Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **30/06/03**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

TEORÍA
(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Demuéstrese que la solución MAP de un problema de decisión *M*-ario proporciona una probabilidad de error P_e tal que:

$$P_e \leq 1 - \frac{1}{M}$$

trabajando con la probabilidad de decisión correcta P_c.
Indíquese en qué condiciones se alcanza la cota.

(20 min; 1p)

T2.- Determínese el estimador $\hat{s}_C$ que corresponde a la aplicación del coste de Hopfield-Hinton

$$C_{HH}(s,\hat{s}) = -s\ln\hat{s} - (1-s)\ln(1-\hat{s}), \quad \text{si } s \text{ y } \hat{s} \in (0,1)$$

para estimar una variable aleatoria s a partir de la observación de otra x cuando la función densidad de probabilidad conjunta $p(s,x)$ viene dada por:

$$p(s,x) = \begin{cases} c\left(s^2 + \dfrac{sx}{2}\right), & \begin{matrix} 0 < s < 1 \\ 0 < x < 2 \end{matrix} \\ \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

donde c es una constante positiva.
¿Qué diferencia observa respecto al estimador cuadrático?

(20 min; 1 p)

T3.- Se dispone de $2K$ observaciones independientes de una variable aleatoria unidimensional x con media m y varianza *v*. Para estimar el valor de la media se propone el siguiente estimador:

$$\hat{m} = \frac{\lambda}{2K}\sum_{i=1}^{K} x_i + \frac{(1-\lambda)}{2K}\sum_{i=K+1}^{2K} x_i, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Determine el valor de λ que conduce al estimador $\hat{m}$ de mínima varianza. Comente el resultado.

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE LA INFORMACIÓN

PROBLEMAS

(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

No escriba en las zonas con recuadro grueso

Apellidos	Nº	
Nombre	1	
Nº de matrícula .... Grupo	2	
Firma:		

P1.- Considérese el problema de decisión binaria gaussiano bidimensional

$$H_0: \ \mathbf{x} \text{ es } G\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$H_1: \ \mathbf{x} \text{ es } G\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}v & 0\\0 & v\end{bmatrix}\right), \quad v > 1$$

a) Establézcase el decisor ML en función del estadístico suficiente $z = x_1^2 + x_2^2$.
b) Determínense las verosimilitudes de z a través del cálculo de las correspondientes funciones de distribución, $P(z \mid H_i) = \Pr\{x_1^2 + x_2^2 < z \mid H_i\}$.
c) Calcúlense P_{FA} y P_M.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Dada una variable aleatoria x que sigue una distribución exponencial con parámetro $a > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & , x > 0 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

a) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de la media ($\hat{m}_{ML}$) y de la varianza ($\hat{v}_{ML}$), si se dispone de K observaciones independientes e idénticamente distribuidas de x, $\{x_k\}$.

b) Compruebe si el estimador $\hat{v}_{ML}$ es o no insesgado sabiendo que $E(x_k) = m$ y $Var(x_k) = v$.

c) Si ahora se dispone de K_1 observaciones independientes pero no idénticamente distribuidas de otra variable aleatoria $y, \{y_k\}$,con función densidad de probabilidad

$$p(y_k) = \begin{cases} \frac{b}{k} e^{-b\frac{y_k}{k}} & , y_k \geq 0 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

donde *k* indica el orden de observación (es decir, *k=1* para y_1, *k=2* para y_2, ...), encuentre el estimador $\hat{b}_{ML}$ de máxima verosimilitud.

NOTA: Fórmula multinomial:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_K)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_K!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_K^{n_K}$$

donde la suma comprende todos los enteros no negativos $n_1, n_2, ..., n_K$ para los cuales $n_1 + n_2 + ... + n_K = n$

(60 min; 2.5p)