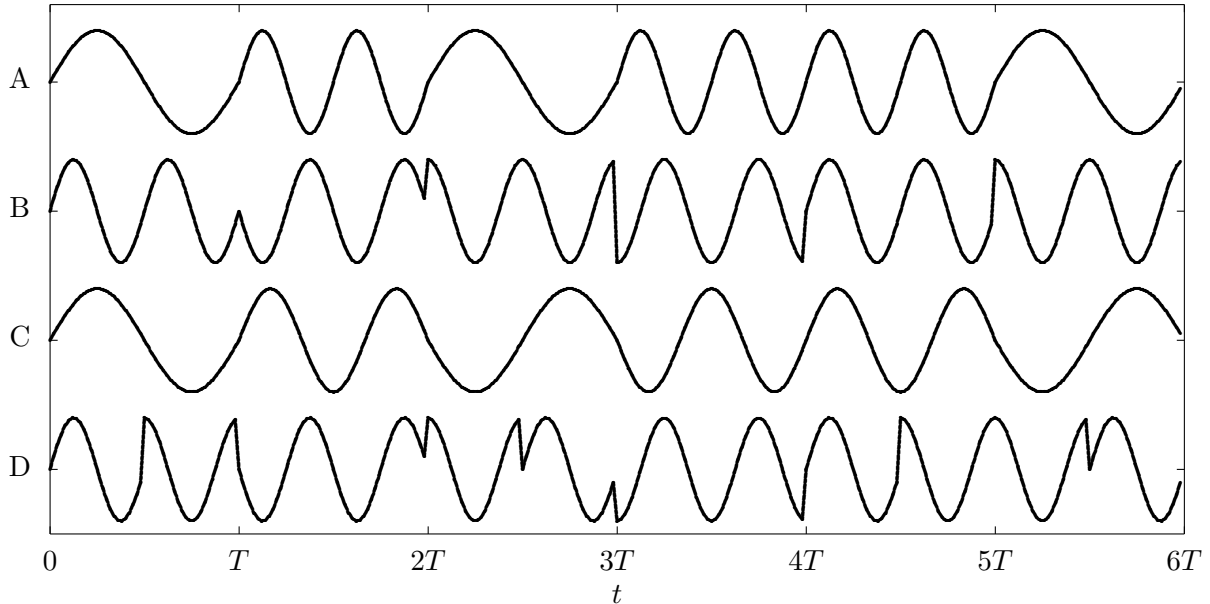


Comunicaciones Digitales - Ejercicios Tema 4-5

1. La siguiente figura representa la forma de onda de varias modulaciones angulares, en concreto: QPSK, OQPSK, CPFSK y MSK.



- a) Para cada forma de onda, identifique la modulación, explicando sus rasgos distintivos.
- b) Para las modulaciones CPFSK y MSK, identifique la secuencia de información $I[n] \in \{\pm 1\}$ (puede asumir que $I[0] = -1$ en ambos casos).
2. Una modulación de fase continua (CPM), con índice de modulación $h = 2$, y constelación 2-PAM ($I[n] \in \{\pm 1\}$), utiliza el siguiente pulso normalizado

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T}{3} \\ A, & \frac{2T}{3} \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Determine el valor de A , explique si se trata de una modulación CPM de respuesta completa o de respuesta parcial, y explique la diferencia entre ambas.
- b) Represente el árbol de fases para esta modulación, para cuatro períodos de símbolo, etiquetando adecuadamente los ejes de la representación, y resalte sobre el árbol la fase correspondiente a la secuencia $I[0] = +1, I[1] = -1, I[2] = -1, I[3] = +1$.
3. Dos sistemas con una modulación CPM de respuesta completa e índice de modulación $h = 1$, tienen los árboles de fase que se representan en la Figura 1 (note que el eje de las fases está escalado por un factor π en ambos casos)

- a) Para el primer sistema
- I) Indique cuál es el número de posibles valores para $I[n]$ (orden de la constelación, M), y proporcione los M valores que puede tomar $I[n]$.
 - II) Represente, etiquetando apropiadamente los dos ejes, el pulso $g(t)$.
 - III) Obtenga la secuencia de símbolos $I[n]$ que corresponde al camino resaltado en el árbol de fases.

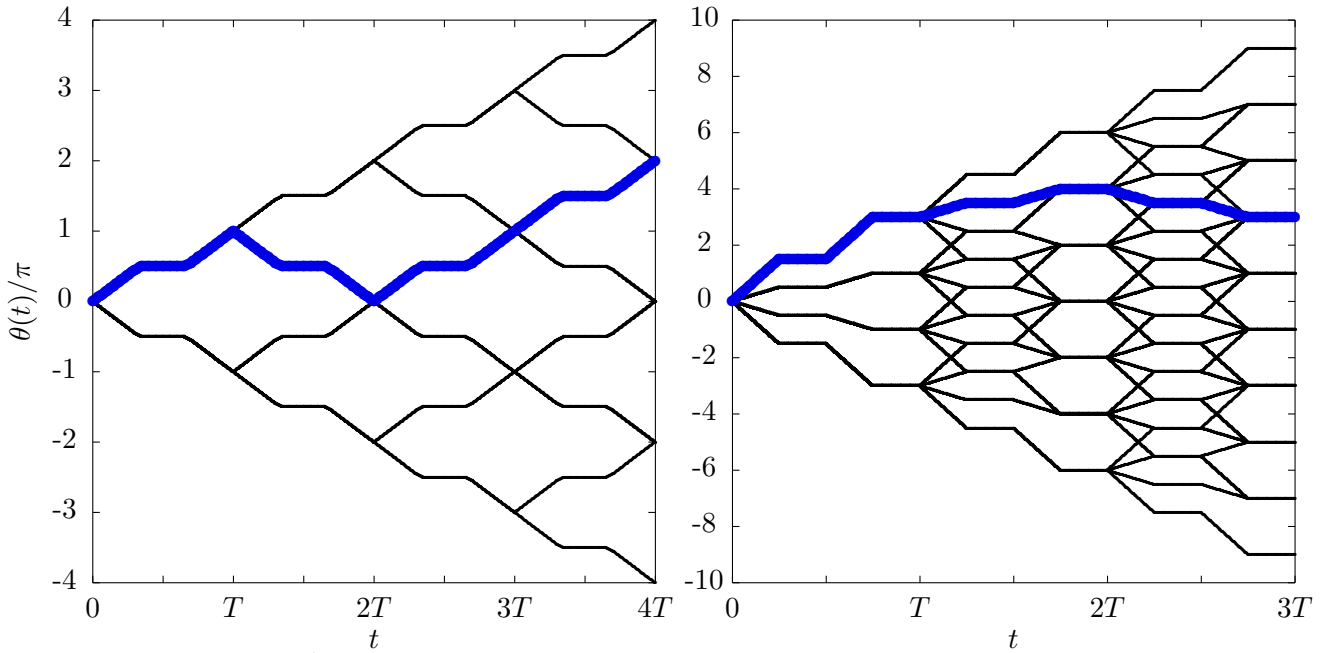


Figura 1: Árboles de fase para dos modulaciones CPM de respuesta completa.

- b) Repita los apartados anteriores para el segundo sistema.
4. Una modulación OFDM en tiempo discreto utiliza $N = 4$ portadoras.
- Si no se utiliza prefijo cíclico, ¿bajo qué condiciones no existirá ICI e ISI?
 - Si se utiliza un prefijo cíclico de longitud $C = 2$ muestras y el canal discreto a tiempo de muestreo $T/(N+C)$ es $d[m] = \delta[m] + \frac{1}{3}\delta[m-2]$, obtenga los canales discretos equivalentes $p_{k,i}[n]$ y discuta si hay ICI e ISI.
5. Considere una modulación OFDM con 4 portadoras, constelación QPSK con símbolos equiprobables y un prefijo cíclico de 2 muestras. La señal modulada atraviesa un canal discreto equivalente a periodo $T/6$ con respuesta al impulso

$$d[m] = \delta[m] - 0,6\delta[m-1],$$

y ruido aditivo complejo, blanco y gaussiano de varianza N_0 . En el receptor se emplea un decisor de máxima verosimilitud adaptado a la constelación QPSK que se recibe en el receptor.

- Obtenga las respuestas al impulso de cada uno de los 16 subcanales $p_{k,i}[n]$.
 - Determine la relación señal a ruido en cada portadora.
 - Determine la probabilidad de error media.
6. Considere un sistema de transmisión en el que se emplea un esquema de modulación OFDM en tiempo discreto con un número par de portadoras N .
- Suponga que no se añade extensión cíclica a los símbolos OFDM. El canal discreto equivalente en banda base a periodo T se denota como $p_{k,i}[n]$ y $d[m]$ es el canal discreto equivalente a periodo T/N .
 - ¿Qué condiciones se han de cumplir sobre $p_{k,i}[n]$ para que no exista interferencia entre símbolos (ISI)?

- ii) ¿Que condiciones se han de cumplir sobre $p_{k,i}[n]$ para que no exista interferencia entre portadoras (ICI)?
- b) Si se añade una extensión cíclica a cada símbolo OFDM
- 1) Determine la longitud de la extensión cíclica para que se elimine la interferencia, supuesto el canal $d[m]$ del apartado anterior.
 - 2) Determine la pérdida, en términos de velocidad de transmisión, respecto al sistema original sin extensión cíclica.
7. Un sistema de comunicaciones utiliza una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con factor de ensanchado $N = 4$ y secuencia de ensanchado $x[0] = +1$, $x[1] = -1$, $x[2] = +1$ y $x[3] = -1$. El filtro transmisor a tiempo de chip, $g_c(t)$, es un filtro en raíz de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0,25$. El filtro receptor a tiempo de chip es un filtro adaptado al transmisor. La transmisión se realiza a través de un canal con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$, con lo que el canal discreto equivalente a tiempo de chip es $d[m] = \delta[m] + \frac{1}{2}\delta[m - 2]$.
- a) Explique cómo se generan las muestras a tiempo de chip, $s[m]$, a partir de la secuencia de símbolos $A[n]$, y de la secuencia de ensanchado $x[m]$ (puede poner el diagrama de bloques del transmisor en tiempo discreto o explicar el proceso de generación de forma detallada), y calcule los valores de $s[m]$ para $0 \leq m \leq 11$ si la secuencia de datos es $A[0] = +1$, $A[1] = -1$, $A[2] = -1$.
 - b) Obtenga la secuencia de muestras a tiempo de chip, $v[m]$, a la salida del filtro receptor $g_c(-t)$ para la secuencia de datos anterior si se transmite sobre $h(t)$ (con el correspondiente $d[m]$) en ausencia de ruido y se asume que $A[n] = +1$ para $n < 0$.
 - c) Explique cómo se obtienen las observaciones a tiempo de símbolo, $q[n]$, a partir de las observaciones a tiempo de chip $v[m]$, y de la secuencia de ensanchado $x[m]$ (puede poner el diagrama de bloques del receptor en tiempo discreto o explicar el proceso de obtención de forma detallada), y calcule los valores de $q[n]$ para $0 \leq n \leq 2$.
8. Un sistema de comunicaciones utiliza una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con factor de ensanchado $N = 5$. La secuencia de datos transmitida, $A[n]$, es una secuencia blanca con energía de símbolo E_s , y la secuencia de ensanchado es
- $$x[0] = +1, x[1] = -1, x[2] = +1, x[3] = -1, x[4] = +1.$$
- a) Si como pulso conformador se utiliza un pulso causal de duración T_c normalizado en energía, represente la señal modulada para la siguiente secuencia de datos
- $$A[0] = +1, A[1] = +3, A[2] = -1.$$
- b) Obtenga la expresión analítica de la densidad espectral de potencia de la señal en banda base, $S_s(j\omega)$, si el pulso a tiempo de chip es $g_c(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$.
 - c) Obtenga los valores de $q[n]$ para $0 \leq n \leq 2$ si la señal a la salida del filtro adaptado a $g_c(t)$, $v(t)$, es la que se muestra en la Figura 2 (observe bien que el eje de abscisas está escalado por un factor T_c).
9. Responda a las siguientes preguntas relativas a distintas modulaciones angulares
- a) ¿Cuál es mínima separación entre frecuencias de los pulsos de información en las siguientes modulaciones de frecuencia?

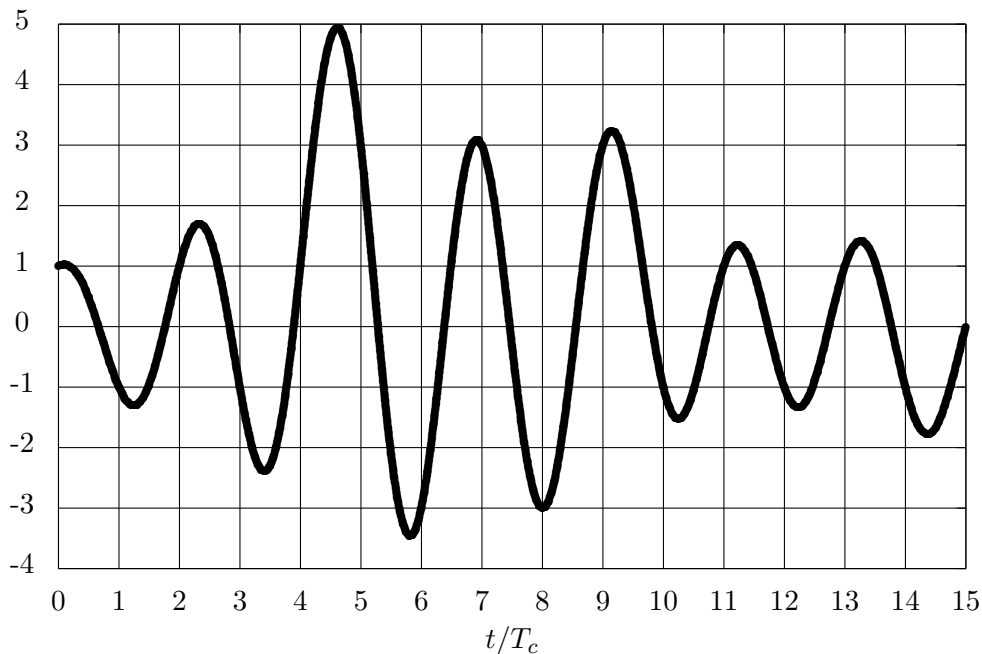


Figura 2: Señal $v(t)$ a la salida del filtro adaptado a $g_c(t)$.

- I) Modulación CPFSK (*Continuous Phase Frequency Shift Keying*)
 - II) Modulación MSK (*Minimum Shift Keying*)
- b) ¿Cómo se consiguen eliminar los saltos de 180° en una modulación OQPSK?
- c) Una modulación CPM con índice de modulación $h = 2$ utiliza el siguiente pulso transmisor

$$g(t) = \begin{cases} A \cdot t, & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

- I) Calcule el valor de A si el pulso está normalizado (con la definición de normalización empleada en modulaciones CPM), y diga si se trata de una modulación CPM de respuesta completa o de respuesta parcial, explicando por qué.
 - II) Para la modulación CPM del apartado anterior, represente el árbol de fases para 2 períodos de símbolo etiquetando adecuadamente ambos ejes del gráfico, si la secuencia de símbolos enviada es una secuencia cuaternaria $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$.
10. Una modulación OFDM ocupa un ancho de banda de 4 kHz en la banda de 5 kHz - 9 kHz. Dicha modulación se utiliza para dar servicio de comunicaciones inalámbricas a un determinado número de usuarios que varía entre 4 y 10 usuarios. El sistema de comunicaciones consta de una estación base (transmisor) que envía la modulación OFDM y una serie de receptores separados físicamente, uno por cada usuario al que se le esté dando servicio. En el transmisor el flujo de información destinado a cada usuario se envía en cada una de las portadoras con las que se genera la modulación OFDM.
- a) Obtenga la máxima y mínima tasa de servicio (tasa de símbolo) que se le podría dar a cada usuario, si la modulación no usa prefijo cíclico. Tenga en cuenta que la tasa dependerá del número de usuarios que estén siendo servidos.
 - b) Suponiendo que damos servicio a 4 usuarios ($N = 4$) y que las tasas binarias requeridas por cada uno de ellos son $R_{u0} = 8$ kbit/s, $R_{u1} = 4$ kbit/s, $R_{u2} = 2$ kbit/s y $R_{u3} = 1$ kbit/s, obtenga el orden de la modulación que cada usuario necesitará.

- c) Se transmite la señal OFDM en tiempo discreto $s[m]$ que transporta la información de cada uno de los 4 usuarios a través del canal inalámbrico. Cada usuario i recibe la señal $s[m]$ a través de un canal diferente $d_i[m]$ ($i = 0 \dots 3$) por las distintas características de propagación del medio:

$$d_i[m] = \delta[m] + a_i \delta[m - 1] \text{ si } i = 0, 1$$

$$d_i[m] = \delta[m] + a_i \delta[m - 2] \text{ si } i = 2, 3$$

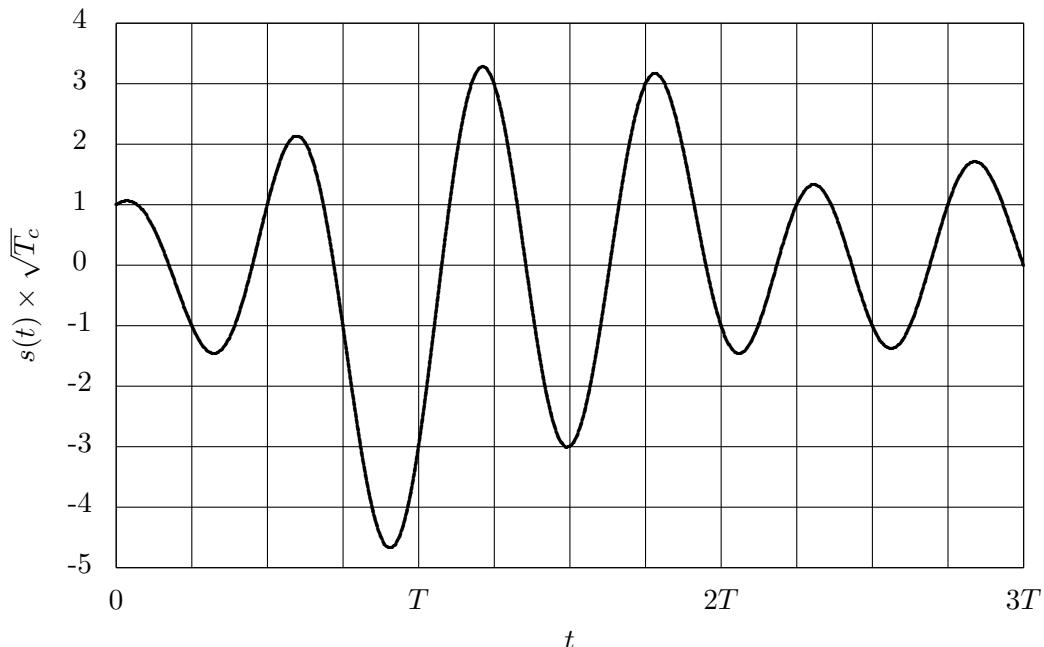
Determine la longitud del prefijo cíclico que habría que añadir a la señal $s[m]$ para que todos los usuarios puedan recuperar su información sin ISI y sin ICI.

- d) Diseñe el demodulador que le permitirá a cada usuario recuperar su flujo de información.
11. Diseñe dos modulaciones basadas en FSK para que dos usuarios puedan transmitir información binaria de forma simultánea en el tiempo sin interferencias, consumiendo en conjunto el menor ancho de banda posible. Ponga un ejemplo de las frecuencias que utilizaría cada usuario para transmitir su información e identifique los pulsos $g_i(t)$ en cada caso.
12. Un sistema de espectro ensanchado por secuencia directa, con factor de ensanchado $N = 4$, tiene como secuencia de ensanchado

$$x[m] = \delta[m] + a \cdot \delta[m - 1] + b \cdot \delta[m - 2] + c \cdot \delta[m - 3],$$

con $\{a, b, c\} \in \{\pm 1\}$. El filtro transmisor a tiempo de chip, T_c , es $g_c(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$.

- a) Si la transmisión de la secuencia de símbolos de información, $A[n]$, genera la señal modulada en banda base, $s(t)$, que se muestra en la figura



donde T denota el tiempo de símbolo de la secuencia de información transmitida, $A[n]$, y donde remarcamos que la amplitud de la señal $s(t)$ está escalada por un factor $\sqrt{T_c}$, obtenga los valores de a , b , y c , y los 3 valores iniciales de la secuencia transmitida $A[n]$.

- b) La señal $s(t)$ se transmite por un canal ideal, sin ruido, y en el receptor se filtra con un filtro adaptado al filtro transmisor a tiempo de chip, es decir, $f(t) = g_c(-t)$. La salida de este filtro receptor es $v(t)$. Calcule $v(t)$ a partir de $s(t)$, dibuje el diagrama de bloques del receptor de espectro ensanchado, y calcule las observaciones a la salida del mismo, $q[n]$, para $n \in \{0, 1, 2\}$.

NOTA: Para este filtro transmisor a tiempo de chip, la función de ambigüedad temporal es $r_{g_c}(t) = g_c(t) * g_c(-t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$.

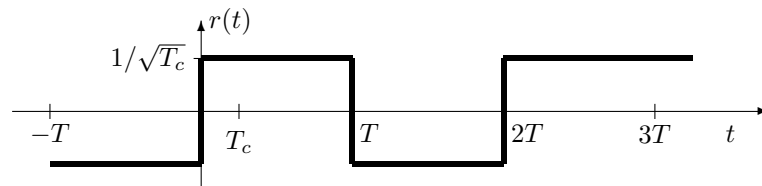
13. Considere una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con $N = 10$, $\tilde{x}[m] = (-1)^m$ y $g_c(t) * g_c^*(-t)$ que cumple el criterio de Nyquist a periodo de chip, $T_c = T/N$. El canal equivalente en banda base es $h_{eq}(t) = \delta(t - \tau)$. Determine el canal discreto equivalente, $p[n]$, (si no es posible simplificar la expresión resultante, déjela en función de $g_c(t)$) y si existirá o no ISI en los siguientes casos:

- a) $\tau = T$
- b) $\tau = T/2$
- c) $\tau = T/4$

14. Un sistema de modulación de espectro ensanchado por secuencia directa, con factor de ensanchado $N = 4$, y trabajando en banda base, utiliza como pulso modulador

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]g_c(t - mT_c),$$

donde la secuencia determinista de ensanchado es en este caso $x[m] = +1, -1, +1, -1$, para $m = 0, 1, 2, 3$, respectivamente, y donde $g_c(t)$ es un pulso causal de duración T_c (tiempo de chip) y de energía unidad.



- a) Empleando un receptor para espectro ensanchado por secuencia directa en banda base, calcule la salida del demodulador, $q[n]$, para $n = 0, 1, 2$, si la entrada del receptor, $r(t)$, es la señal de la figura.
 - b) Calcule el canal discreto equivalente y la probabilidad de error del sistema con el receptor convencional para estas modulaciones, si la constelación transmitida es una 2-PAM (o BPSK), $A[n] \in \{\pm 1\}$, y el canal es $h_{eq}(t) = \delta(t) + \delta(t - T/2)$, y compárelos con los obtenidos si en el receptor en lugar de la secuencia de ensanchado del transmisor se utiliza una secuencia alternativa $x_r[m] = +1, -1, +1, +1$, para desensanchar. ¿Aparece ISI?
 - c) Para el caso particular de la secuencia de ensanchado $x[m]$ utilizada en el transmisor en este sistema y del canal del apartado anterior, ¿es posible eliminar la ISI modificando la secuencia de desensanchado en el receptor? Si es así, indique las condiciones que debe cumplir la nueva secuencia del receptor, y ponga un ejemplo que las cumpla.
15. Una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa tiene un factor de ensanchado $N = 10$. La constelación transmitida es una 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$. El canal discreto equivalente a tiempo de chip T_c es

$$d[m] = \delta[m] - 0,5\delta[m - 4]$$

y se considera que el ruido aditivo es blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$.

La secuencia de ensanchado es $x[m]$ is $\{-1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, +1\}$.

- a) Represente el pulso transmisor a tiempo de símbolo, $g(t)$, si el pulso a tiempo de chip, $g_c(t)$, es un pulso rectangular causal y normalizado en energía.
- b) Obtenga el canal discreto equivalente a tiempo de símbolo T . Determine si existirá o no interferencia intersimbólica, y determine la probabilidad de error utilizando un detector símbolo a símbolo sin memoria.

16. Las modulaciones en frecuencia CPFSK y MSK M -árias (con M símbolos) utilizan ambas M pulsos de la forma

$$g_i(t) = \sin(\omega_i t) \cdot w_T(t), \text{ para } i = 0, 1, \dots, M - 1,$$

donde $w_T(t)$ es un pulso causal de amplitud unidad y duración T segundos. Para un cierto sistema de comunicaciones, el rango utilizable para las frecuencias de cada pulso está limitado entre dos frecuencias, tal que $\omega_a \leq \omega_i \leq \omega_b$, y donde $\omega_a = 2\pi f_a$ y $\omega_b = 2\pi f_b$, siendo en este caso $f_a = 950$ MHz y $f_b = 1250$ MHz.

Para el caso $M = 4$, calcule la máxima tasa de símbolo posible, y los valores para las cuatro frecuencias (ω_i o f_i , $i = 0, 1, 2, 3$) utilizando:

- a) La modulación MSK.
- b) La modulación CPFSK.

17. Un modulador en fase diferencial genera la secuencia de símbolos transmitidos según el siguiente procedimiento: los símbolos de la constelación son

$$A[n] = R \cdot e^{j\phi[n]}$$

donde la fase que se transmite en el instante de tiempo n , $\phi[n]$, se obtiene teniendo en cuenta la fase que se transmitió en el instante de tiempo anterior $\phi[n - 1]$ y la fase asociada a la nueva información binaria $\Delta_\phi[n] = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ radianes, de modo que

$$\phi[n] = \phi[n - 1] + \Delta_\phi[n].$$

- a) Dibuje el diagrama de bloques del modulador teniendo en cuenta que la entrada al mismo es la secuencia de bits de información $B_b[\ell]$ y la salida es la señal compleja en banda base $s(t)$.
- b) Si se considera que la fase inicial es $\phi[-1] = \frac{\pi}{4}$, obtenga el alfabeto de símbolos transmitido, dibuje la constelación y calcule su energía media si todos los símbolos son equiprobables.
- c) Realice la asignación binaria óptima para minimizar la probabilidad de error de bit.
- d) Si las portadoras utilizadas en transmisión para generar la señal paso banda tienen una frecuencia ω_c rad/s y una fase nula, y las portadoras utilizadas en el receptor tienen la misma frecuencia pero fase $\theta_c \neq 0$ radianes (receptor no coherente), obtenga la constelación recibida en ausencia de ruido.
- e) Diseñe un receptor apropiado para trabajar en la situación anterior en la que el demodulador no es coherente (proporcione las expresiones analíticas o el diagrama de bloques para obtener la estima de los bits recibidos a partir de la observación $q[n]$).

18. En un sistema de comunicaciones digital, que utiliza una constelación 4-PAM con niveles normalizados, se quiere transmitir a una tasa binaria de 4 kbits/s, y los primeros símbolos de la secuencia que se desea transmitir, son

$$A[0] = +1, A[1] = -3, A[2] = +1, A[3] = +3, A[4] = +1, A[5] = -1, A[6] = +1, A[7] = -1.$$

Para implementar el sistema se barajan dos posibles modulaciones: modulación de espectro ensanchado por secuencia directa, y modulación OFDM.

El canal discreto equivalente $d[m]$ (canal equivalente a tiempo de chip para modulaciones de espectro ensanchado, o a tiempo de símbolo OFDM dividido entre número de portadoras (o portadoras más prefijo) para modulación OFDM) es

$$d[m] = \delta[m] - \frac{1}{4} \cdot \delta[m - 1] + \frac{2}{3} \cdot \delta[m - 2].$$

- a) Si se decide utilizar una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa, con factor de ensanchado $N = 3$, secuencia de ensanchado

$$x[m] = \delta[m] - \delta[m - 1] + \delta[m - 2],$$

frecuencia de portadora $\omega_c = 2\pi \times 10^6$ radianes/s, y utilizando como filtro transmisor a tiempo de chip un filtro en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0,25$, obtenga la secuencia de muestras de la señal modulada a tiempo de chip, $s[m]$, asociada a los 3 primeros símbolos de la secuencia de datos indicados en el enunciado, y calcule el ancho de banda de la señal modulada paso banda.

- b) Si se utiliza una modulación OFDM con $N = 4$ portadoras y frecuencia de portadora $\omega_c = 2\pi \times 10^6$ radianes/s, escriba de forma ordenada la secuencia de muestras de la señal a transmitir asociadas a los 8 primeros símbolos de la secuencia de datos indicados en el enunciado, y calcule el ancho de banda de la señal modulada requerido en los dos siguientes casos:
- I) Se desea transmitir utilizando el mínimo ancho de banda posible.
 - II) Se desea transmitir sin interferencias entre símbolos y entre portadoras, con el mínimo ancho de banda necesario para eliminar estos dos efectos.