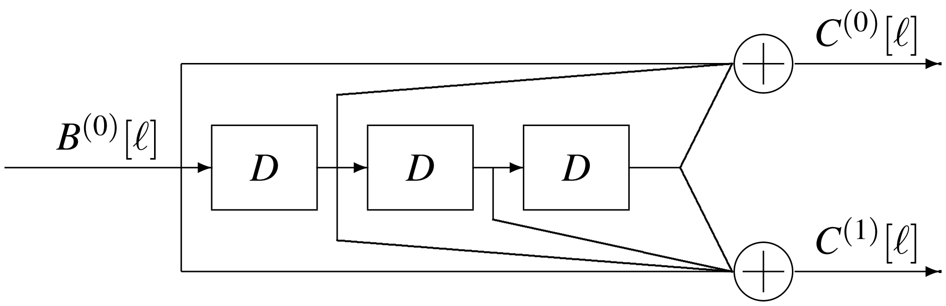
Códigos convolucionales

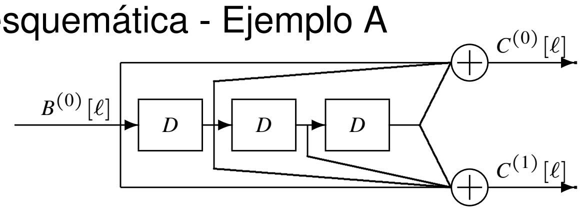
- Introducción de la redundancia mediante filtrado
  - Introducción de memoria
- Tasa $R = k/n$: banco de filtros con
  - k entradas
  - n salidas



- Notación:
  - Entradas: $B^{(i)}[\ell]$, con $i = 0, 1, \cdots, k-1$
  - Salidas: $C^{(j)}[\ell]$, con $j = 0, 1, \cdots, n-1$

Representaciones de los códigos convolucionales

- Representación esquemática - Ejemplo A



- Relación entrada salidas

$$C^{(0)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-3]$$

$$C^{(1)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-2] + B^{(0)}[\ell-3]$$

- Representación de secuencias con polinomios en D - Transformada D

$$B^{(i)}(D) = \sum_{\ell} B^{(i)}[\ell] \cdot D^{\ell}$$

  - Propiedad de la representación en D respecto a retardos

$$B^{(i)}[\ell - d] \leftrightarrow B^{(i)}(D) \cdot D^{d}$$

Representaciones de los códigos convolucionales (II)

- Notación mediante polinomios en D

$$C^{(0)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^3\right\}$$

$$C^{(1)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^2 + D^3\right\}$$

- Notación matricial (polinomios):

$$\boldsymbol{C}(D)_{1\times n} = \boldsymbol{B}(D)_{1\times k} \cdot \boldsymbol{G}(D)_{k\times n}$$

- Matriz generadora de tamaño $k \times n$
  - Cada elemento es un polinomio en D
  - Elemento fila i columna j: contribución a la salida j-ésima de la entrada i-ésima
  - Ejemplos
    - ⋆ Ejemplo anterior (A): $k = 1$, $n = 2$

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1 + D + D^3,\ 1 + D + D^2 + D^3\right]_{1\times 2}$$

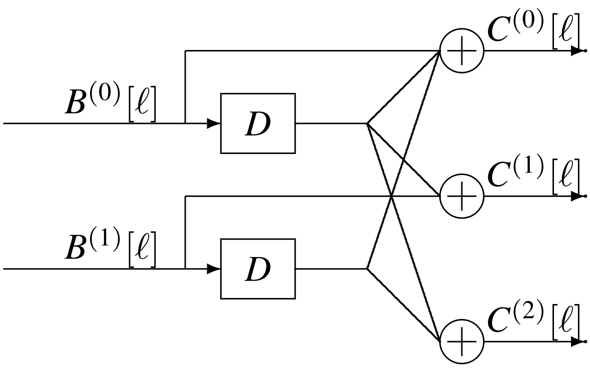
    - ⋆ Otro ejemplo (B): $k = 2$, $n = 3$

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Paso a representación esquemática - Ejemplo B

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- Número de entradas del banco de filtros:
  - Número de filas de la matriz $\boldsymbol{G}(D)$: $k = 2$
- Número de salidas del banco de filtros:
  - Número de columnas de la matriz $\boldsymbol{G}(D)$: $n = 3$
- Número de memorias (elementos de retardo) de cada entrada:
  - Máximo grado de los polinomios en su correspondiente fila



Parámetros de interés

- Memoria total del código: M_t
  - Número total de unidades de retardo (memorias)

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

  - Memoria de la entrada i-ésima:

$$M^{(i)} = \max_j \text{grado}(g_{i,j}(D))$$

- Longitud de restricción: K
  - Máxima longitud de la respuesta al impulso del codificador (máximo número de instantes de tiempo en los que un bit afecta a la salida del codificador)

$$K = 1 + \max_{i,j} \text{grado}(g_{i,j}(D))$$

  - En general las prestaciones aumentan con K

Códigos sistemáticos

- Matriz de generación

$$\boldsymbol{G}(D) = [\boldsymbol{I}_k \ \boldsymbol{P}(D)]$$

  - Las entradas se “copian” en algunas de las salidas
  - Ejemplo (C)

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1, \ 1 + D + D^2\right]$$

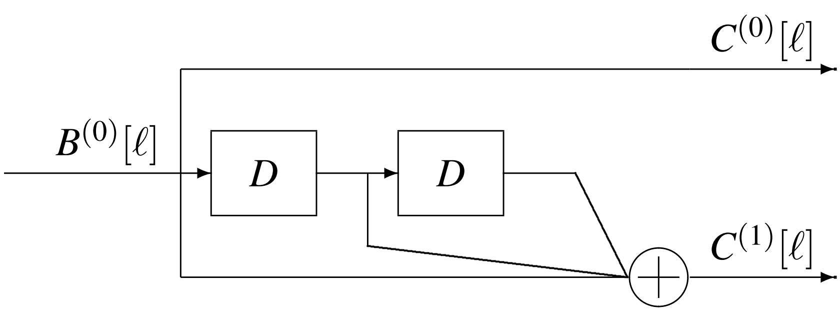


Diagrama de rejilla

- Definición del estado
  - Contenido de las memorias del codificador

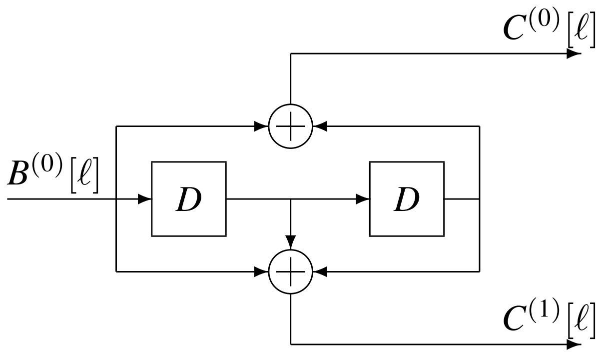
$$\psi[\ell] = [B^{(0)}[\ell-1], \cdots, B^{(0)}[\ell-M^{(0)}], \cdots, B^{(k-1)}[\ell-1], \cdots, B^{(k-1)}[\ell-M^{(k-1)}]]$$

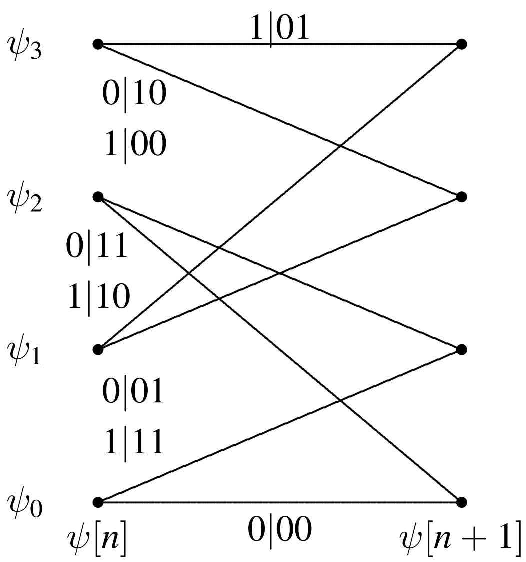
- Etiquetado de la rejilla
  - Bits a la entrada del codificador (sin codificar)
  - Bits a la salida del codificador (codificados)

$$B^{(0)}[\ell], B^{(1)}[\ell], \cdots B^{(k-1)}[\ell] \;\Big|\; C^{(0)}[\ell], C^{(1)}[\ell], \cdots C^{(n-1)}[\ell]$$

Ejemplo - Convolucional D

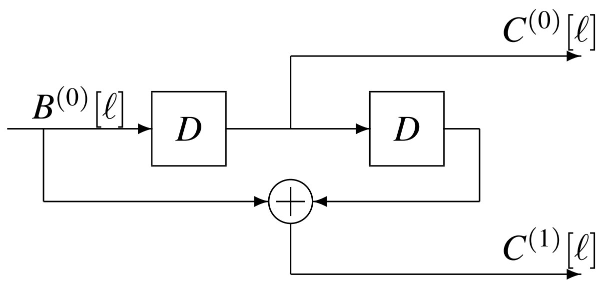
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$

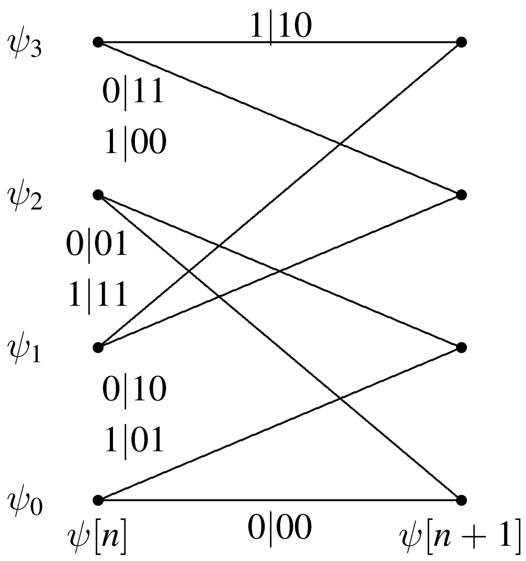




Ejemplo - Convolucional E

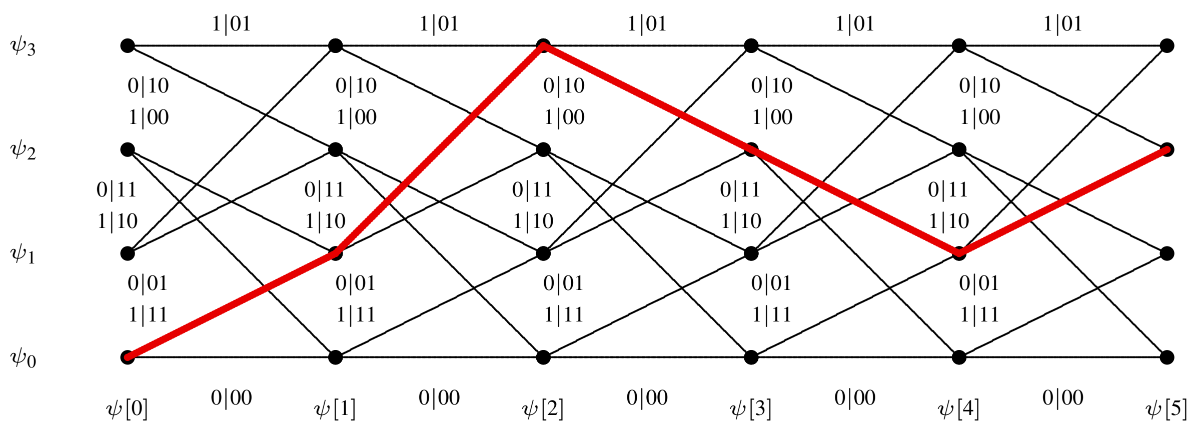
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$





Secuencia de bits - Camino a través de la rejilla

- Secuencia de datos: $B^{(0)}[\ell] = [11010]$
- Estado inicial: ψ_0 (Se fija con el envío de una cabecera de bits)



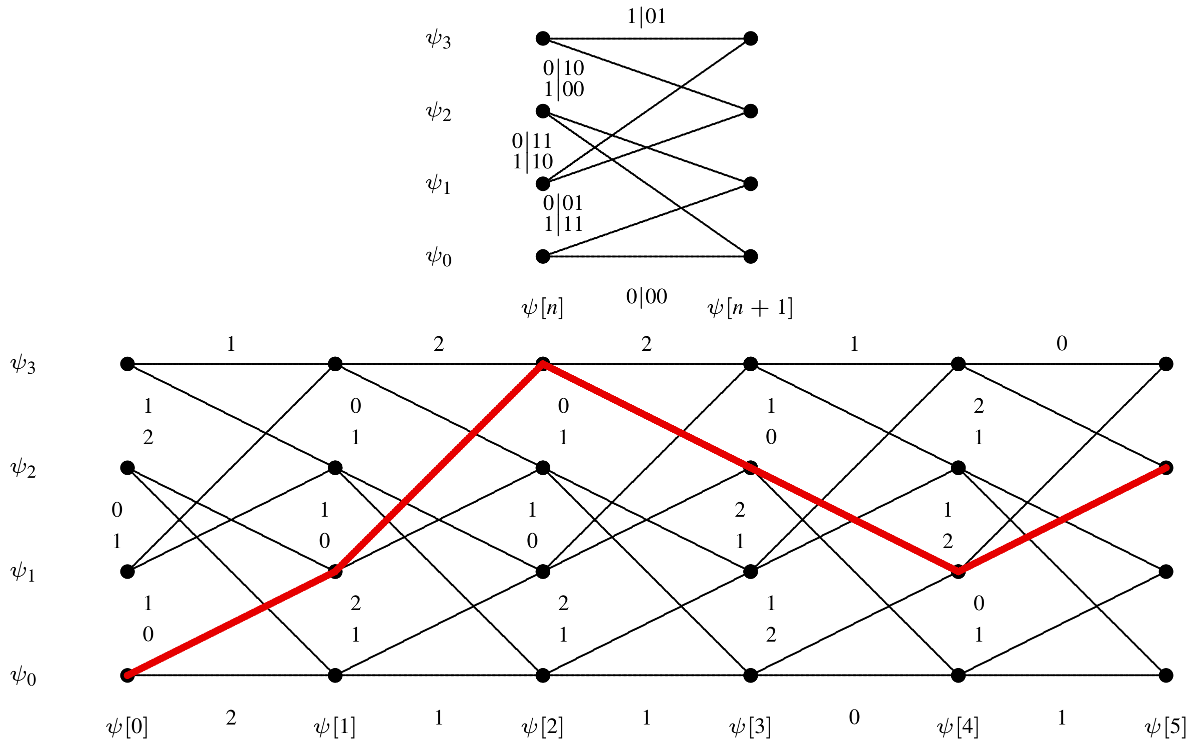
- Secuencia codificada: $C[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$

Decodificación - Algoritmo de Viterbi

- Recuperación de la secuencia más verosímil
- Estados inicial/final
  - Cabecera de referencia (habitualmente ceros “*bit flushing*”)
- Salida dura: observación de bits decididos
  - Secuencia con el menor número de bits codificados distintos a la observación
  - Métrica de rama: distancia de Hamming con la observación
- Salida blanda: observación de $q[n]$
  - Secuencia cuyos símbolos asociados están a la menor distancia euclídea de la observación
  - Métrica de rama: $|q[n] - \boldsymbol{A}_i[n]|^2$
    - ⋆ Hay que tener en cuenta la constelación que se utiliza para hacer la conversión de las etiquetas de la rejilla básica a símbolos de la constelación ($\boldsymbol{A}_i[n]$)
  - Mejores prestaciones con salida blanda

Métricas de rama - Salida dura

- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$



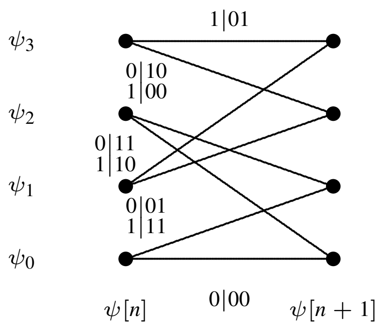
Métricas acumuladas en cada estado (Viterbi)

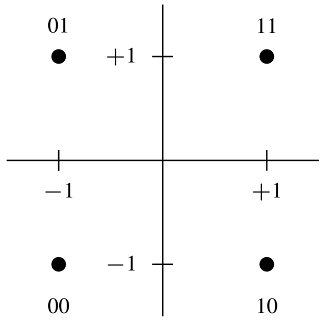
	$\psi[1]$	$\psi[2]$	$\psi[3]$	$\psi[4]$	$\psi[5]$
ψ_3	–	0	**2**/3	**3**/4	3/**2**
ψ_2	–	2	**0**/5	**3**/4	0/**0**
ψ_1	0	3	**3**/4	**0**/5	4/**3**
ψ_0	2	3	**3**/4	**2**/3	4/**3**

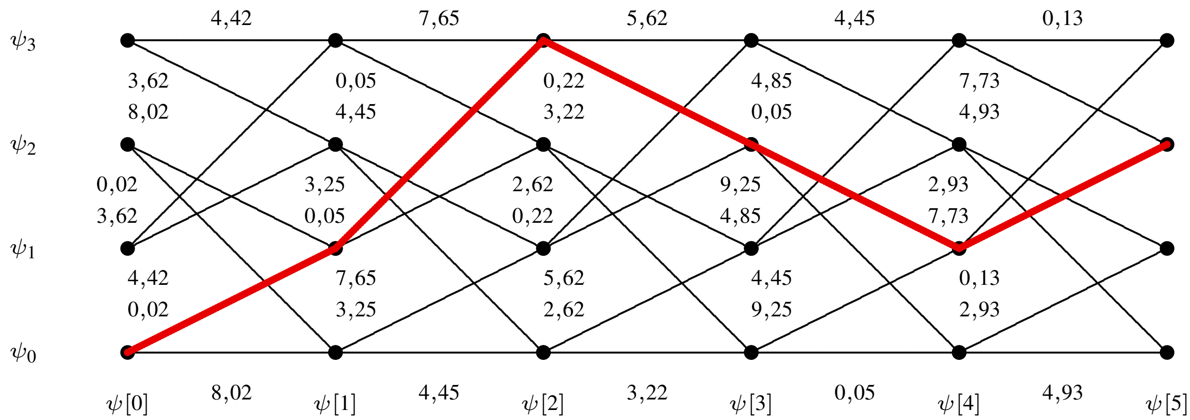
- Si no hay errores: camino con métrica acumulada nula

Métricas de rama - Salida blanda

- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,1 \\ -0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,75 \\ -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,2 \\ -1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,7 \\ 1,2 \end{bmatrix}$







Métricas acumuladas en cada estado (Viterbi)

	$\psi[1]$	$\psi[2]$	$\psi[3]$	$\psi[4]$	$\psi[5]$
ψ_3	–	0,07	**5,69**/11,49	**10,14**/15,74	10,27/**8,07**
ψ_2	–	7,67	**0,29**/16,89	**10,54**/15,34	17,87/**0,47**
ψ_1	0,02	11,27	**10,89**/15,09	**0,34**/19,54	15,47/**12,47**
ψ_0	8,02	12,47	**10,29**/15,69	**9,54**/10,34	**13,47**/14,47

Prestaciones

- Salida dura

$$P_e \approx c \cdot \sum_{e=t+1}^{n \cdot z} \binom{n \cdot z}{e} \cdot \varepsilon^e \cdot (1-\varepsilon)^{n \cdot z - e}$$

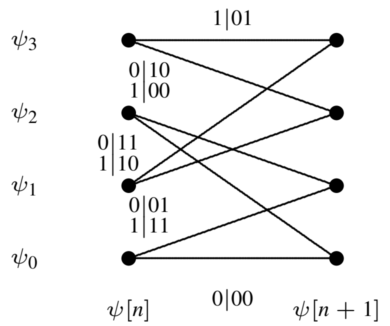
  - D^H_{min}: mínima distancia de Hamming entre salidas para secuencias distintas
  - z: longitud del evento erróneo de distancia mínima
  - $t = \left\lfloor \frac{D^H_{min}-1}{2} \right\rfloor$ (capacidad de corrección sobre $n \cdot z$ bits)
  - ε: probabilidad de error de bit del sistema (BER)
- Salida blanda

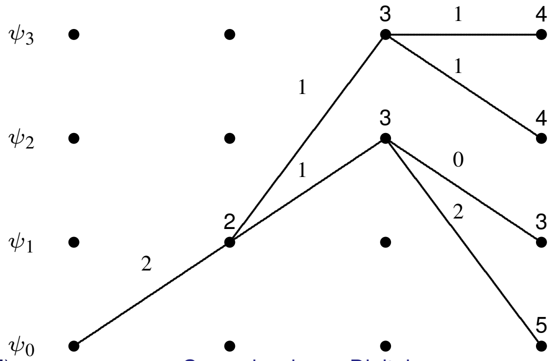
$$P_e \approx c \cdot Q\left(\frac{D^E_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - D^E_{min}: mínima distancia euclídea entre salidas para secuencias distintas

Calculo de D^H_{min}

- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos





$$D^H_{min} = 5$$

$$z = 3$$