x\}, v_{xx}, v_{sx}, v_{ss}$) por sus estimaciones muestrales ($\overline{s}, \overline{x}, \overline{v}_{xx}, \overline{v}_{sx}, \overline{v}_{ss}$, respectivamente), que se consideran constantes. El analista no sabe que el par (s,x) sigue una distribución $G\left\{\mathbf{0}, \begin{bmatrix} v & \rho v \\ \rho v & v \end{bmatrix}\right\}$.

a) Establézcase el estimador que calcula el analista, $\hat{s}_a(x)$, y compárese su error cuadrático medio teórico (que es el que resultará de su repetida aplicación a nuevas observaciones) con el que proporcionaría el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo (estimador óptimo teórico), $\hat{s}_t(x)$.

b) En un momento posterior el analista percibe, por consideraciones físicas, que s y x tienen medias nulas; y diseña un nuevo estimador, $\hat{s}'_a(x)$, con los valores anteriores de las covarianzas muestrales y medias nulas. ¿En qué difiere $\hat{s}'_a(x)$ de $\hat{s}_a(x)$?

c) Calcúlese la ventaja (reducción de error cuadrático medio) que proporciona $\hat{s}'_a(x)$ sobre $\hat{s}_a(x)$.

d) ¿Podría el analista percibir la ventaja calculada en el apartado c) si sustituyese en las expresiones de los errores cuadráticos medios los estadísticos reales por sus valores estimados?

(75 min; 2.5 p)

P2.- Considérese un escenario de decisión radar en el que se sabe que los blancos que se desea detectar pueden causar ecos con dos niveles diferentes de intensidad:

$$
\begin{aligned}
&H_0 \text{ (no hay blanco)}: \; x = n \\
&H_1 \text{ (hay blanco)}: \; \begin{Bmatrix} H_{11}: \; x = s_1 + n \\ H_{12}: \; x = s_2 + n \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

donde los valores reales s_1 y s_2 son los dos niveles de eco conocidos para cada tipo de blanco, y n es una v.a. con distribución G(0,1). Se sabe, además, que $\Pr(H_{11}|H_1) = P$ y $\Pr(H_{12}|H_1) = 1-P$ $(0<P<1)$.

a) Establézcase la forma general del test de razón de verosimilitudes que permite discriminar H_0 frente a H_1, y justifíquese que si los signos de s_1 y s_2 coinciden, dicho detector es un detector de un único umbral.

b) ¿Existen combinaciones de valores de s_1 y s_2 para los que un test de máxima verosimilitud decida siempre la misma hipótesis?

c) Asumiendo $s_2 < s_1 < 0$ y el siguiente detector de umbral:

$$x \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} \eta$$

determínense P_{FA} y P_D en función de η. Represéntese de forma aproximada la curva ROC (P_D vs P_{FA} en función de η) del detector, situando sobre la misma los puntos correspondientes a $\eta \to \pm\infty$, e indicando cómo varía el punto de trabajo en función del umbral.

d) Explíquese qué efectos tendrían sobre la ROC:

- aumentar s_1
- disminuir s_2
- aumentar P
- aumentar $\Pr(H_0)$

(75 min; 2.5 p)