

TEMA 5

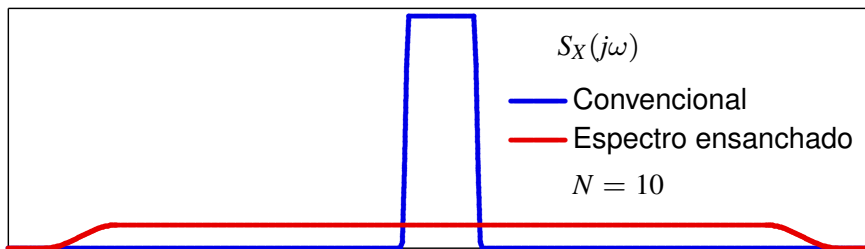
MODULACIONES MULTIPULSO

Índice

- Modulaciones de espectro ensanchado
 - ▶ Espectro ensanchado por secuencia directa (DS-SS)
 - ▶ Espectro ensanchado por salto en frecuencia (FH-SS)
 - ▶ Acceso múltiple
- Modulaciones de división de frecuencia ortogonales (OFDM)
 - ▶ Modulación OFDM en tiempo continuo
 - ▶ Modulación OFDM en tiempo discreto

Modulaciones de espectro ensanchado

- Mito: espectro ensanchado incrementa la capacidad del sistema
 - ▶ Realidad:
 - ★ Proporciona baja sensibilidad a distorsión del canal (incluido *jamming*)
 - ★ Permite comunicaciones seguras
- Ancho de banda deliberadamente mayor que en modulaciones convencionales
 - ▶ Ancho de banda se incrementa por un factor N
 - ★ Inmunidad a interferencias (desvanecimientos) de banda estrecha



- Origen militar: combatir interferencias intencionadas (*jamming*)
 - ▶ Aplicaciones actuales
 - ★ Acceso múltiple
 - CDMA: *Code division multiple access*
 - ★ Aplicaciones que requieran robustez contra atenuaciones locales (en frecuencia)
 - ★ Limita la densidad de flujo de potencia en enlaces descendentes de satélites

Aumento del ancho de banda

- Señal PAM - Expresiones en tiempo y frecuencia ($R_s = \frac{1}{T}$)

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT), \quad S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot S_A(e^{j\omega T}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

- ▶ Ancho de banda usando pulsos de la familia coseno alzado (raíz) a $R_s = \frac{1}{T}$ con factor de caída α

- ★ Filtros cumplen Nyquist para ISI a T

$$\text{Banda base (BB): } W = \frac{\pi}{T}(1 + \alpha) \text{ rad/s, Paso banda (PB): } W = \frac{2\pi}{T}(1 + \alpha) \text{ rad/s}$$

$$\text{Banda base (BB): } B = \frac{R_s}{2}(1 + \alpha) \text{ Hz, Paso banda (PB): } B = R_s(1 + \alpha) \text{ Hz}$$

- Objetivo: Aumentar el ancho de banda por un factor N

- ▶ Transmisión sin ISI: filtros en raíz de coseno alzado

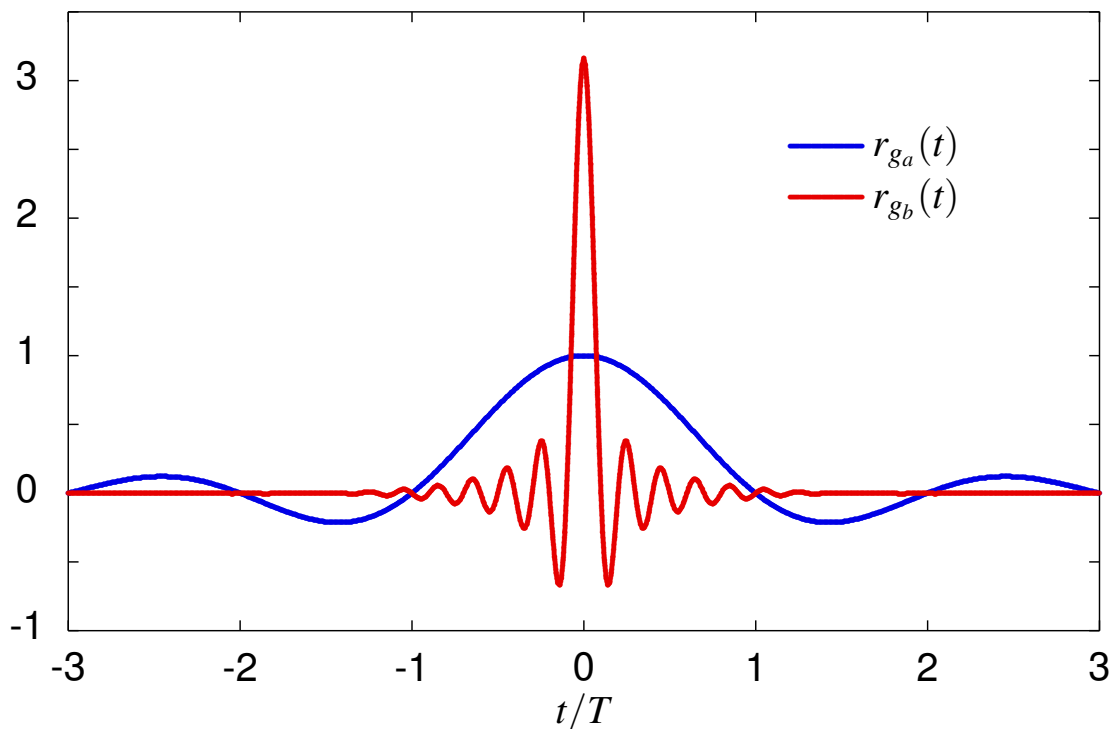
$$\text{Banda base (BB): } W = N \times \frac{\pi}{T}(1 + \alpha) \text{ rad/s, Paso banda (PB): } W = N \times \frac{2\pi}{T}(1 + \alpha) \text{ rad/s}$$

- Transmisión sin ISI - Posible opción: pulsos cumpliendo Nyquist a T/N

- ▶ Si se cumple Nyquist a T/N se cumple a T
- ▶ El ancho de banda aumenta por un factor N
- ▶ Problema: función de ambigüedad localizada en el tiempo
⇒ Potencia de la señal localizada en tiempo

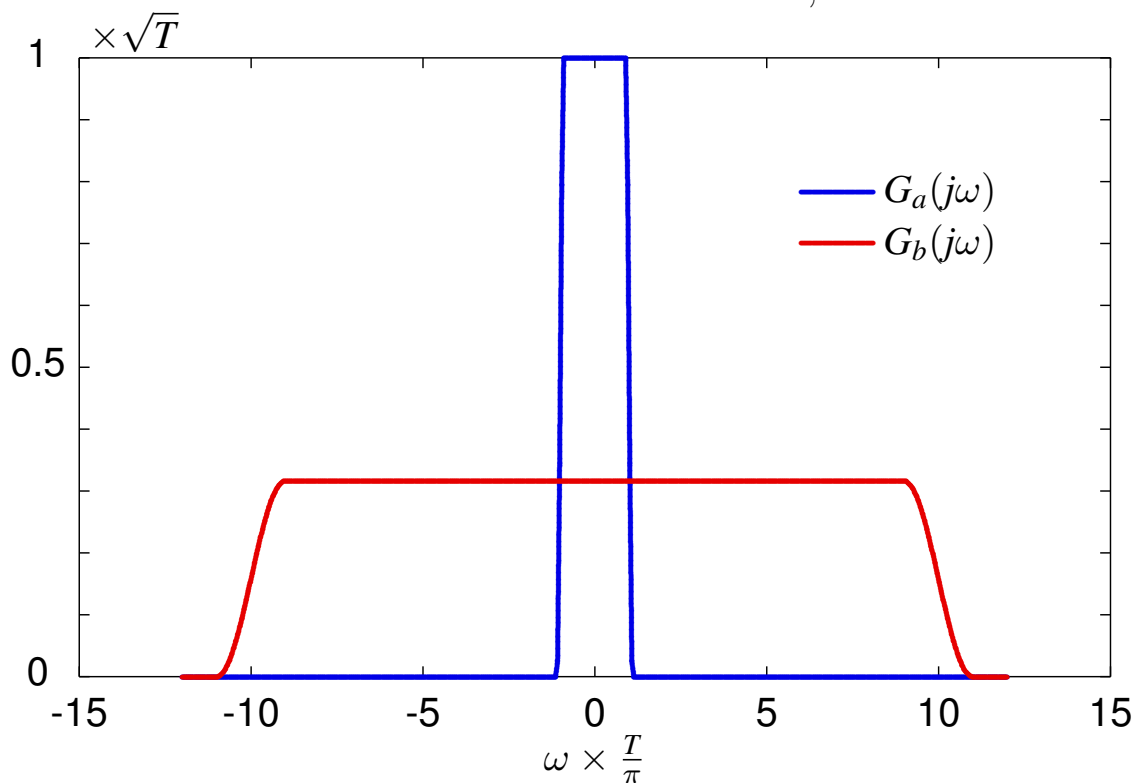
Pulsos coseno alzado: $g_a(t)$ a T y $g_b(t)$ a T/N ($N = 10, \alpha = 0,1$)

Pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0,1$



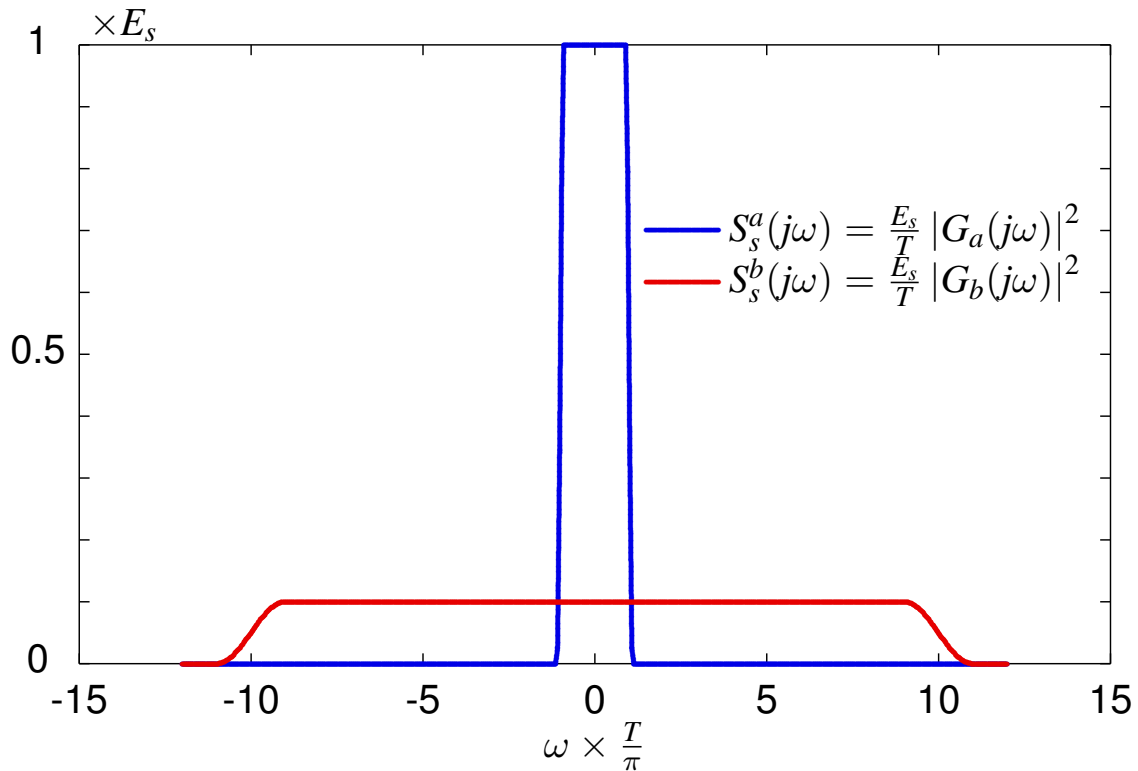
Respuesta en frecuencia a T y T/N ($N = 10, \alpha = 0,1$)

Pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0,1$

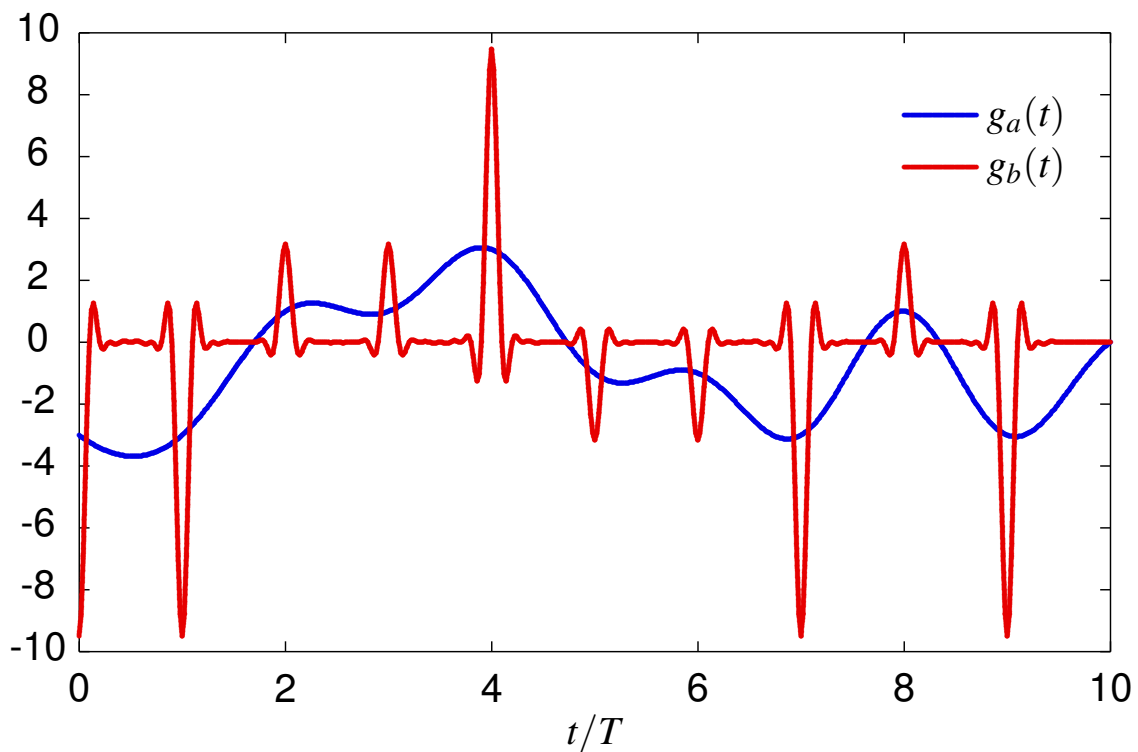


$S_s(j\omega)$ usando pulsos a T y T/N ($N = 10, \alpha = 0,1$)

Pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0,1$



Forma de onda: 4-PAM, $N = 10, \alpha = 0,5$



Espectro ensanchado por secuencia directa

DSSS: *Direct Sequence Spread Spectrum*

- Alternativa que evita la localización en tiempo de la potencia de la señal
- Familia de pulsos

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c)$$

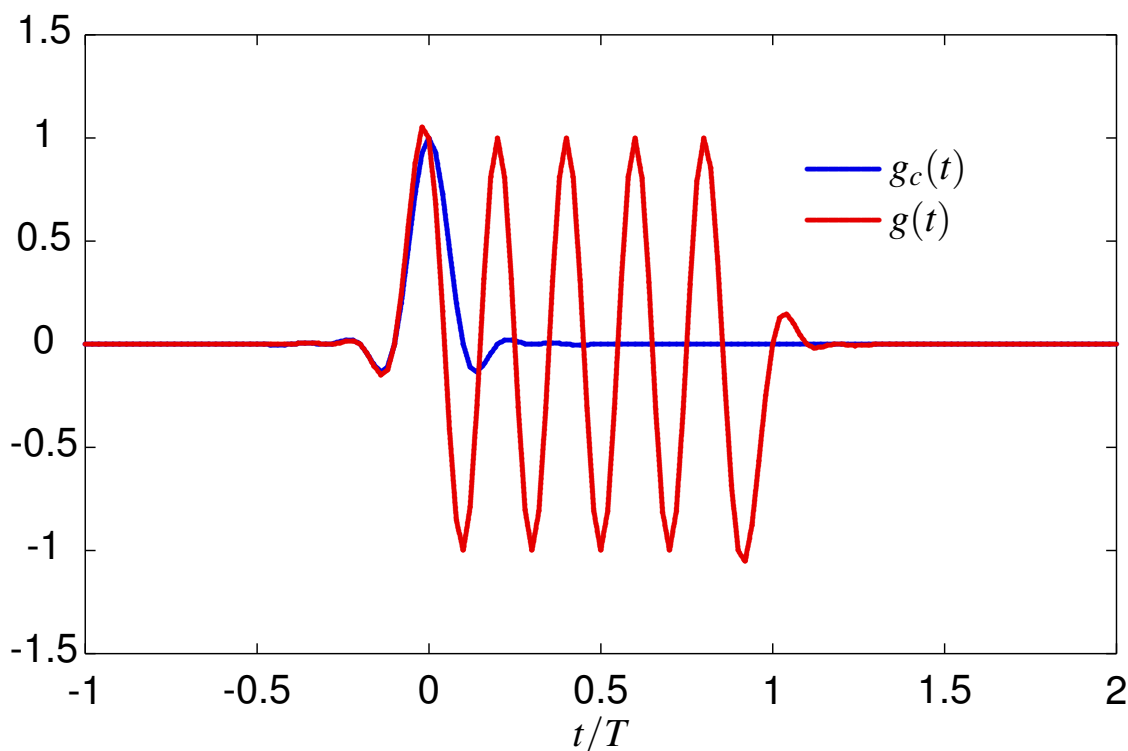
Combinación lineal de N réplicas de un pulso, $g_c(t)$, desplazadas múltiplos de $T_c = \frac{T}{N}$

- ▶ $x[m]$: secuencia ensanchadora (secuencia de *chip*)
 - ★ N valores: $\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$
- ▶ T_c : período de *chip* $T_c = \frac{T}{N}$
- ▶ $g_c(t)$: pulso tal que $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c

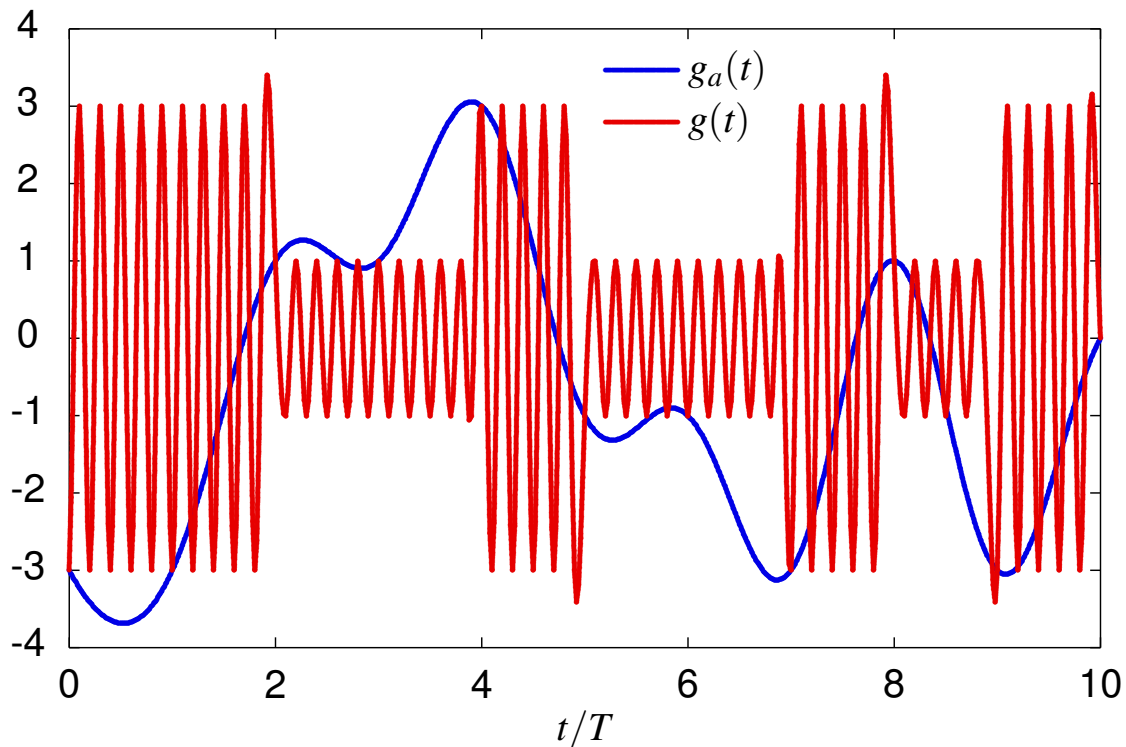
- Expresión analítica de la señal modulada

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t-nT)}$$

Ejemplo de pulso: Coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$



Ejemplo de forma de onda: Coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$



DSSS - Notación alternativa

● Algunas definiciones

- ▶ Secuencia periódica $\tilde{x}[m]$ a partir de la secuencia de ensanchado

$$\tilde{x}[m] = \sum_k x[m - kN]$$

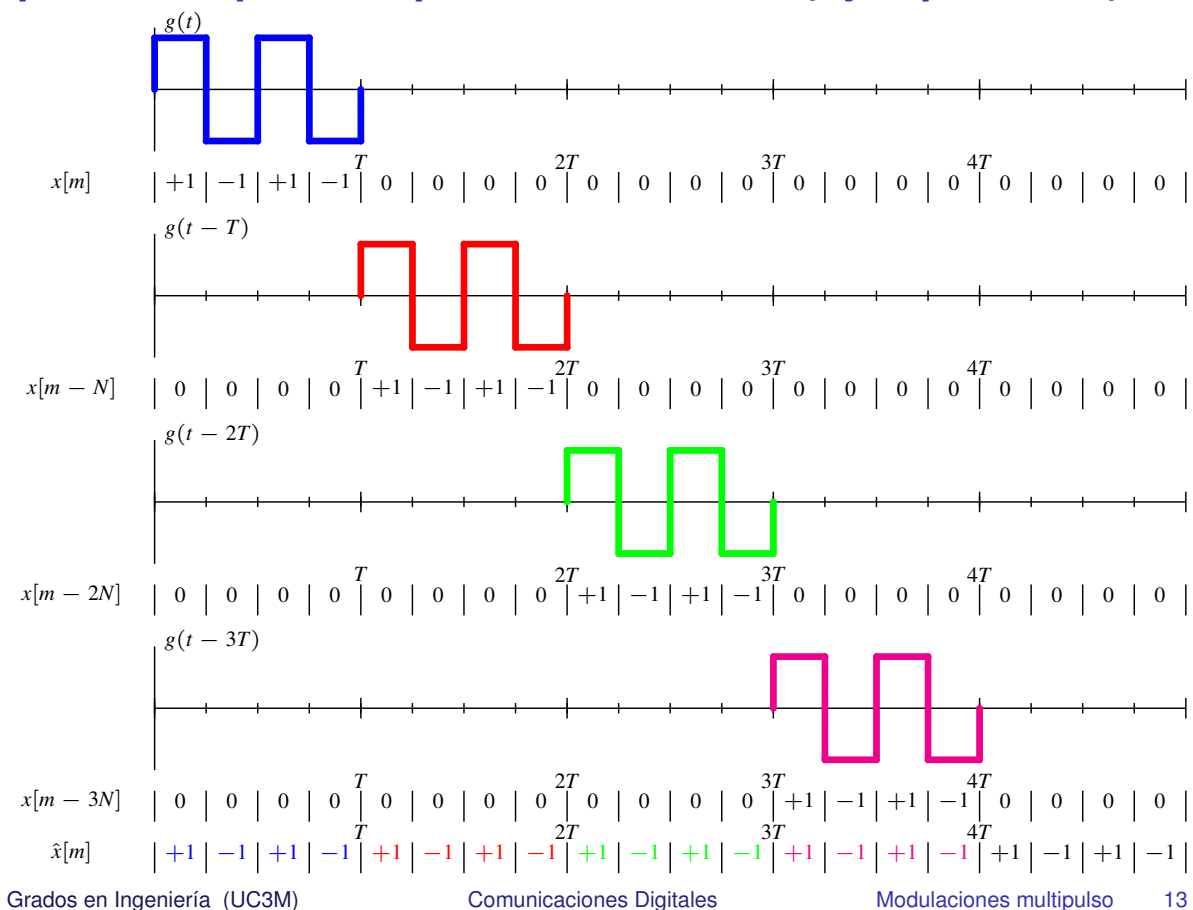
- ▶ Ventana causal discreta de N muestras

$$w_N[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq m \leq N - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Se reescribe la ecuación para $s(t)$, reescribiendo $g(t - nT)$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_n A[n] \times \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t-nT)} \\ &= \sum_n A[n] \times \sum_{m=nN}^{nN+N-1} x[m - nN] \cdot g_c(t - mT_c) \\ &= \sum_n A[n] \times \sum_m \tilde{x}[m] \cdot w_N[m - nN] \cdot g_c(t - mT_c) \end{aligned}$$

Expresiones para los pulsos retardados (Ejemplo $N = 4$)



DSSS - Notación alternativa (II)

- Se reordena la expresión anterior

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_n A[n] \sum_m \tilde{x}[m] \cdot w_N[m - nN] \cdot g_c(t - mT_c) \\
 &= \sum_m \tilde{x}[m] \cdot \underbrace{\sum_n A[n] \cdot w_N[m - nN]}_{s[m]} \cdot g_c(t - mT_c) \\
 &= \sum_m s[m] \cdot g_c(t - mT_c)
 \end{aligned}$$

- Interpretación de la expresión analítica resultante

- ▶ Generación de la señal $s(t)$ transmitiendo la secuencia de muestras $s[m]$ a tiempo de chip, T_c , con filtro transmisor a T_c
- ▶ Generación de la secuencia de muestras a tiempo de chip, $s[m]$

$$s[m] = \tilde{x}[m] \cdot \sum_n A[n] \cdot w_N[m - nN]$$

Transmisor DSSS - Generación de muestras y señal

- Muestras de la señal a T_c (muestras $s[m]$)

$$s[m] = \tilde{x}[m] \cdot \sum_n A[n] \cdot w_N[m - nN]$$

- Generación de $s[m]$ por bloques de tamaño N muestras

$$s[m] = \underbrace{\{s[0], s[1], \dots, s[N-1]\}}_{s^{(0)}[m]} \underbrace{\{s[N], s[N+1], \dots, s[2N-1]\}}_{s^{(1)}[m]} \dots \underbrace{\{s[nN], s[nN+1], \dots, s[(n+1)N-1]\}}_{s^{(n)}[m]} \dots$$

Bloque de índice n : $s^{(n)}[m]$, N muestras $\{s^{(n)}[0], s^{(n)}[1], \dots, s^{(n)}[N-1]\}$

Muestras del bloque de índice n : $s^{(n)}[m] = s[nN + m]$, $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Secuencia de muestras en el transmisor: $s[m] = \sum_n s^{(n)}[m - nN]$

- Cada símbolo $A[n]$ genera las N muestras de un bloque (índice n)

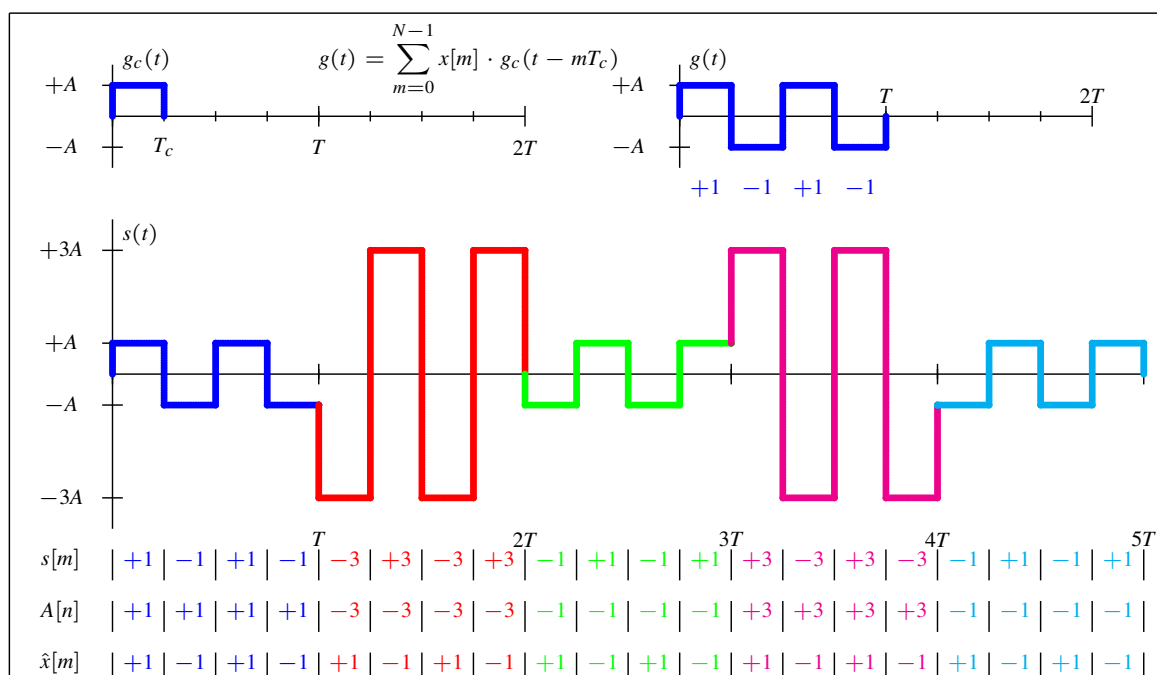
- El valor de $A[n]$ se multiplica por la secuencia de ensanchado

$$\left\{ s^{(n)}[m] \right\}_{m=0}^{N-1} \equiv \underbrace{\{A[n] \times x[0]\}}_{s[nN]} \underbrace{\{A[n] \times x[1]\}}_{s[nN+1]} \underbrace{\{A[n] \times x[2]\}}_{s[nN+2]} \dots \underbrace{\{A[n] \times x[N-1]\}}_{s[nN+N-1]}$$

Generación de las señales $s(t)$ (Ejemplo $N = 4$)

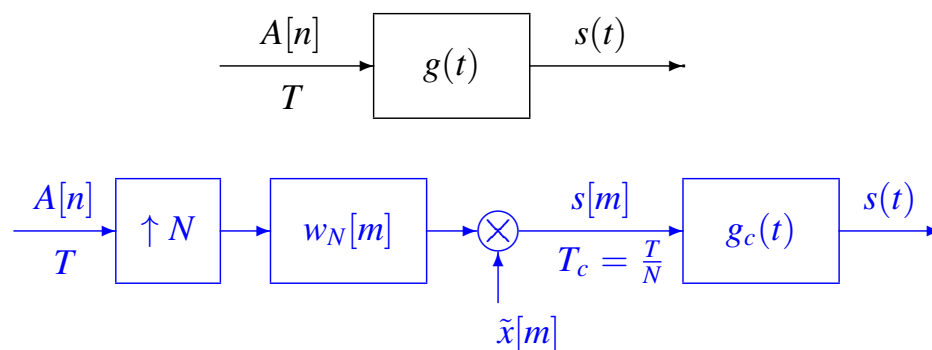
- Secuencia a transmitir: $\frac{n}{A[n]} \mid \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ +1 & -3 & -1 & +3 & -1 \end{array}$

- Secuencia de ensanchado ($N = 4$): $x[0] = +1, x[1] = -1, x[2] = +1, x[3] = -1$



Transmisor DSSS - Diagrama de bloques

- Diagramas de bloques del transmisor



- Las dos estructuras son equivalentes
 - ▶ Modular la secuencia de símbolos (a tiempo de símbolo T) con un filtro $g(t)$ definido a tiempo de símbolo T
 - ▶ Modular la secuencia de muestras (a tiempo de chip T_c) con un filtro $g_c(t)$ definido a tiempo de chip T_c
- La implementación de la segunda opción es más simple
 - ▶ La implementación del filtro transmisor $g(t)$ puede ser compleja
 - ★ Combinación lineal de N filtros con $r_{g_c}(t)$ cumpliendo Nyquist
 - ▶ La implementación del filtro transmisor $g_c(t)$ es simple
 - ★ Generación de las muestras $s[m]$ a partir de $A[n]$ eficiente vía software

Espectro de la señal DSSS en banda base

- Densidad espectral de potencia de la señal en banda base $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot S_A(e^{j\omega T}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Respuesta en frecuencia del pulso $g(t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c)$$

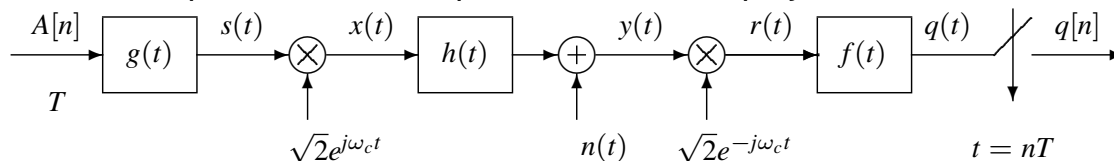
$$G(j\omega) = G_c(j\omega) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot e^{-j\omega m T_c} = G_c(j\omega) \cdot X(e^{j\omega T_c})$$

- Densidad espectral de potencia de la señal DSSS

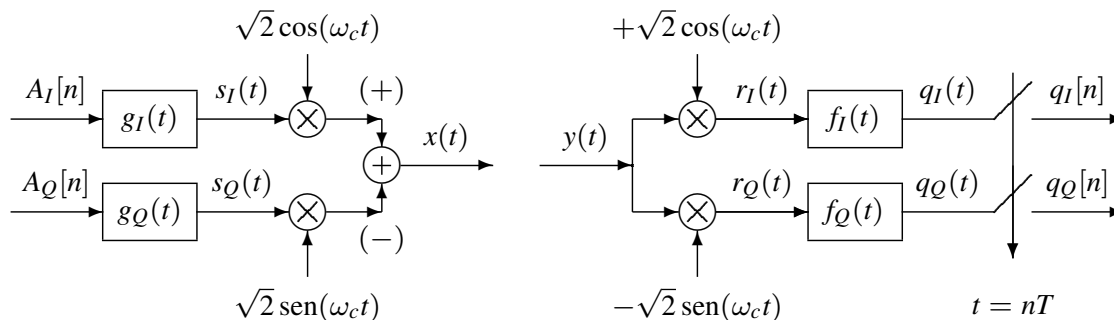
$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot S_A(e^{j\omega T}) \cdot |X(e^{j\omega T_c})|^2 \cdot |G_c(j\omega)|^2$$

Transmisión paso banda

- Modulación paso banda - Representación compleja



- Representación en componentes en fase y cuadratura



- Secuencia de ensanchado y filtro $g(t)$ complejos

$$x[m] = x_I[m] + jx_Q[m], \quad g(t) = g_I(t) + jg_Q(t)$$

- ▶ Habitualmente, $x_I[m] = x_Q[m]$ (aunque no es necesario)

Ancho de banda de las señales DSSS

- Ancho de banda de la señal en banda base

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot S_A(e^{j\omega T}) \cdot |X(e^{j\omega T_c})|^2 \cdot |G_c(j\omega)|^2$$

- ▶ El ancho de banda lo define el filtro a tiempo de chip
 - ★ Filtros de la familia del coseno alzado (raíz)

$$B = \frac{R_s}{2} \cdot (1 + \alpha) \times N \text{ Hz}$$

- Ancho de banda de la señal paso banda

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2} [S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-(j\omega + j\omega_c))]$$

- ▶ Para una tasa de símbolo dada, se dobla el ancho de banda

$$B = R_s \cdot (1 + \alpha) \times N \text{ Hz}$$

- ★ Cada T seg. ahora se transmiten dos símbolos ($A_I[n]$ y $A_Q[n]$)
 - Se mantiene la eficiencia espectral

Receptor (complejo) en banda base

- Asumiendo que el filtro receptor es $f(t) = g^*(-t)$, y siendo $r(t)$ la señal recibida en banda base

$$g^*(-t) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot g_c^*(-t - mT_c) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot g_c(-t - mT_c)$$

NOTA: $g_c^*(-t) = g_c(-t)$, ya que $g_c(t)$ es un filtro real

$$\begin{aligned} q[n] &= (r(t) * g^*(-t)) \Big|_{t=nT} = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot (r(t) * g_c(\underbrace{-t - mT_c}_{-(t+mT_c)})) \Big|_{t=nT} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot \left(\underbrace{r(t) * g_c(-t)}_{v(t)} \right) \Big|_{t=\underbrace{nT + mT_c}_{(nN+m)T_c}} \end{aligned}$$

- ▶ Señal de salida del filtro receptor a tiempo de chip: $v(t) = r(t) * g_c(-t)$
- ▶ Señal en tiempo discreto muestreada a T_c : $v[m] = v(t) \Big|_{t=mT_c = m \frac{T}{N}} = v(mT_c)$

- La salida del demodulador se puede escribir como

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot v[nN + m]$$

Proceso por bloques de N muestras

- Procesando por bloques de N muestras de la secuencia $v[m]$

$$v[m] = \underbrace{\{v[0], v[1], \dots, v[N-1]\}}_{v^{(0)}[m]} \underbrace{\{v[N], v[N+1], \dots, v[2N-1]\}}_{v^{(1)}[m]} \dots \underbrace{\{v[nN], v[nN+1], \dots, v[(n+1)N-1]\}}_{v^{(n)}[m]} \dots$$

Bloque de índice n : $v^{(n)}[m]$, N muestras $\{v^{(n)}[0], v^{(n)}[1], \dots, v^{(n)}[N-1]\}$

Muestras del bloque de índice n : $v^{(n)}[m] = v[nN + m]$, $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Secuencia de muestras en el receptor: $v[m] = \sum_n v^{(n)}[m - nN]$

- Obtención de $q[n]$: procesado del bloque de índice n

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot v[nN + m] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot v^{(n)}[m]$$

$$q[n] = \underbrace{v^{(n)}[0]}_{v[nN]} \times x^*[0] + \underbrace{v^{(n)}[1]}_{v[nN+1]} \times x^*[1] + \underbrace{v^{(n)}[2]}_{v[nN+2]} \times x^*[2] + \dots + \underbrace{v^{(n)}[N-1]}_{v[nN+N-1]} \times x^*[N-1]$$

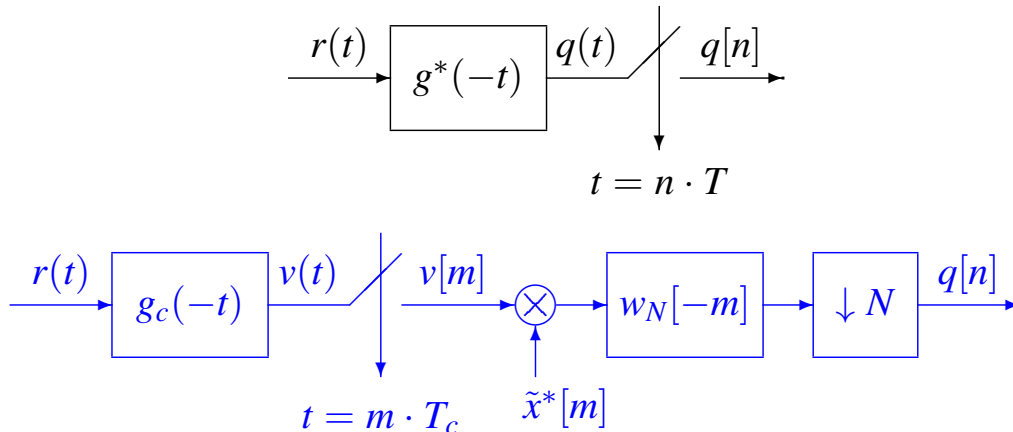
Receptor en banda base - Diagrama de bloques

- Expresión para la salida del demodulador

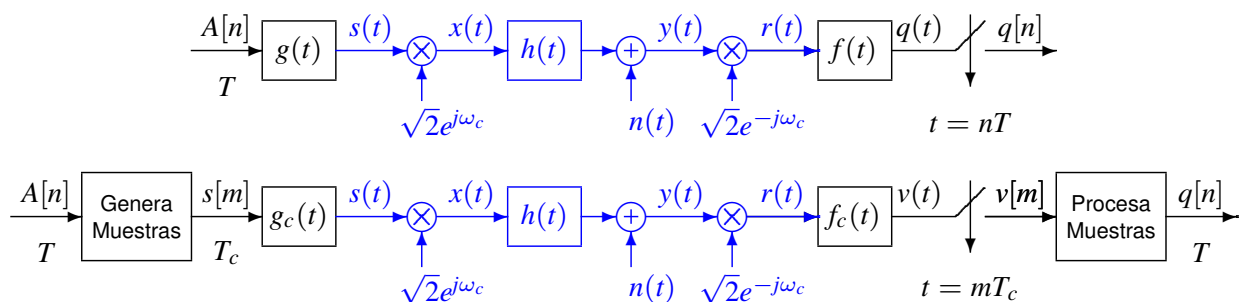
$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \cdot v[nN + m]$$

$$= (v[m] \cdot \tilde{x}^*[m]) * w_N[-m - nN]$$

- Diagrama de bloques del receptor



Canales discretos equivalentes



- Filtros receptores - filtros adaptados: $f(t) = g^*(-t)$, $f_c(t) = g_c(-t)$
- Respuestas conjuntas transmisor/receptor/canal
 - ▶ Transmisión de $A[n]$ a tiempo de símbolo: $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) = r_g(t) * h_{eq}(t)$
 - ▶ Transmisión de $s[m]$ a tiempo de chip: $d(t) = g_c(t) * h_{eq}(t) * f_c(t) = r_{g_c}(t) * h_{eq}(t)$
- Canales discretos equivalentes
 - ▶ A tiempo de símbolo

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} = p(nT) \text{ relaciona } q[n] \text{ con } A[n]: q[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$

- ▶ A tiempo de chip

$$d[m] = d(t)|_{t=mT_c} = d(mT_c) \text{ relaciona } v[m] \text{ con } s[m]: v[m] = s[m] * d[m] + z_c[m]$$

Características de ruido del receptor

- El canal introduce ruido aditivo blanco y gaussiano $n(t)$ con DEP $S_n(j\omega)$
 - Si se cumplen las siguientes condiciones
 - ▶ $f(t) = g^*(-t)$
 - ▶ $n(t)$ es blanco y $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz
- $z[n]$ es blanco y con varianza

$$\sigma_z^2 = N_0 \cdot \mathcal{E} \{g(t)\}$$

Parte real e imaginaria independientes y con varianzas $\frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E} \{g(t)\}$
 $z_c[m]$ es blanco y con varianza

$$\sigma_{z_c}^2 = N_0 \cdot \mathcal{E} \{g_c(t)\}$$

Parte real e imaginaria independientes y con varianzas $\frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E} \{g_c(t)\}$

Energía de los pulsos $g_c(t)$ y $g(t)$

- Definición del pulso a tiempo de símbolo $g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c)$
- Energía del pulso $g(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c) \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] \cdot g_c(t - \ell T_c) \right) dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t - mT_c) \cdot g_c(t - \ell T_c) dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g_c(\tau) \cdot g_c(\tau - \ell T_c + mT_c)}_{r_{g_c}([\ell - m]T_c)} d\tau \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \right] \times \mathcal{E} \{g_c(t)\} \end{aligned}$$

NOTA: Si $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c , $r_{g_c}([\ell - m]T_c)$ es nulo para $\ell \neq m$, y para $\ell = m$ (propiedad de una función de ambigüedad temporal) vale la energía de $g_c(t)$, es decir $r_{g_c}([\ell - m]T_c) = \mathcal{E} \{g_c(t)\} \delta[\ell - m]$

Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo, $p[n]$

- El filtro receptor es $f(t) = g^*(-t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot g_c(t - mT_c), f(t) = g^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] \cdot g_c(-t - \ell T_c)$$

- Canal discreto equivalente

$$p[n] = (g(t) * h_{eq}(t) * f(t)) \Big|_{t=nT}$$

$$\begin{aligned} p[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \cdot \left(g_c(t - mT_c) * h_{eq}(t) * g_c(\underbrace{-t - \ell T_c}_{-(t+\ell T_c)}) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \cdot \left(\underbrace{g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c(-t)}_{d(t)} \right) \Big|_{t=\underbrace{nT + \ell T_c - mT_c}_{(nN+\ell-m)T_c}} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \cdot d[nN + \ell - m] \end{aligned}$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo

- Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \cdot d[nN + \ell - m]$$

- Factor de ensanchado $N = 10$

- ▶ Secuencia de ensanchado

$$x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6], x[7], x[8], x[9]$$

- Canal discreto equivalente a tiempo de chip

$$d[m] = a \cdot \delta[m] + b \cdot \delta[m - 2] + c \cdot \delta[m - 14]$$

- ▶ Valores no nulos de $d[nN + \ell - m]$

- ★ $nN + \ell - m = 0$

- ★ $nN + \ell - m = 2$

- ★ $nN + \ell - m = 14$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (II)

- Caso $nN + \ell - m = 0 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = a$

- ▶ $n = 0 \rightarrow \ell - m = 0 \rightarrow \ell = m$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m] = \sum_{m=0}^9 |x[m]|^2 = a_1$$

- Caso $nN + \ell - m = 2 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = b$

- ▶ $n = 0 \rightarrow \ell - m = 2 \rightarrow \ell = m + 2$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m+2] = \sum_{m=0}^7 x[m] \cdot x^*[m+2] = b_1$$

- ▶ $n = 1 \rightarrow N + \ell - m = 2 \rightarrow \ell = m - 8$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m-8] = \sum_{m=8}^9 x[m] \cdot x^*[m-8] = b_2$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (III)

- Caso $nN + \ell - m = 14 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = c$

- ▶ $n = 1 \rightarrow N + \ell - m = 14 \rightarrow \ell = m + 4$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m+4] = \sum_{m=0}^5 x[m] \cdot x^*[m+4] = c_1$$

- ▶ $n = 2 \rightarrow 2N + \ell - m = 14 \rightarrow \ell = m - 6$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m-6] = \sum_{m=6}^9 x[m] \cdot x^*[m-6] = c_2$$

- Canal discreto equivalente

$$\begin{aligned} p[n] &= (a \times a_1 + b \times b_1) \cdot \delta[n] \\ &\quad + (b \times b_2 + c \times c_1) \cdot \delta[n-1] \\ &\quad + (c \times c_2) \cdot \delta[n-2] \end{aligned}$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (IV)

- Secuencia de ensanchado

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[m]$	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1

- Valores relacionados con $p[n]$, para $a = 1$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$

$$a_1 = 10, b_1 = -2, b_2 = 0, c_1 = +2, c_2 = 0$$

$$p[n] = \frac{21}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - 1]$$

- ▶ Términos relacionados con la ISI

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m - k_a], \quad \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m + k_b]$$

Condiciones para evitar la ISI

- No hay interferencia intersimbólica si $d[m] = C \cdot \delta[m]$
 - ▶ Si no hay interferencia sobre $s[m]$ no hay interferencia sobre $A[n]$
- Si $d[m] \neq C \cdot \delta[m]$, la ISI se evita si

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[m \pm k] = C \cdot \delta[k]$$

lo que se cumple cuando

- ▶ La función de ambigüedad de $x[m]$ es una delta
- ▶ $|X(e^{j\omega T_c})|^2$ es constante
- Ejemplos de secuencias con espectro (casi) plano
 - ▶ $x[m] = e^{j\theta} \cdot \delta[m - k]$ (problema: localización)
 - ▶ Secuencias de pseudo-ruido

Energía de los pulsos $g_c(t)$ y $g(t)$ - Implicación práctica

- Transmisión sobre un canal ideal ($h_{eq}(t) = \delta(t)$)
- Canal discreto equivalente a tiempo de chip

$$d[m] = d(t)|_{t=mT_c} = (g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c(-t))|_{t=mT_c} = r_{g_c}(t)|_{t=mT_c} = \mathcal{E}\{g_c(t)\} \cdot \delta[m]$$

- Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] \cdot x^*[\ell] \cdot d[nN + \ell - m]$$

- ▶ Dado $d[m]$, términos no nulos sólo para $nN + \ell - m = 0$
 - ★ Esto sólo es posible si $n = 0$ y $\ell = m$

$$p[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \times \mathcal{E}\{g_c(t)\} \right] \cdot \delta[n] = \mathcal{E}\{g(t)\} \cdot \delta[n]$$

NOTA: $p[n] = p(t)|_{t=nT} = (g(t) * h_{eq}(t) * g(-t))|_{t=nT} = r_g(t)|_{t=nT} = \mathcal{E}\{g(t)\} \cdot \delta[n]$

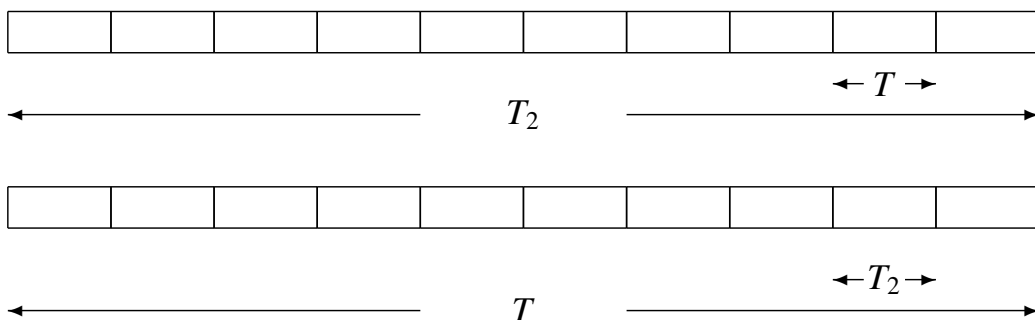
Espectro ensanchado por salto en frecuencia

FHSS: *Frequency Hopping Spread Spectrum*

- Canal con “valles” de atenuación
 - ▶ Repartir casos favorables y desfavorables
 - ★ Frecuencia portadora con cambios periódicos
 - ★ Período de salto T_2

- Clasificación

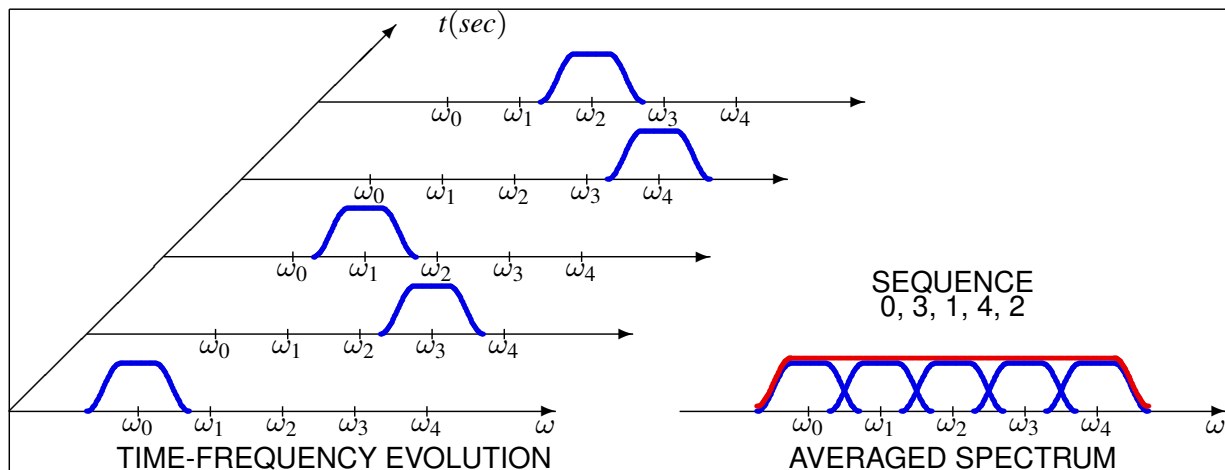
- ▶ De salto lento: $T_2/T = N \in \mathbb{Z} > 1$
- ▶ De salto rápido: $T/T_2 = N \in \mathbb{Z} > 1$



- Se puede implementar para múltiples modulaciones
 - ▶ Opción más utilizada: FSK de fase continua (CPFSK)

Espectro FHSS - Evolución cíclica en el tiempo

- Saltos en frecuencia guiados por una secuencia de ensanchado
 - ▶ Secuencia pseudoaleatoria que define el orden de portadoras en los saltos
 - ▶ Debe ser conocida por transmisor y receptor
- Ejemplo usando 5 portadoras



Expresiones para una CPFSK

- Señal CPFSK M -aria: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi}{T} t \right) \cdot w_T(t - nT)$$

- Señal de espectro ensanchado de salto lento

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_m \sum_{n=0}^{T_2/T-1} \text{sen} \left(\omega_c t + x[m] \frac{\pi}{T} t + I[n + mN] \frac{\pi}{T} t \right) \cdot w_{T_2}(t - nT - mT_2)$$

- Señal de espectro ensanchado de salto rápido

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \sum_{m=0}^{T/T_2-1} \text{sen} \left(\omega_c t + x[m + nN] \frac{\pi}{T_2} t + I[n] \frac{\pi}{T_2} t \right) \cdot w_{T_2}(t - nT - mT_2)$$

- $x[m]$: secuencia determinista que hace variar la frecuencia ($2kM$)

Acceso al medio de múltiples usuarios - CDMA

- Una de las aplicaciones del espectro ensanchado es el acceso múltiple
 - ▶ Varios usuarios acceden simultáneamente al sistema utilizando la misma banda de frecuencias
 - ★ Acceso por división de código
CDMA: *Code Division Medium Acces*
- Cada usuario utiliza una secuencia de ensanchado diferente
 - ▶ Código de usuario
- Las condiciones para seleccionar secuencias de ensanchado apropiadas dependen de la variante particular de espectro ensanchado

CDMA - DSSS

- Parámetros idénticos para todos los usuarios
 - ▶ $g_c(t), T, T_c$
- Señales multiusuario CDMA: L usuarios
 - ▶ Cada usuario tiene una secuencia de ensanchado $x_i[m]$
 - ▶ Pulso a tiempo de símbolo para el usuario i -ésimo

$$g_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] \cdot g_c(t - m \cdot T_c)$$

- ▶ Señal compleja en banda base

$$s(t) = \sum_{i=0}^{L-1} s_i(t)$$

$$s_i(t) = \sum_n A_i[n] \cdot g_i(t - nT) = \sum_n \sum_{m=0}^{N-1} A_i[n] \cdot x_i[m] \cdot g_c(t - mT_c - nT)$$

- Separación de cada usuario
 - ▶ Pulsos ortogonales

Condición de ortogonalidad de los pulsos

- Producto escalar de dos pulsos distintos a período de símbolo

$$\begin{aligned}
 \langle g_i(t), g_j(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) \cdot g_j^*(t) dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m] \cdot x_j^*[\ell] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t - mT_c) \cdot g_c^*(t - \ell T_c) dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m] \cdot x_j^*[\ell] \cdot (g_c(t - mT_c) * g_c^*(-t - \ell T_c))_{t=0} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] \cdot x_j^*[m]
 \end{aligned}$$

- Condición de ortogonalidad sobre las secuencias de código

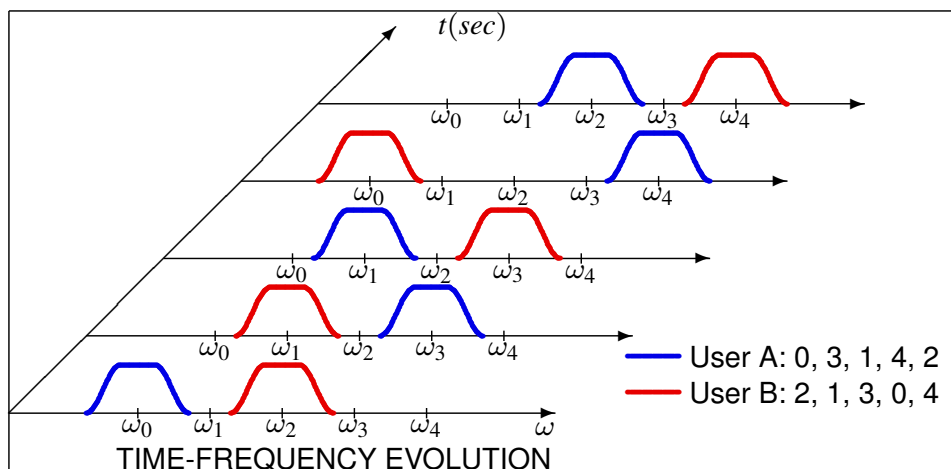
$$\sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] \cdot x_j^*[m] = C \cdot \delta[i - j], \quad i, j = 0, \dots, L - 1$$

- Varios tipos de secuencias se usan en la práctica

- ▶ Secuencias de Gold (1967), código de Kasami, secuencias de Welch,...

CDMA - FH-SS

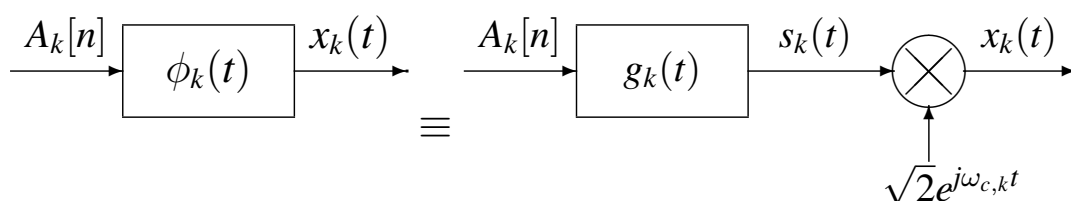
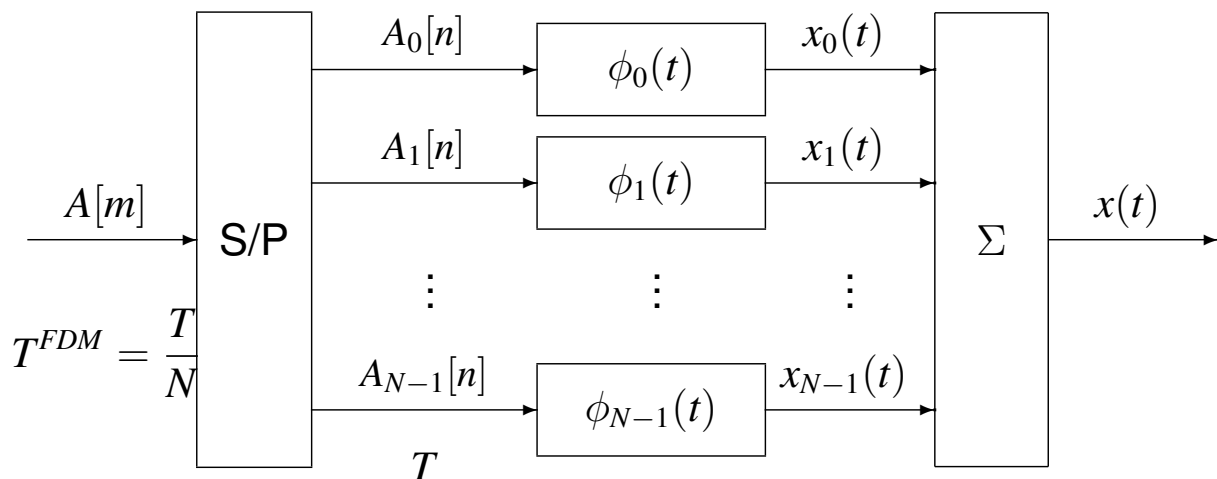
- Usuarios diferentes usan distintas secuencias de ensanchado
 - ▶ Las secuencias no deben producir solapamiento espectral en ningún instante
- Ejemplo simple con 5 portadoras y dos usuarios



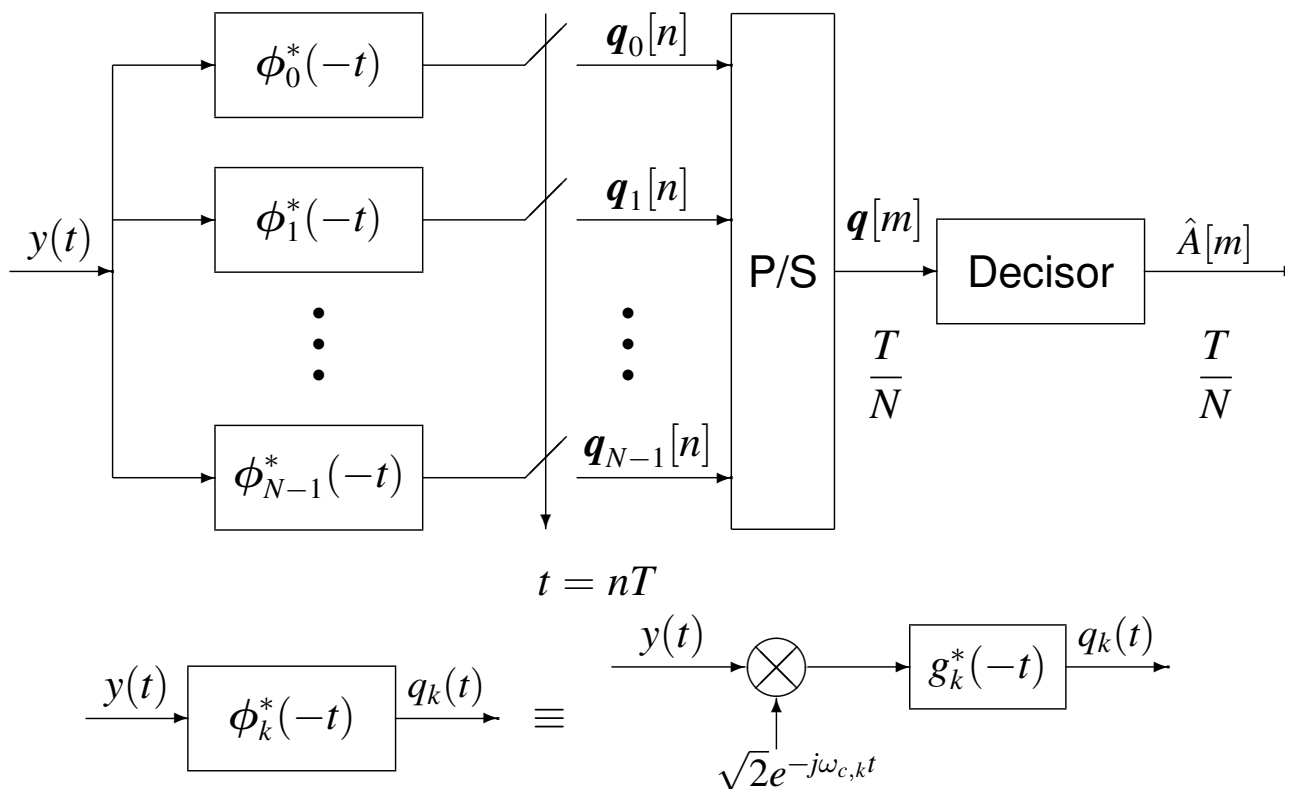
Modulación con múltiples portadoras - FDM

- FDM - Frequency division multiplex
- División del ancho de banda disponible (W^{FDM} rad/s) en N subcanales
 - ▶ Ancho de banda de cada subcanal: $W = \frac{W^{FDM}}{N}$ rad/s
 - ▶ Secuencia de datos $A[n]$ dividida en N secuencias
 - ▶ Transmisión de una señal en cada subcanal (p.e. PAM)
 - ▶ Tasa de cada subcanal: $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
 - ▶ Tasa total: $R_s^{FDM} = \frac{1}{T^{FDM}} = N \times R_s$ baudios
 - ▶ Utilizando filtros de la familia coseno alzado: $W = \frac{2\pi}{T} \cdot (1 + \alpha)$
- Transmisor
 - ▶ Conversión serie / paralelo: $A[m] \rightarrow \{A_0[n], \dots, A_{N-1}\}$
 - ▶ N ramas con señales PAM paso banda
 - ★ Filtro transmisor en la rama k -ésima: $\phi_k(t)$, $k = 0, \dots, N - 1$
 - Parámetros: filtro transmisor $g_k(t)$, frecuencia central $\omega_{c,k}$
 - ★ Señal modulada en la rama k -ésima: $x_k(t)$
- Receptor
 - ▶ N filtros adaptados al transmisor
 - ▶ Conversión paralelo serie: $\{\hat{A}_0[n], \dots, \hat{A}_{N-1}\} \rightarrow \hat{A}[m]$

Modulador FDM



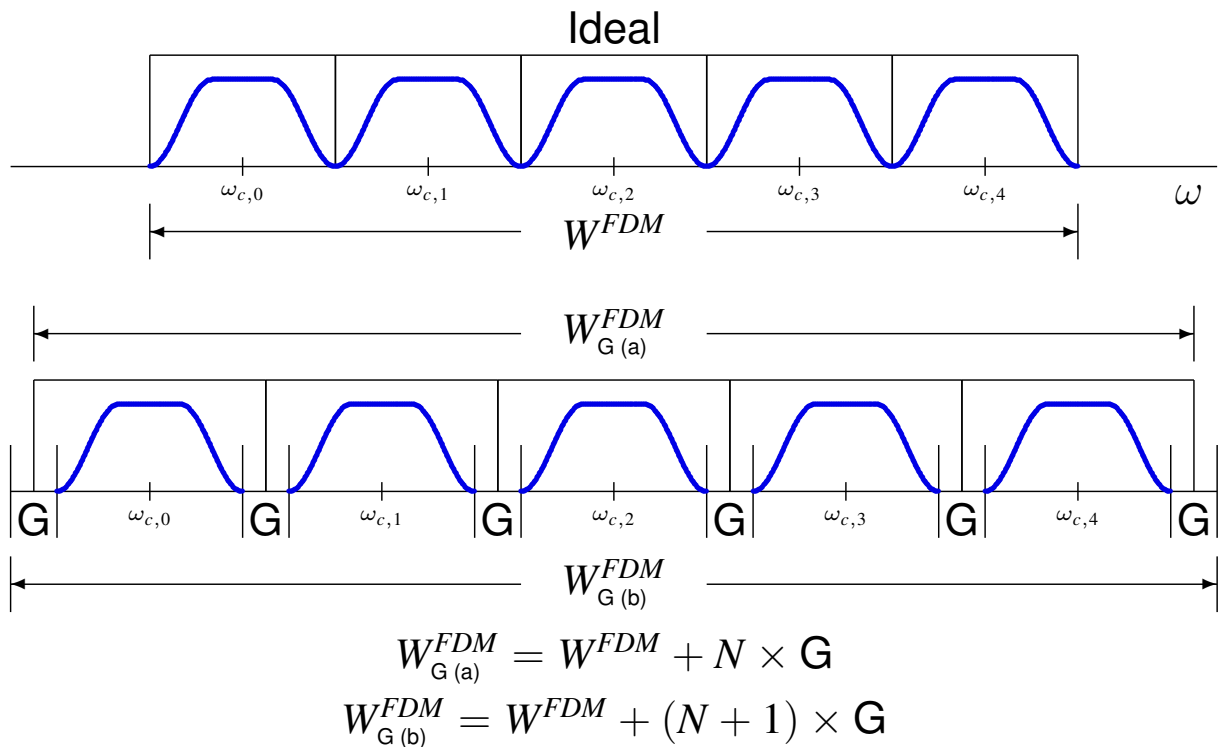
Demodulador FDM



Inconvenientes solución FDM

- Complejidad hardware del sistema
 - ▶ N filtros transmisores (paso banda: componentes en fase y cuadratura)
 - ▶ N moduladores / demoduladores (paso banda)
 - ▶ N filtros complejos
 - ▶ N muestreadores síncronos (paso banda)
- Se necesitan filtros ideales para optimizar el uso del ancho de banda disponible
 - ▶ Sin filtros ideales, hay que introducir intervalos de guarda para separar los canales
 - ★ Pérdida de eficiencia espectral
- Solución alternativa:
 - ▶ Modulación FDM ortogonal (OFDM)
 - ★ N pulsos ortogonales (con solapamiento espectral)
 - ★ Uso eficiente del ancho de banda disponible
 - ★ Implementación eficiente: baja complejidad hardware

FDM - Bandas de guarda



NOTA: en algunos sistemas, las guardas en ambos extremos son de la mitad (a)

Modulación OFDM en tiempo continuo

- Señal modulada en términos de la señal compleja en banda base

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}\{s(t) \cdot e^{j\omega_c t}\}$$

Notación habitual para señales moduladas paso banda

- Señal compleja en banda base

- ▶ Suma de N señales, una para cada secuencia de datos $A_k[n]$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_n A_k[n] \cdot \phi_k(t - nT)}_{s_k(t)}$$

Cada señal $s_k(t)$ es una señal PAM con filtro transmisor $\phi_k(t)$

- N pulsos: pulso prototipo $\times N$ diferentes portadoras

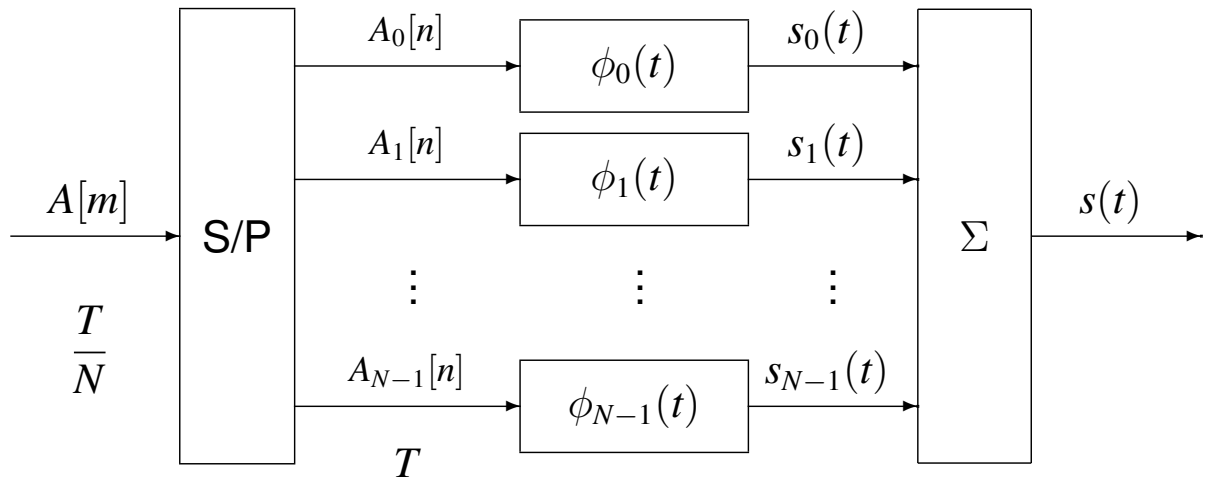
- ▶ Pulso $\phi_k(t)$: k períodos de una exponencial compleja normalizada en T seg.

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot w_T(t) \cdot e^{j\frac{2\pi k}{T} \cdot t}$$

$w_T(t)$: ventana temporal causal de duración T segundos $w_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Modulador OFDM en tiempo continuo

- Conversión serie paralelo de secuencia de símbolos $A[m]$
 - ▶ Secuencias $A_k[n]$, $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$
 - ▶ Tiempo de símbolo de cada secuencia $A_k[n]$: T
 - ▶ Tiempo de símbolo total (sobre $A[m]$): $\frac{T}{N}$



Ortonormalidad de los pulsos

- Los pulsos OFDM forman una base ortonormal
El producto escalar es

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_k, \phi_\ell \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\frac{2\pi k}{T} \cdot t} \cdot e^{-j\frac{2\pi \ell}{T} \cdot t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T} \cdot t\right) dt + j\frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T} \cdot t\right) dt \\
 &= \delta[k-\ell]
 \end{aligned}$$

- Relación de los pulsos con el pulso prototipo $\phi_0(t)$

$$\phi_k(t) = \phi_0(t) \cdot e^{\frac{2\pi k}{T} \cdot t}$$

$$\phi_k(t - nT) = \phi_0(t - nT) \cdot e^{\frac{2\pi k}{T} \cdot (t - nT)} = \phi_0(t - nT) \cdot e^{\frac{2\pi k}{T} \cdot t}$$

Espectro de la OFDM en tiempo continuo

- Respuesta en frecuencia de los pulsos

$$|\Phi_k(j\omega)|^2 = T \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{T}) T}{2\pi} \right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- $A_k[n]$ y $A_\ell[n]$ no están correladas y $A_k[n]$ es blanca $\forall k$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \cdot |\Phi_k(j\omega)|^2$$

$E_{s,k}$: Energía media por símbolo de la constelación de la secuencia $A_k[n]$

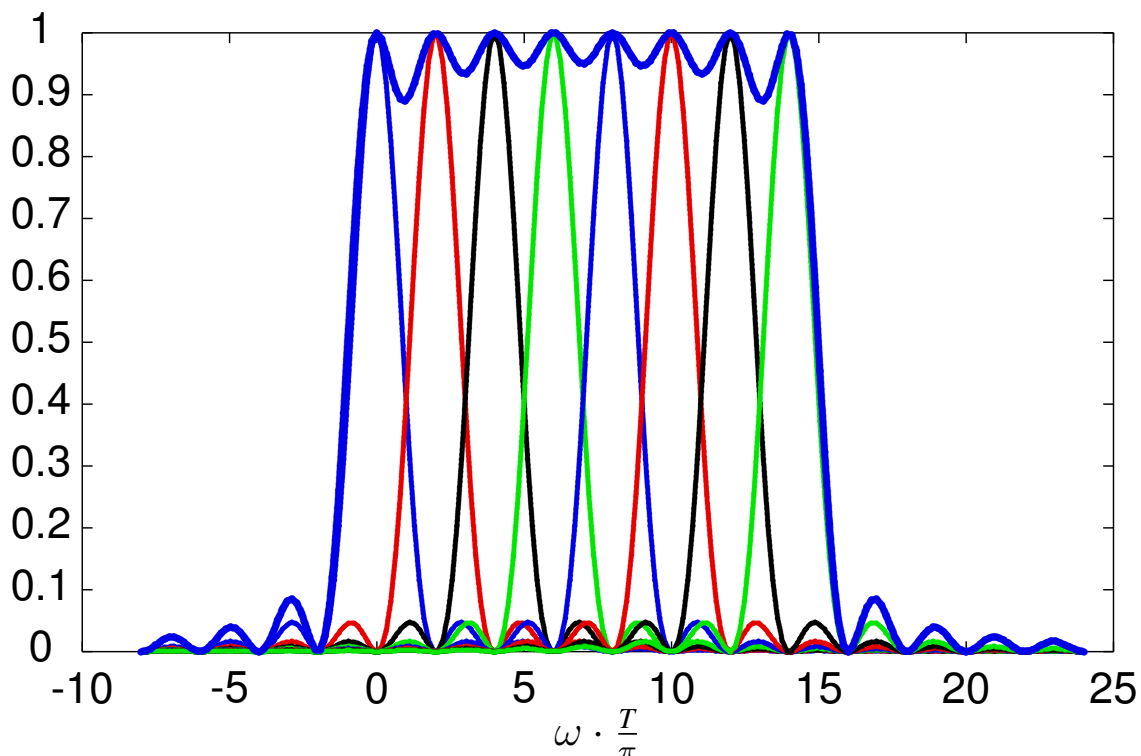
- Potencia de la señal transmitida

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k}$$

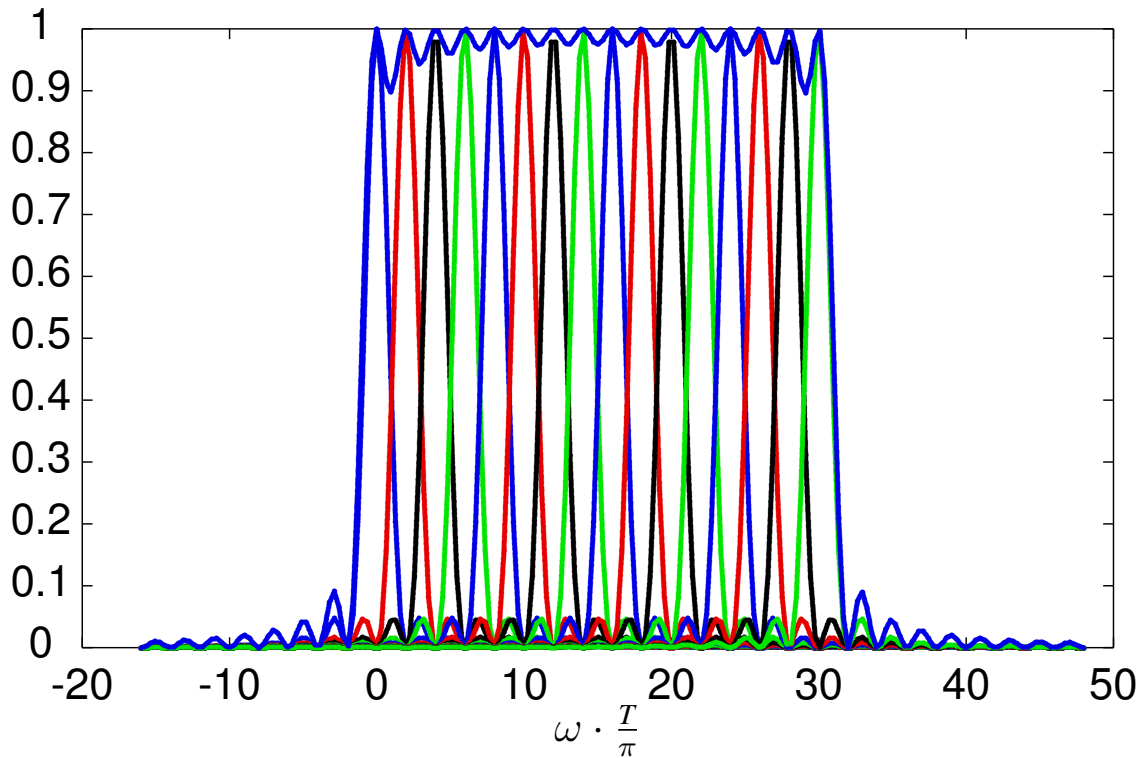
- Cuando las constelaciones de las N secuencias son idénticas

$$P_S = \frac{E_s}{T} \times N = E_s \times R_s \times N \text{ Watts}$$

Espectro OFDM en tiempo continuo - $N = 8$



Espectro OFDM en tiempo continuo - $N = 16$



Espectro asintóticamente plano

- Si se consideran infinitas portadoras y constelaciones idénticas

$$\begin{aligned} S_s(j\omega) &= E_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{T}) T}{2\pi} \right) \\ &= E_s \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \end{aligned}$$

- La densidad espectral de potencia es plana si se cumple

$$\frac{E_s}{T} \cdot (\phi_0(t) * \phi_0(-t)) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = C \cdot \delta(t)$$

Modulación OFDM en tiempo discreto

- Aproximación: se considera ancho de banda limitado
Ancho de banda aproximado es $W^{OFDM} = \frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad./s}$
- Alternativa para la generación de la señal
 - ▶ Síntesis de muestras de la señal a la velocidad dada por Nyquist
Con la aproximación, significa tomar muestras cada T/N s
 - ▶ Conversión Digital / Analógica (reconstrucción a T/N)
- Procedimiento de generación de la señal

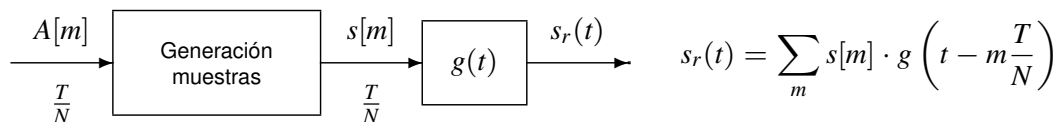
- ▶ Obtención de las muestras de la señal (generación *software*)
 - ★ Dependerán de los símbolos transmitidos

$$s[m] = s(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}} = s\left(m\frac{T}{N}\right)$$

- ▶ Reconstrucción de la señal (conversión D/A)

- ★ Filtro de reconstrucción ideal (interpolación con sincs a $\frac{T}{N}$)

$$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{N}{T} \cdot t\right), \quad G(j\omega) = \frac{T}{N} \cdot \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right)$$



NOTA: La señal reconstruida $s_r(t) \neq s(t)$ ($s_r(t)$ es una señal de ancho de banda $\frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad/s}$)

Muestras de la señal en el primer intervalo de símbolo

- Expresión analítica de las muestras en el intervalo $0 \leq t < T$
Primeras N muestras: $m \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$
 - ▶ Instantes de tiempo asociados

$$t = m\frac{T}{N} \rightarrow \left\{0, \frac{T}{N}, 2\frac{T}{N}, \dots, (N-1)\frac{T}{N}\right\}$$

- Expresión de la señal OFDM en tiempo continuo

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_n A_k[n] \cdot \phi_k(t - nT), \quad \phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot w_T(t) \cdot e^{\frac{2\pi k}{T}t}$$

NOTA: en $0 \leq t < T$, $\phi(t - nT)$ es sólo distinto de cero para $n = 0$

- Señal y muestras de la señal en ese primer intervalo de símbolo

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \cdot \phi_k(t), \quad s[m] = s\left(m\frac{T}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \cdot \phi_k\left(m\frac{T}{N}\right)$$

- ▶ Expresión equivalente para estas muestras

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{T} \cdot m\frac{T}{N}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m}$$

Muestras de la señal a través de la DFT inversa

- DFT y DFT inversa (IDFT) de secuencias de N muestras
Para $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$X[k] = \text{DFT}_N\{x[m]\}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot m}$$

$$x[m] = \text{IDFT}_N\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m}$$

- Muestras de la señal (en el primer intervalo de símbolo)

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m}$$

- Identificación de términos en la IDFT

$$X[k] \equiv A_k[0], \text{ distintos factores de escala } \frac{1}{N} \text{ vs } \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Por tanto

$$s[m] = \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N\{A_k[0]\}$$

Expresión general para las muestras

- Muestras de la señal OFDM

$$\begin{aligned} s[m] &= \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot \phi_k(mT/N - nT) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot (m-nN)} \cdot w_N[m - nN] \end{aligned}$$

$$w_N[m]: \text{ventana causal en tiempo discreto de } N \text{ muestras } w_N[m] = \begin{cases} 1 & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- ▶ Generación de secuencia $s[m]$ por bloques de N muestras

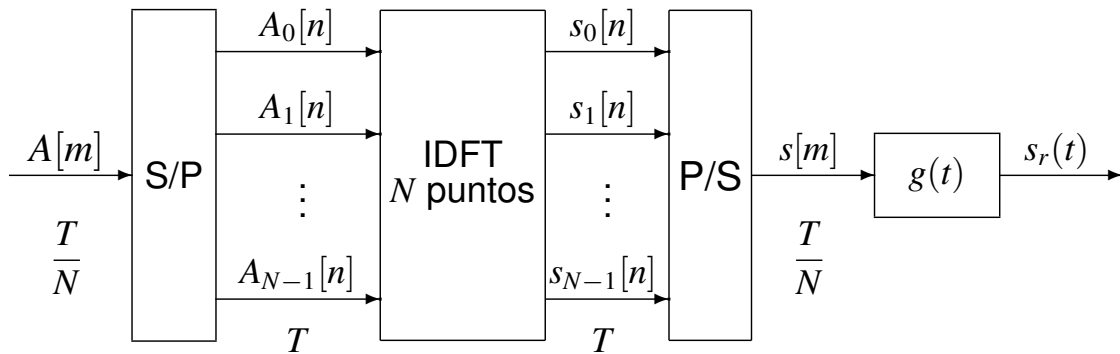
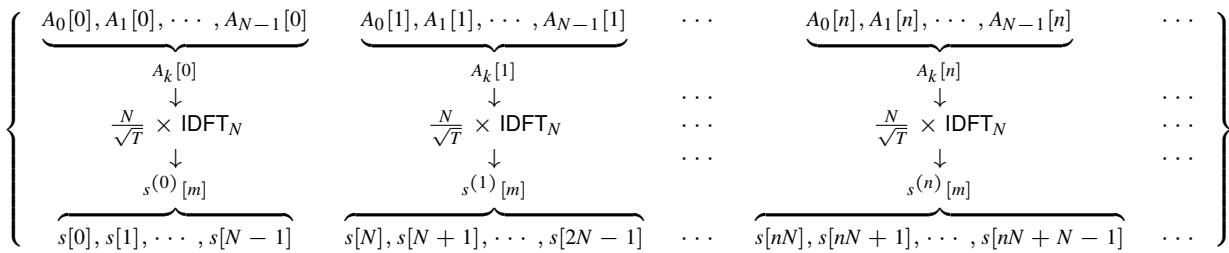
$$\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N(\{A_0[n], A_1[n], \dots, A_{N-1}[n]\}) \rightarrow \{s[nN], s[nN+1], \dots, s[(n+1)N-1]\}$$

Notación: bloque de índice n : $s^{(n)}[m] = s[nN+m]$

$$\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N(\{A_k[n]\}_{k=0}^{N-1}) \rightarrow \{s^{(n)}[m]\}_{m=0}^{N-1}$$

Modulador OFDM en tiempo discreto

Generación de muestras



$$s_r(t) = \sum_m s[m] \cdot g(t - mT/N)$$

Base ortonormal en tiempo discreto

- Funciones base en tiempo discreto

$$\xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \cdot w_N[m], \quad k = 0, \dots, N - 1$$

- Base ortonormal

$$\langle \xi_k, \xi_\ell \rangle = \sum_m \xi_k[m] \cdot \xi_\ell^*[m] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{N} \cdot m} = \delta[k - \ell]$$

- Muestras de la señal: expansión sobre la base ortonormal

$$s[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \cdot \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot \xi_k[m - nN]$$

Base ortonormal equivalente en tiempo continuo

- Expresión de la señal reconstruida

$$s_r(t) = \sum_m s[m] \cdot g(t - mT/N)$$

$$s_r(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \cdot \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot \sum_m \xi_k[m - nN] \cdot g(t - mT/N)$$

$$s_r(t) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot \hat{\phi}_k(t - nT)$$

- Funciones base equivalentes en tiempo continuo

$$\hat{\phi}_k(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \cdot \sum_m \xi_k[m] \cdot g(t - mT/N)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \cdot \text{sinc}\left(\frac{N}{T} \cdot (t - mT/N)\right)$$

Ortonormalidad de las funciones base equivalentes

$$\langle \hat{\phi}_k, \hat{\phi}_\ell \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k(t) \cdot \hat{\phi}_\ell^*(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} e^{-j\frac{2\pi \ell}{N} \cdot i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t - mT/N) \cdot g(t - iT/N) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - mT/N) \cdot g(\tau - iT/N) d\tau = (g(t) * g(-t))|_{t=(m-i)T/N}$$

Teniendo en cuenta que $g(t)$ cumple el criterio de Nyquist a T/N

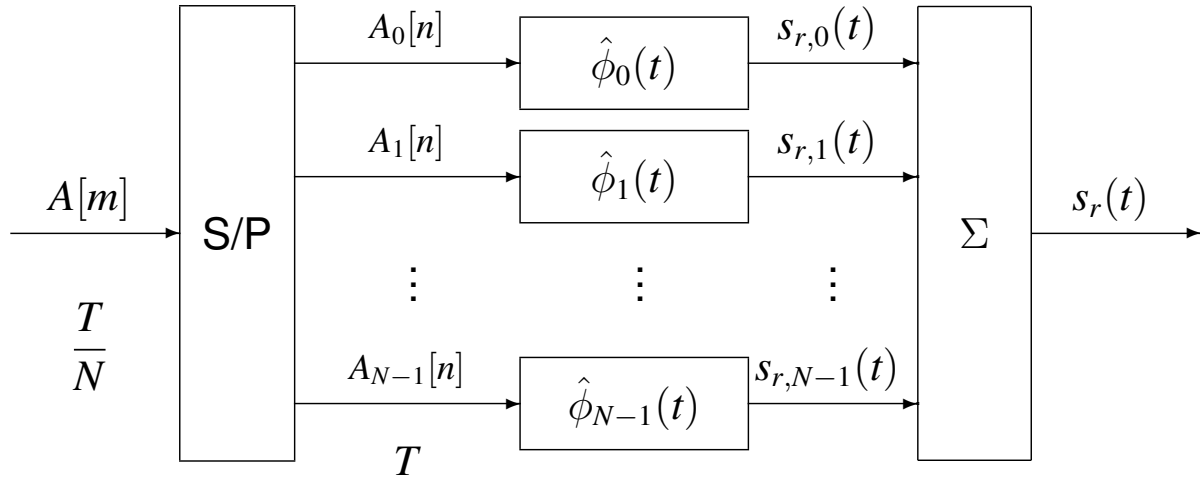
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - mT/N) \cdot g(\tau - iT/N) d\tau = \frac{T}{N} \cdot \delta[m - i]$$

$$\langle \hat{\phi}_k, \hat{\phi}_\ell \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{N} \cdot m} = \delta[k - \ell]$$

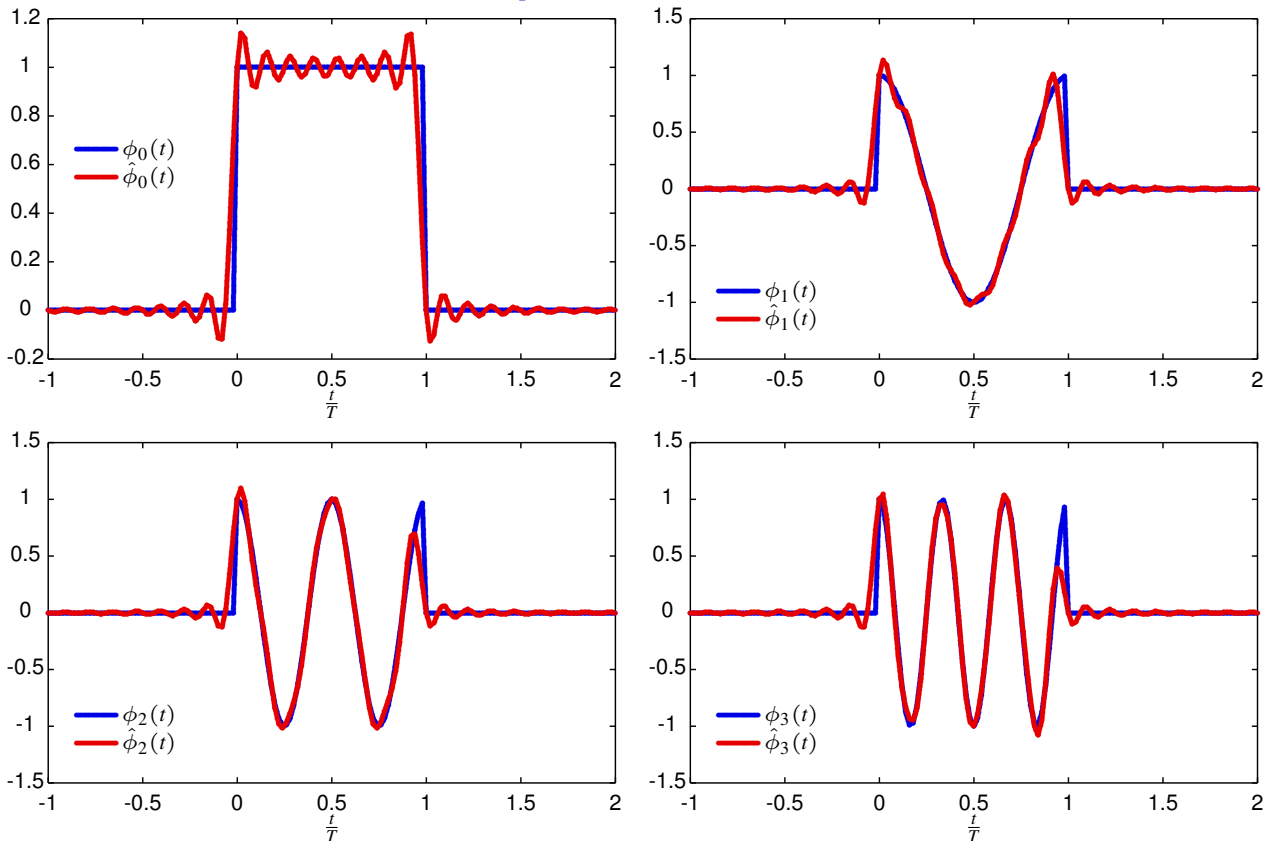
Modulador OFDM en tiempo discreto (equivalente)

- Estructura del modulador en función de las funciones base equivalentes

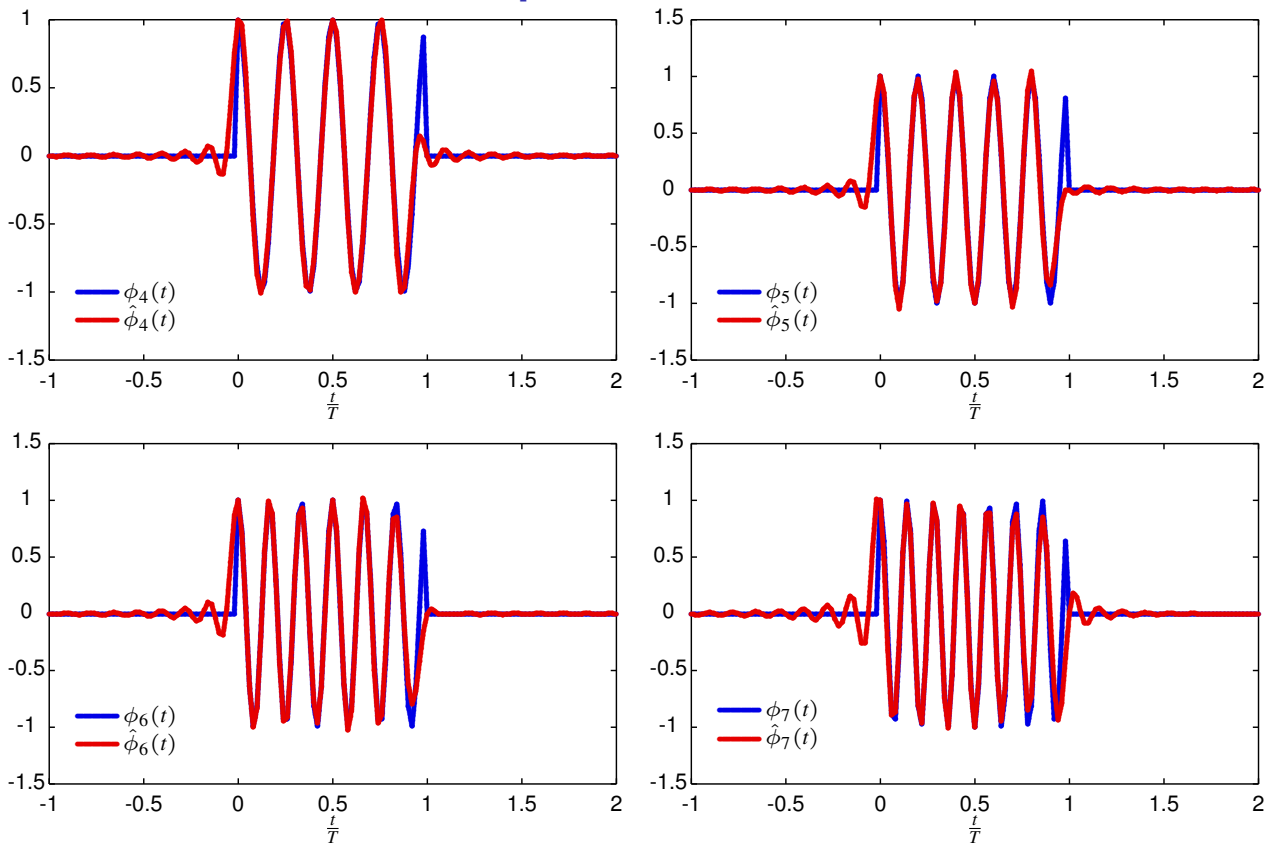
- ▶ Esquema conceptual
- ▶ No se usa para la implementación, sino para el análisis



Funciones base en tiempo discreto



Funciones base en tiempo discreto



Espectro de OFDM en tiempo discreto

- Densidad espectral de potencia

$$S_{sr}(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \cdot \left| \hat{\Phi}_k(j\omega) \right|^2$$

- Respuesta en frecuencia de las funciones base discretas

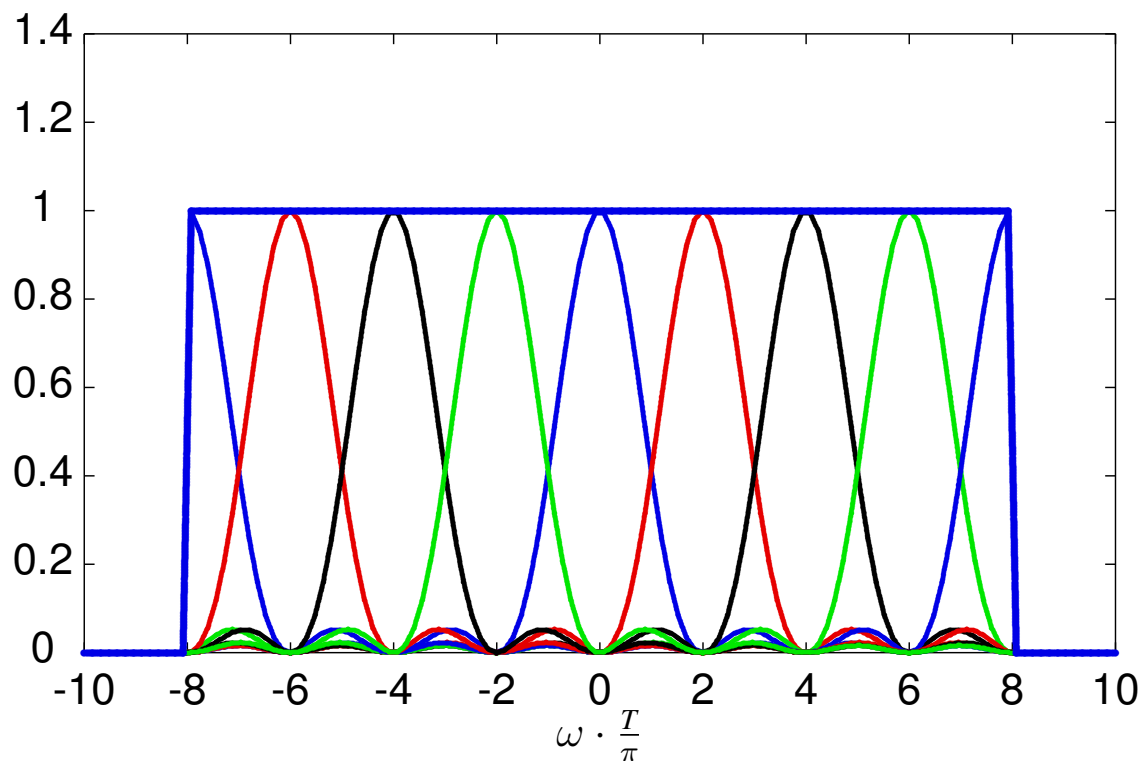
$$\left| \Xi_k(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2[(\omega - 2\pi k/N)N/2]}{\text{sen}^2[(\omega - 2\pi k/N)/2]}$$

- Respuesta en frecuencia de las funciones base continuas

$$\left| \hat{\Phi}_k(j\omega) \right|^2 = \frac{N}{T} \cdot \left| \Xi_k\left(e^{j\omega \frac{T}{N}}\right) \right|^2 \cdot \left(\frac{T}{N}\right)^2 \cdot \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right)$$

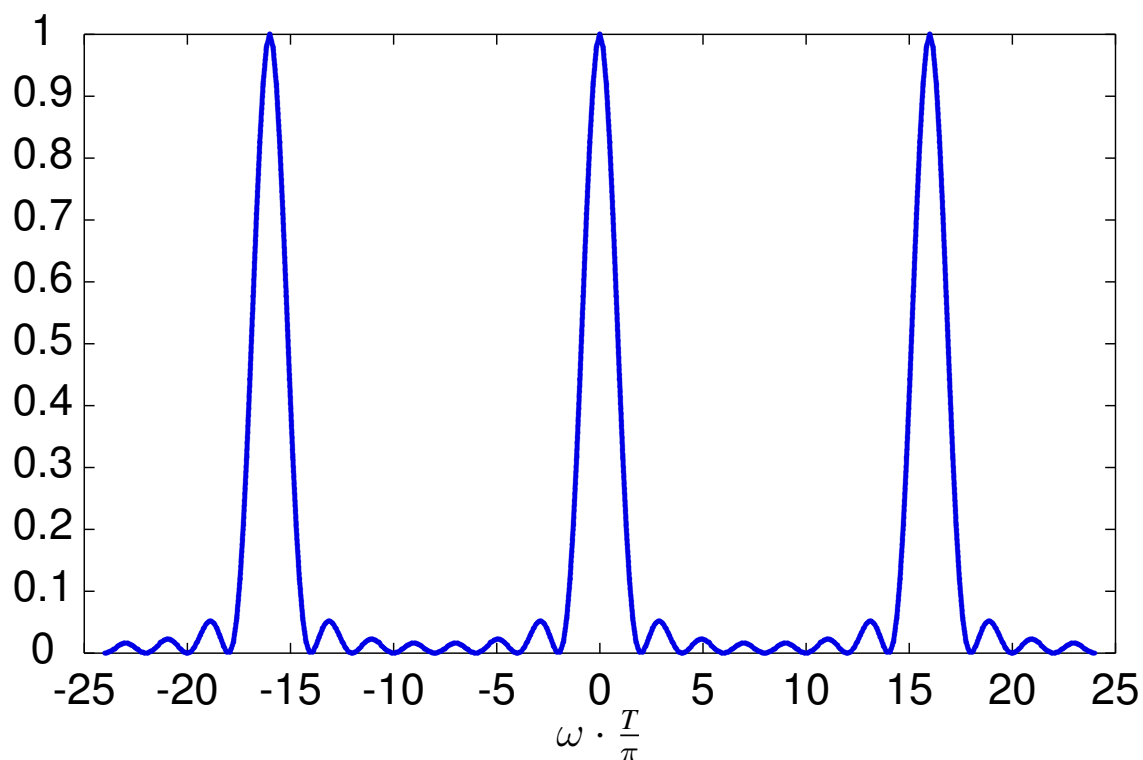
$$\left| \hat{\Phi}_k(j\omega) \right|^2 = \frac{T}{N^2} \cdot \frac{\text{sen}^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2]}{\text{sen}^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2N]}, \quad |\omega| < \frac{\pi}{T} \cdot N$$

Espectro OFDM en tiempo discreto - $N = 8$



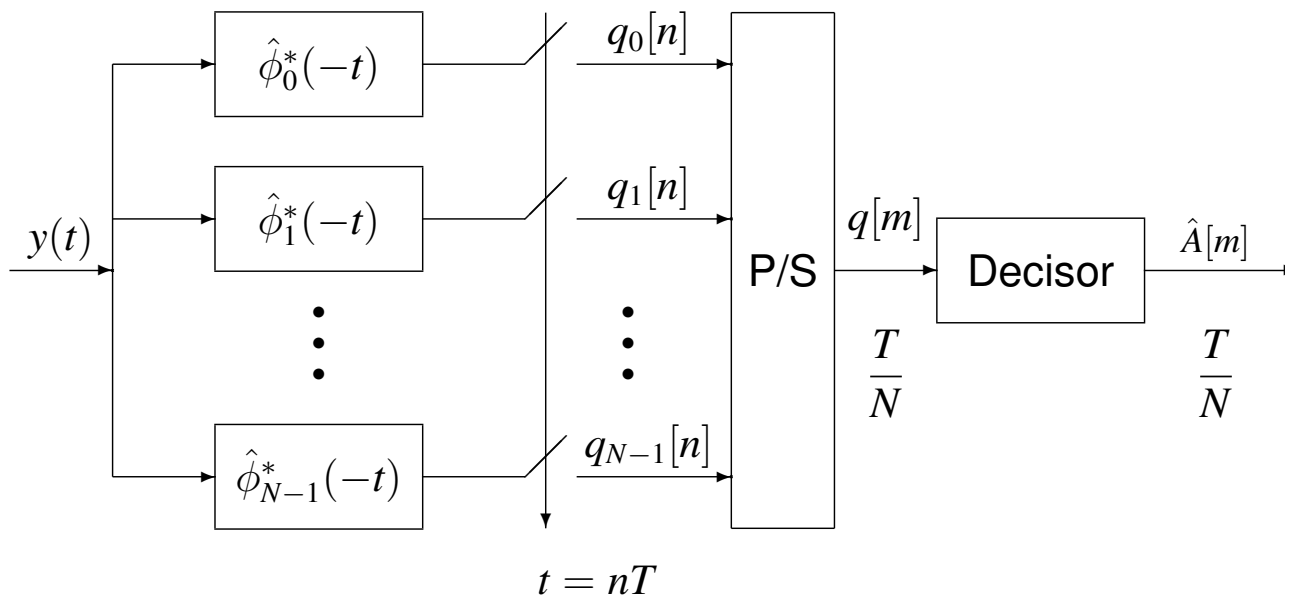
Espectro OFDM en tiempo discreto - Periodicidad de

$$|\Xi_k(e^{j\omega T})|^2$$



Receptor para OFDM en tiempo discreto

- Estructura del receptor en función de las funciones base equivalentes (banco de N filtros adaptados)
 - ▶ Esquema conceptual
 - ▶ No se usa para la implementación, sino para el análisis



Ruido en el receptor

- Filtro receptor para la portadora de índice k : $\sqrt{2} \cdot f_k(t)$
- Densidad espectral de potencia de la secuencia de ruido en esa portadora, $z_k[n]$

$$S_{z_k}(e^{j\omega}) = \frac{2}{T} \cdot \sum_i S_n \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{\omega_c}{T} - j\frac{2\pi i}{T} \right) \cdot \left| F_k \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi i}{T} \right) \right|^2$$

- $f_k(t) = \hat{\phi}_k^*(-t)$
 - ▶ Normalizado, $r_{f_k}(t)$ cumple Nyquist
- $n(t)$: blanco, gaussiano, estacionario $S_n(j\omega) = N_0/2$
 - ▶ $z_k[n]$ blanco, gaussiano, circularmente simétrico

$$\sigma_{z_k}^2 = N_0, \quad k = 0, \dots, N-1$$

- ▶ Una consecuencia de la ortogonalidad de los pulsos de cada portadora

$$E\{z_i[n] \cdot z_k^*[n]\} = 0, \quad \text{if } i \neq k$$

Receptor para OFDM en tiempo discreto

- Filtros adaptados

$$\hat{\phi}_k^*(-t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \cdot \sum_m \xi_k^*[m] \cdot g(-t - mT/N), \text{ con } \xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \cdot w_N[m]$$

- Expresión analítica para la salida de los demoduladores

$$\begin{aligned} q_k[n] &= \left(r(t) * \hat{\phi}_k^*(-t) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{N}{T}} \cdot \sum_m \xi_k^*[m] \cdot \left(r(t) * g\left(-t - m\frac{T}{N}\right) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} (r(t) * g(-t)) \Big|_{t=nT+m\frac{T}{N}} \end{aligned}$$

- Se define la salida del filtro adaptado $g(-t)$ como $v(t) = r(t) * g(-t)$
- Definiendo la secuencia $v[m] = v(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}} = r(t) * g(-t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}}$, ahora

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \cdot v[nN + m]$$

Observaciones $q_k[n]$ a través de la DFT

- DFT y DFT inversa (IDFT) de secuencias de N muestras
Para $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} X[k] &= \text{DFT}_N\{x[m]\}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \\ x[m] &= \text{IDFT}_N\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \end{aligned}$$

- Observaciones $q_k[n]$

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \cdot v[nN + m]$$

- Identificación de términos en la DFT

$$x[m] \equiv v[nN + m] = v^{(n)}[m], \text{ factor de escala } \frac{1}{\sqrt{T}}$$

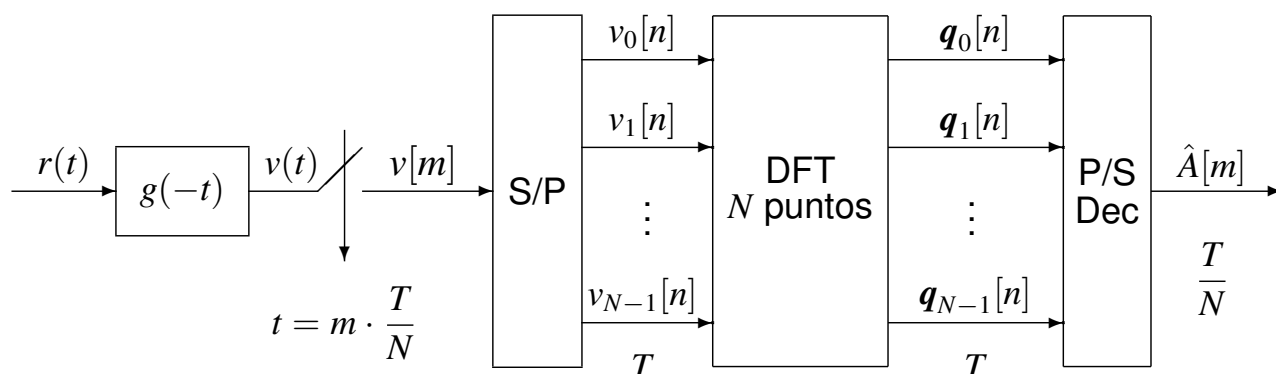
Por tanto

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N\{v^{(n)}[0]\}$$

Receptor para OFDM en tiempo discreto

Generación de observaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v^{(0)}[m]}_{v[0], v[1], \dots, v[N-1]} \quad \underbrace{v^{(1)}[m]}_{v[N], v[N+1], \dots, v[2N-1]} \quad \dots \quad \underbrace{v^{(n)}[m]}_{v[nN], v[nN+1], \dots, v[nN+N-1]} \quad \dots \\ \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \quad \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \quad \dots \quad \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \quad \dots \\ \underbrace{q_0[0], q_1[0], \dots, q_{N-1}[0]}_{q_k[0]} \quad \underbrace{q_0[1], q_1[1], \dots, q_{N-1}[1]}_{q_k[1]} \quad \dots \quad \underbrace{q_0[n], q_1[n], \dots, q_{N-1}[n]}_{q_k[n]} \quad \dots \end{array} \right\}$$



OFDM interpretada como proceso por bloques

- Proceso de muestras por bloques de tamaño N
- Transmisor: muestras para el n -ésimo bloque

Bloque de índice $n : s^{(n)}[m] = s[nN + m], m = \{0, 1, \dots, N - 1\}$

$s^{(n)}[m]$ para $m = 0, \dots, N - 1$ vienen dadas por N valores de $\text{IDFT}_N(A_k[n])$

- Canal discreto equivalente para las muestras $s[m]$ (a tiempo $\frac{T}{N}$)

$$d[m] = d(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}}, \text{ con } d(t) = g(t) * h_{eq}(t) * g(-t)$$

- Transmisión a través de $d[m]$

$$v[m] = s[m] * d[m] + z[m]$$

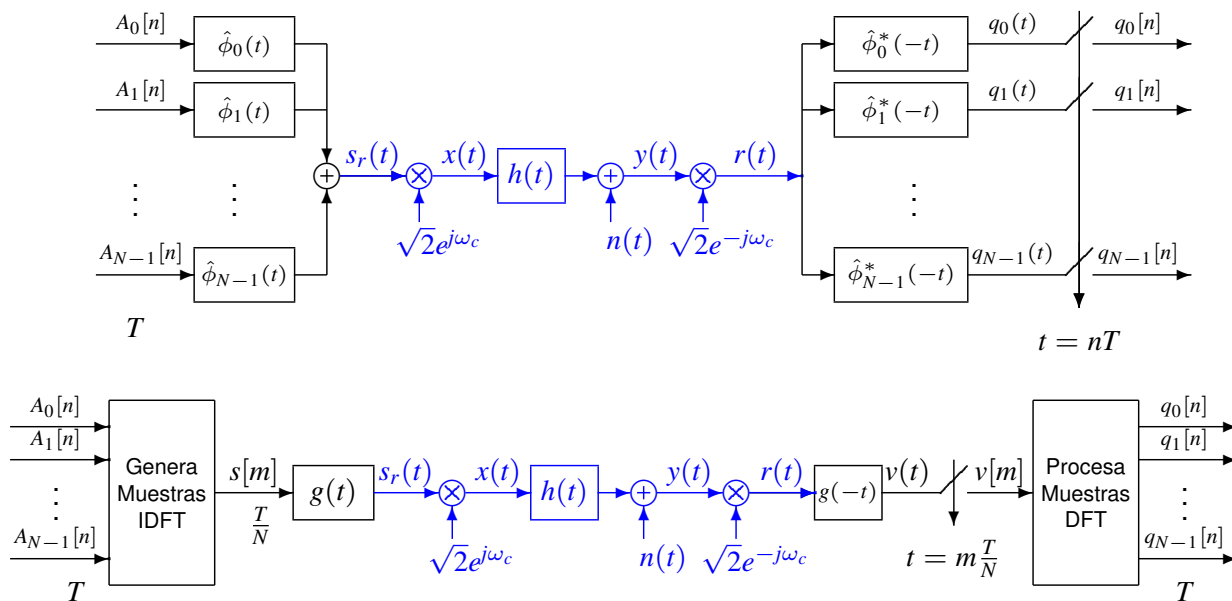
- Demodulación

- ▶ Se divide $v[m]$ en bloques de N muestras

$$v^{(n)}[m] = v[nN + m], m = \{0, 1, \dots, N - 1\}$$

- ▶ Procesado de cada bloque para obtener las observaciones en n
 $q_k[n]$ para $k = 0, \dots, N - 1$ son los N valores de $\text{DFT}_N(v^{(n)}[m])$

Transmisión OFDM en tiempo discreto



- Canal entre la entrada de índice i ($A_i[n]$) y salida de índice k ($q_k[n]$)

$$\hat{\phi}_i(t) * h_{eq}(t) * \hat{\phi}_k^*(-t)$$

- Canal para transmisión de muestras a $\frac{T}{N}$

$$d[m] = d(t)|_{t=m\frac{T}{N}}, \text{ con } d(t) = g(t) * h_{eq}(t) * g(-t)$$

Canal discreto equivalente en banda base

- Salida del filtro adaptado (antes del muestreo)

$$q_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\ell} A_i[\ell] \cdot p_{k,i}(t - \ell T) + z_k(t), \quad k = 0, \dots, N-1$$

- Respuesta conjunta del i -ésimo transmisor, k -ésimo receptor y canal complejo equivalente en banda base

$$p_{k,i}(t) = \hat{\phi}_i(t) * h_{eq}(t) * \hat{\phi}_k^*(-t)$$

- Salida muestreada

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\ell} A_i[\ell] \cdot p_{k,i}[n - \ell] + z_k[n], \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} A_i[n] * p_{k,i}[n] + z_k[n], \quad k = 0, \dots, N-1$$

- ▶ Se definen N^2 canales discretos equivalentes

$$p_{k,i}[n], \quad i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

conectando todas las N entradas (índice i) con todas las N salidas (índice k)

Generalización del criterio de Nyquist para la ISI

- Condición para evitar la interferencia intersimbólica (ISI)

$$p_{i,i}[n] = K \cdot \delta[n]$$

- Condición para evitar la interferencia entre portadoras (ICI)

$$p_{k,i}[n] = 0, \text{ for } k \neq i, \forall n$$

- Ambas condiciones juntas

$$p_{k,i}[n] = K \cdot \delta[n] \cdot \delta[k - i]$$

- Generalización del criterio de Nyquist para la ISI en frecuencia

$$\mathbf{P}(e^{j\omega}) = \mathbf{I}_{N \times N}$$

$P_{k,i}(e^{j\omega})$: Transformada de Fourier de $p_{k,i}[n]$

$\mathbf{P}(e^{j\omega})$: Matriz con elementos $P_{k,i}(e^{j\omega})$ (fila k , columna i)

- ▶ Difícil cumplir todas las restricciones: N^2 restricciones, N grados de libertad

Extension a OFDM en tiempo discreto

- Respuestas conjuntas entrada-canal-salida

$$p_{k,i}(t) = \frac{N}{T} \sum_m \sum_\ell \xi_i[m] \cdot \xi_k^*[\ell] \cdot \left[g \left(t - m \frac{T}{N} \right) * h_{eq}(t) * g \left(-t - \ell \frac{T}{N} \right) \right]$$

- Canales discretos equivalentes son $p_{k,i}[n] = p_{k,i}(nT)$

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi i}{N} \cdot m} \cdot e^{-j \frac{2\pi k}{N} \cdot \ell} \cdot d[nN + \ell - m]$$

$d[m]$: muestras de la respuesta conjunta del filtro reconstructor, canal complejo equivalente en banda base y filtro receptor a $\frac{T}{N}$

$$d[m] = (g(t) * h_{eq}(t) * g(-t))|_{t=m \frac{T}{N}}$$

NOTA: con esta definición $v[m] = s[m] * d[m] + z[m]$

- Las condiciones del criterio de Nyquist generalizado se cumplen si

$$d[m] = K \cdot \delta[m]$$

Eliminación de ISI e ICI - Extensión cíclica

- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
 - ▶ Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Con una extensión cíclica de las muestras, incluyendo un prefijo cíclico de C muestras, tal que $C \geq K_d$, los canales son

$$p_{k,i}[n] = \frac{N}{T} \cdot \delta[n] \cdot \delta[k - i] \cdot D[k]$$

- ISI e ICI son completamente eliminadas
- Observación para la portadora de índice k , $q_k[n]$, es ahora

$$q_k[n] = \frac{N}{T} \cdot A_k[n] \cdot D[k] + z_k[n]$$

$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[m]$

- ▶ Diferente relación señal a ruido en cada portadora (factor de ganancia $D[k]$)

NOTA: con la extensión, se transmitirán $N + C$ muestras cada T segundos, por lo que la nueva definición del canal discreto equivalente $d[m]$ será

$$d[m] = d(t)|_{t=m\frac{T}{N+C}}$$

Extensión cíclica - proceso por bloques

- Proceso de muestras por bloque
- Muestras para el n -ésimo bloque
 $s^{(n)}[m]$ para $m = 0, \dots, N-1$ vienen dadas por N valores de $\text{IDFT}_N(A_k[n])$

- Extensión cíclica de cada bloque - Prefijo cíclico

$$\tilde{s}^{(n)}[m] = \begin{cases} s^{(n)}[m + N] & m = -C, \dots, -1 \\ s^{(n)}[m] & m = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

- Transmisión a través de $d[m]$ (a tiempo $\frac{T}{T+C}$)

$$\tilde{v}^{(n)}[m] = \tilde{s}^{(n)}[m] * d[m] + \tilde{z}^{(n)}[m]$$

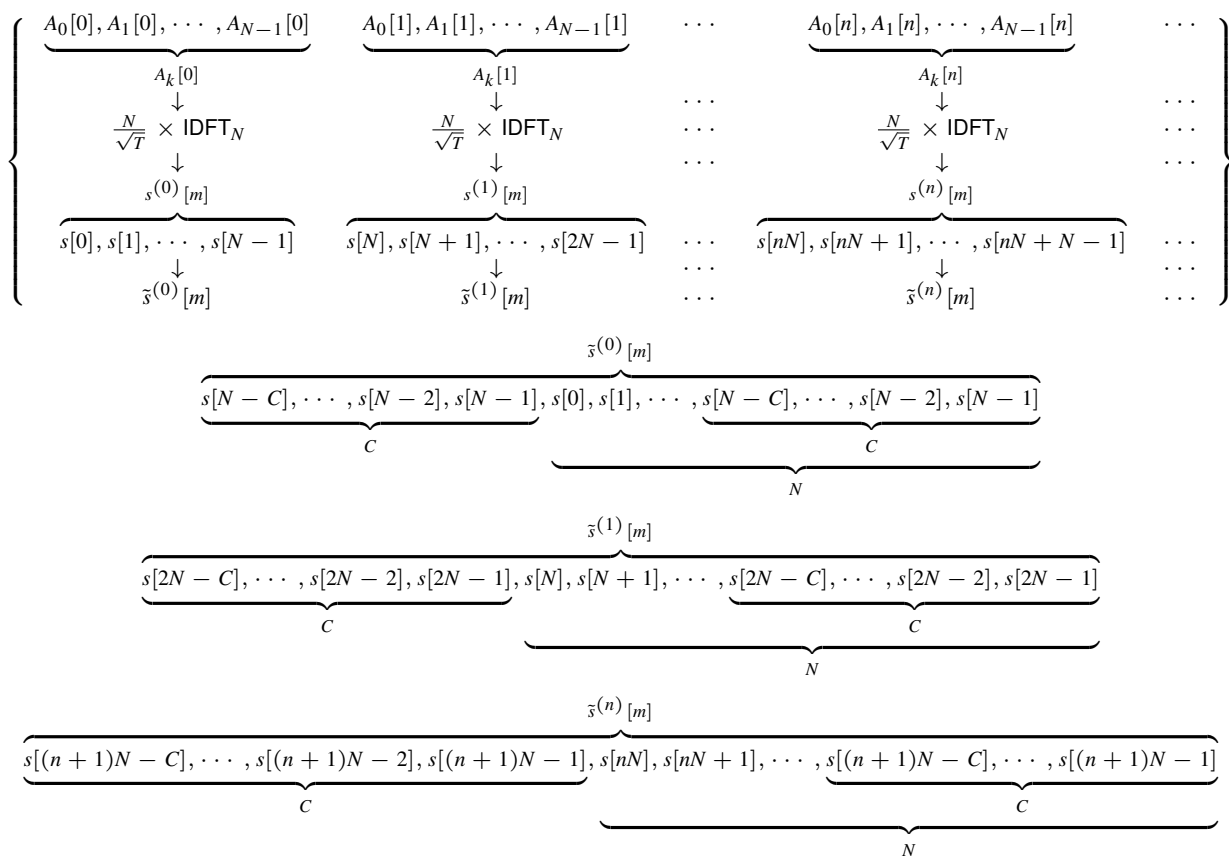
- Eliminación del prefijo cíclico

$$v^{(n)}[m] = \tilde{v}^{(n)}[m] \cdot w_N[m]$$

- Demodulación

$q_k[n]$ para $k = 0, \dots, N-1$ son los N valores de $\text{DFT}_N(v^{(n)}[m])$

Extensión cíclica - proceso por bloques (II)



Extensión cíclica - proceso por bloques (III)

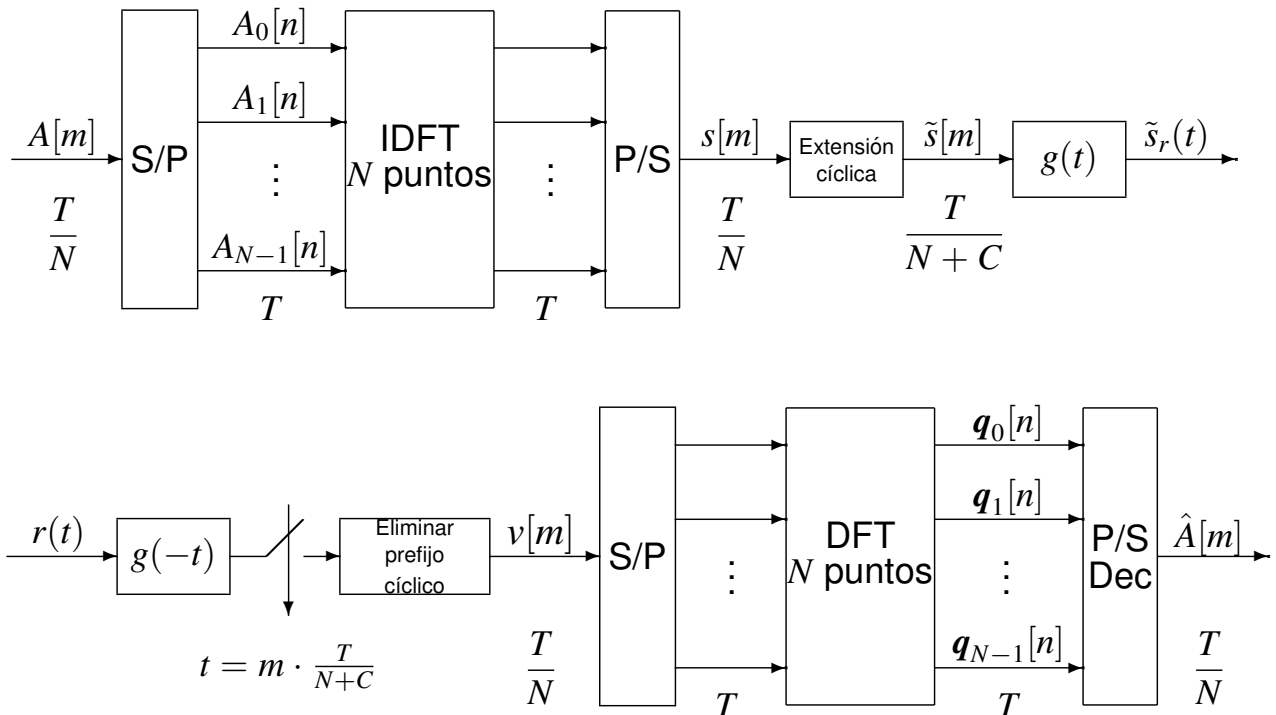
- $q_k[n]$: se obtiene a partir de la DFT de N puntos de $v^{(n)}[m]$
- El prefijo cíclico se introduce para simular una convolución circular
- La convolución de $\tilde{s}^{(n)}[m]$ con $d[m]$ es equivalente a la convolución circular de $s^{(n)}[m]$ con $d[m]$
- Utilidad por la propiedad de la DFT de ser multiplicativa bajo convolución circular

Si $z[n] = x[n] \otimes y[n]$ entonces $\text{DFT}_N(z[n]) = \text{DFT}_N(x[n]) \times \text{DFT}_N(y[n])$

- Teniendo esto en cuenta, sin ruido, y abusando de la notación

$$\begin{aligned}
 q_k[n] &= \text{DFT}_N(\tilde{s}^{(n)}[m] * d[m]) \\
 &= \text{DFT}_N(s^{(n)}[m] \otimes d[m]) \\
 &= \text{DFT}_N(s^{(n)}[m]) \times \text{DFT}_N(d[m]) \\
 &= \text{DFT}_N(\text{IDFT}_N(A_k[n])) \times \text{DFT}_N(d[m]) \\
 &= A_k[n] \times D[k]
 \end{aligned}$$

Modulador/demodulador OFDM con prefijo cíclico



Eficiencia espectral de OFDM con prefijo cíclico

- Señal OFDM se construye a partir de muestras: filtro reconstructor $g(t)$

$$s_r(t) = \sum_m s[m] \cdot g(t - mT_s), \text{ con } g(t) = \text{sinc}\left(\frac{N}{T_s}t\right)$$

T_s : tiempo asociado a la secuencia de muestras $s[m]$

- ▶ Ancho de banda de la señal modulada paso banda $x(t)$ es

$$W = \frac{2\pi}{T_s} \text{ rad/s}, B = \frac{1}{T_s} \text{ Hz}$$

- OFDM sin prefijo cíclico

- ▶ En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N}$

$$W = \frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad/s}, B = R_s \times N \text{ Hz}$$

- OFDM con prefijo cíclico

- ▶ En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N+C}$

$$W = \frac{2\pi}{T} \times (N + C) \text{ rad/s}, B = R_s \times (N + C) \text{ Hz}$$

- Eficiencia de OFDM utilizando un prefijo cíclico de longitud C

$$\eta = \frac{N}{N + C}$$

Eliminación de ISI e ICI - Estudio analítico

- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
 - ▶ Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Nuevas funciones base en tiempo discreto (longitud se extiende C muestras)

$$\tilde{\xi}_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N} \cdot m} \cdot w_{N+C}[m + C], \quad k = 0, \dots, N-1$$

- ▶ Valores no nulos para $m \in [-C, N-1]$ (en lugar de $m \in [0, N-1]$)
- ▶ Condición para eliminar ISI e ICI:

$$C \geq K_d$$

- Muestras de la señal generada son ahora dadas por

$$\tilde{s}[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \cdot \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot \tilde{\xi}_k[m - n(N + C)]$$

- ▶ Ahora hay $N + C$ muestras por intervalo de símbolo (T s)

- Señal en el demodulador se obtiene como

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \xi_k^*[m] \cdot v[n(N + C) + m]$$

Nuevos canales discretos equivalentes

- Con esta modificación los canales son

$$\begin{aligned} p_{k,i}[n] &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{m=-C}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N} \cdot m} \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot \ell} \cdot d[n(N + C) + \ell - m] \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{u=\ell-N+1}^{\ell+C} e^{-j\frac{2\pi i}{N} \cdot u} \cdot e^{j\frac{2\pi(i-k)}{N} \cdot \ell} \cdot d[n(N + C) + u] \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{u=0}^{K_d} e^{-j\frac{2\pi i}{N} \cdot u} \cdot d[u] \cdot \delta[n] \cdot \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(i-k)}{N} \cdot \ell} \\ &= \frac{N}{T} \cdot \delta[n] \cdot \delta[k - i] \cdot \underbrace{\sum_{u=0}^{K_d} e^{-j\frac{2\pi i}{N} \cdot u} \cdot d[u]}_{\text{DFT de } d[m]} = \frac{N}{T} \cdot \delta[n] \cdot \delta[k - i] \cdot D[i] \end{aligned}$$

$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[n]$

- ISI e ICI son eliminadas