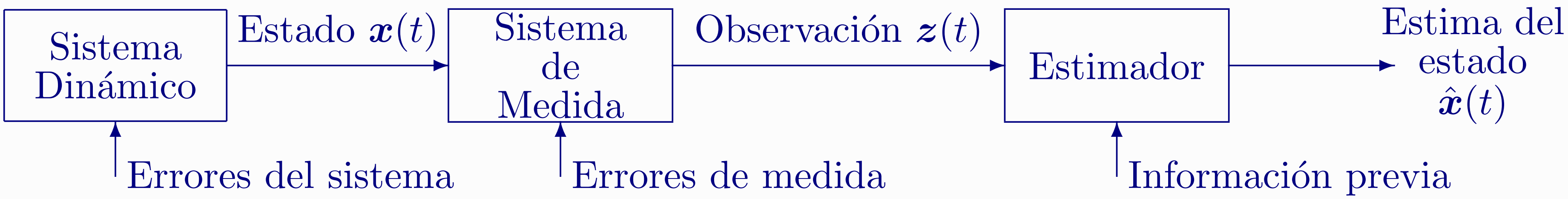
4.6 El filtro de Kalman

- Introducción
- Filtro de Kalman discreto
- Algoritmo: predicción + corrección
- Características probabilísticas
- El filtro de Kalman extendido
- Filtros de Partículas
- Conclusiones

Introducción

- Formulación matemática en términos del concepto *espacio del estado*



- Solución recursiva
- Solución válida para ambientes estacionarios y no estacionarios
- Soporta estimas de estados presentes, pasados y futuros (filtrado, suavizado y predicción)
- Método eficiente para resolver el problema de mínimos cuadrados (incluye al RLS y sus variantes)

Filtro de Kalman discreto

- Plantemiento: Estima del estado $\boldsymbol{x} \in I\!R^n$ de un proceso lineal discreto en el tiempo a partir de un conjunto de medidas $\boldsymbol{z} \in I\!R^m$
- Ecuación del proceso

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{w}_{k-1}$$

- Ecuación de medida

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$$

- Ruido de proceso y ruido de medida: independientes, blancos y con distribución gaussiana

$$p(\boldsymbol{w}) \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}), \qquad p(\boldsymbol{v}) \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R})$$

Definiciones

- Estima *a priori* del estado: $\hat{\boldsymbol{x}}_k^- \in \mathbb{R}^n$
  - Error de estima *a priori*: $\boldsymbol{e}_k^- = \boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k^-$
- Estima *a posteriori* del estado: $\hat{\boldsymbol{x}}_k \in \mathbb{R}^n$
  - Error de estima *a posteriori*: $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k$
- Matriz de correlación del error de estima *a priori*:

$$\boldsymbol{P}_k^- = E\left[\boldsymbol{e}_k^- \boldsymbol{e}_k^{-H}\right]$$

- Matriz de correlación del error de estima *a posteriori*:

$$\boldsymbol{P}_k = E\left[\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k^{H}\right]$$

- Proceso de innovación (o residuo)

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$$

Aspectos computacionales del filtro

- Evaluación del estado *a posteriori*

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^- \right) = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\alpha}_k$$

- Ganancia del filtro de Kalman $\boldsymbol{K}_k$ $(n \times m)$
  - Minimiza la correlación de error *a posteriori* $\boldsymbol{P}_k$

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}^H \left(H \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}^H + \boldsymbol{R} \right)^{-1} = \frac{\boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}^H}{\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}^H + \boldsymbol{R}}$$

  - Propiedades

$$\lim_{\boldsymbol{R}_k \to 0} \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{H}^{-1}, \qquad \lim_{\boldsymbol{P}_k^- \to 0} \boldsymbol{K}_k = 0$$

Algoritmo: *predicción+corrección*

- Ecuaciones de predicción

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}^H + \boldsymbol{Q}$$

- Ecuaciones de corrección

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{H}^H\left(H\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{H}^H + \boldsymbol{R}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^-\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{P}_k^-$$

Características probabilísticas

- El filtro de Kalman mantiene los dos primeros momentos de la distribución del estado

$$E\left[\boldsymbol{x}_k\right] = \hat{\boldsymbol{x}}_k, \qquad E\left[(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)^H\right] = \boldsymbol{P}_k$$

- Si los ruidos del proceso y de la medida son gaussianos

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{z}_k) \sim N(E\left[\boldsymbol{x}_k\right], E\left[(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)^H\right]) = N(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k)$$

- Condiciones de ortogonalidad del proceso de innovación

$$E\left[\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{z}_n^H\right] = \mathbf{0}, \qquad 1 \le n \le k-1$$

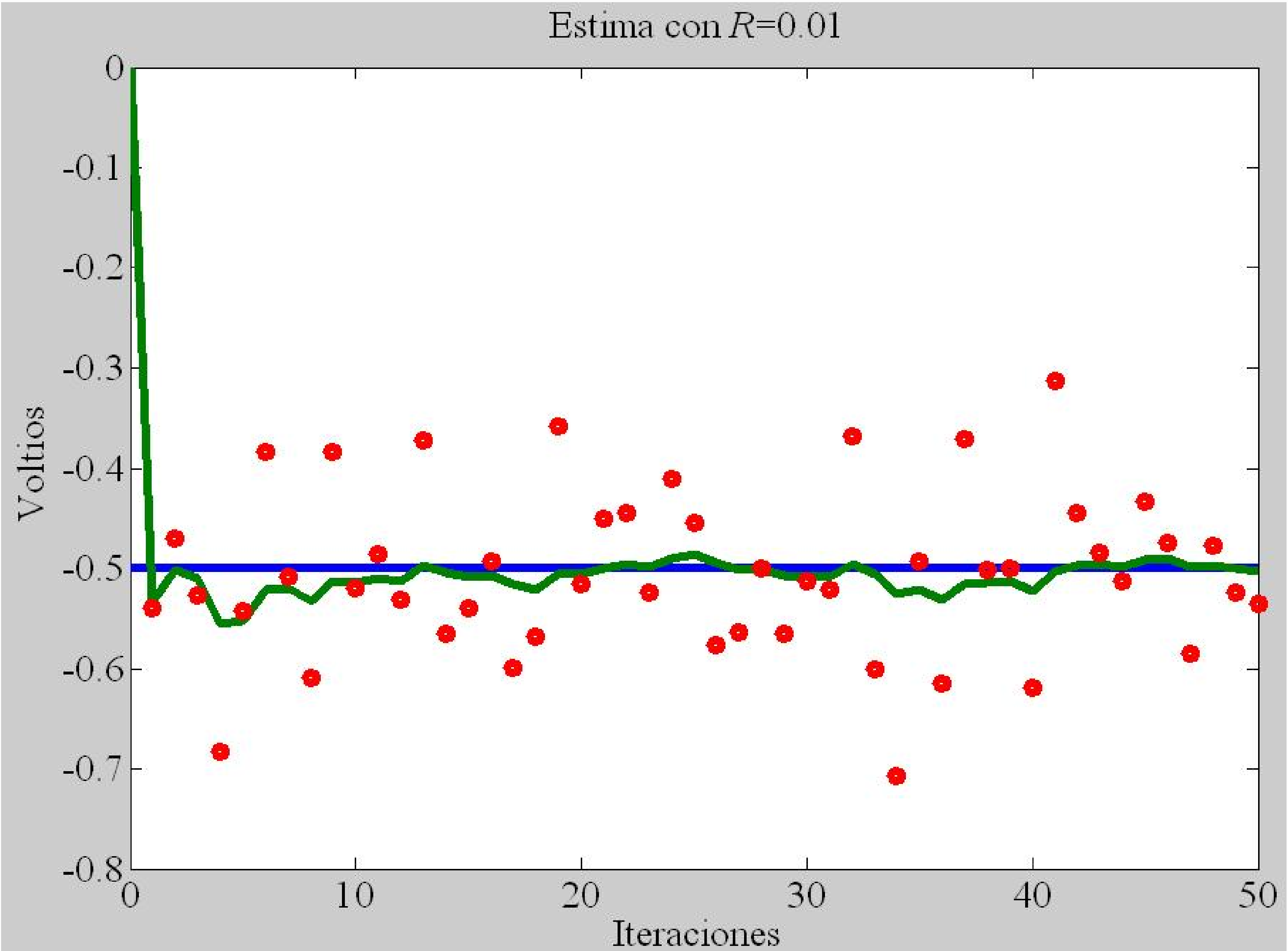
$$E\left[\boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\alpha}_n^H\right] = \mathbf{0}, \qquad 1 \le n \le k-1$$

$$\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_k\} \leftrightharpoons \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$$

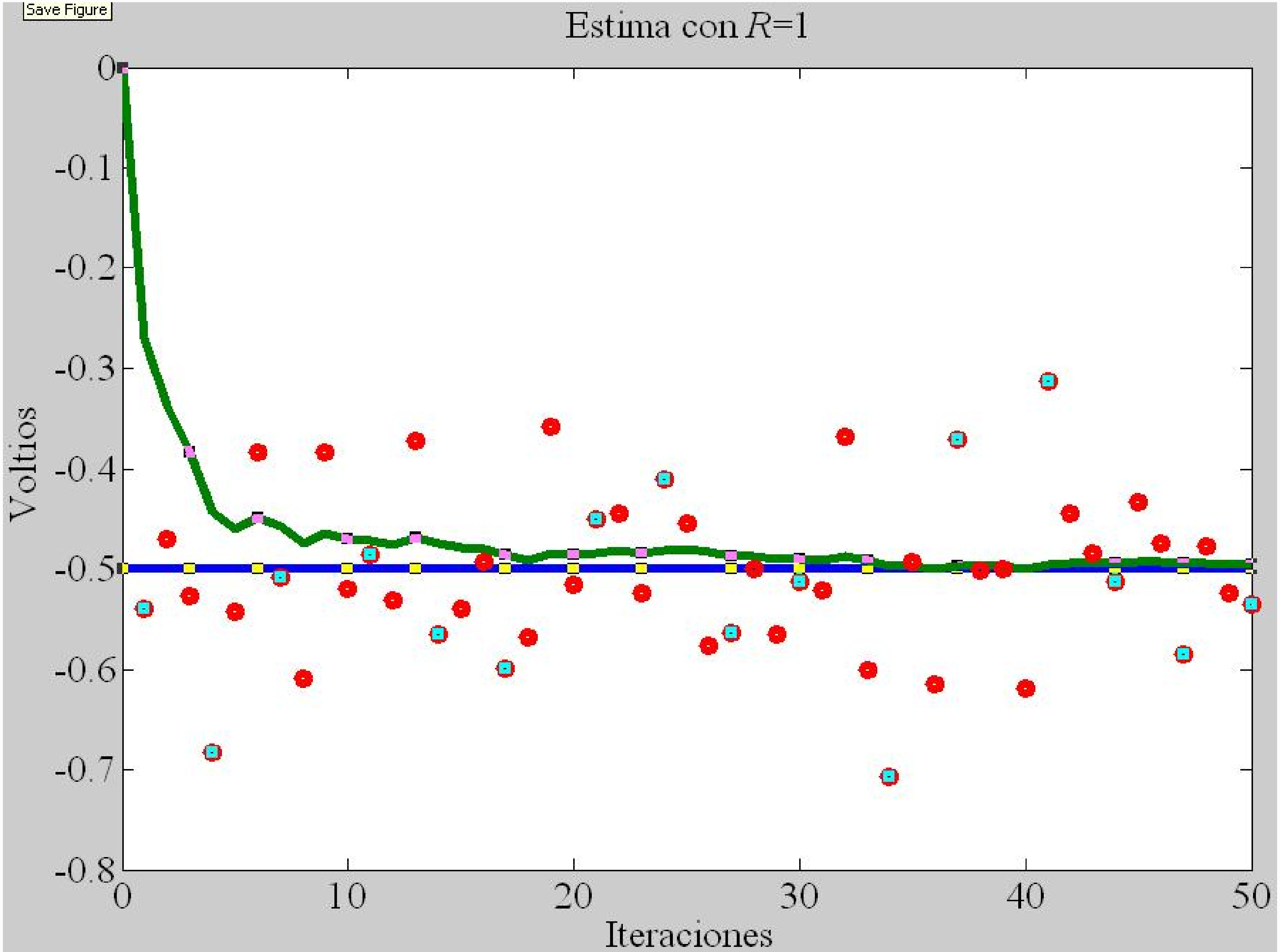
Selección de parámetros

- Parámetros a seleccionar
  - Estimas iniciales $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ y $\boldsymbol{P}_0$: no demasiado críticas
  - Matrices de covarianzas de ruido $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{Q}$
    - $\boldsymbol{R}$ se puede estimar a través de las medidas
    - $\boldsymbol{Q}$ es difícil de estimar (no hay acceso al estado)
    - Habitualmente se realiza un ajuste (*tuning*) de dichos parámetros
- Ejemplo: estima de una constante aleatoria
  - Voltaje=-0.5 V
  - Varianza de ruido (blanco y gaussiano): 0.01
  - 50 observaciones

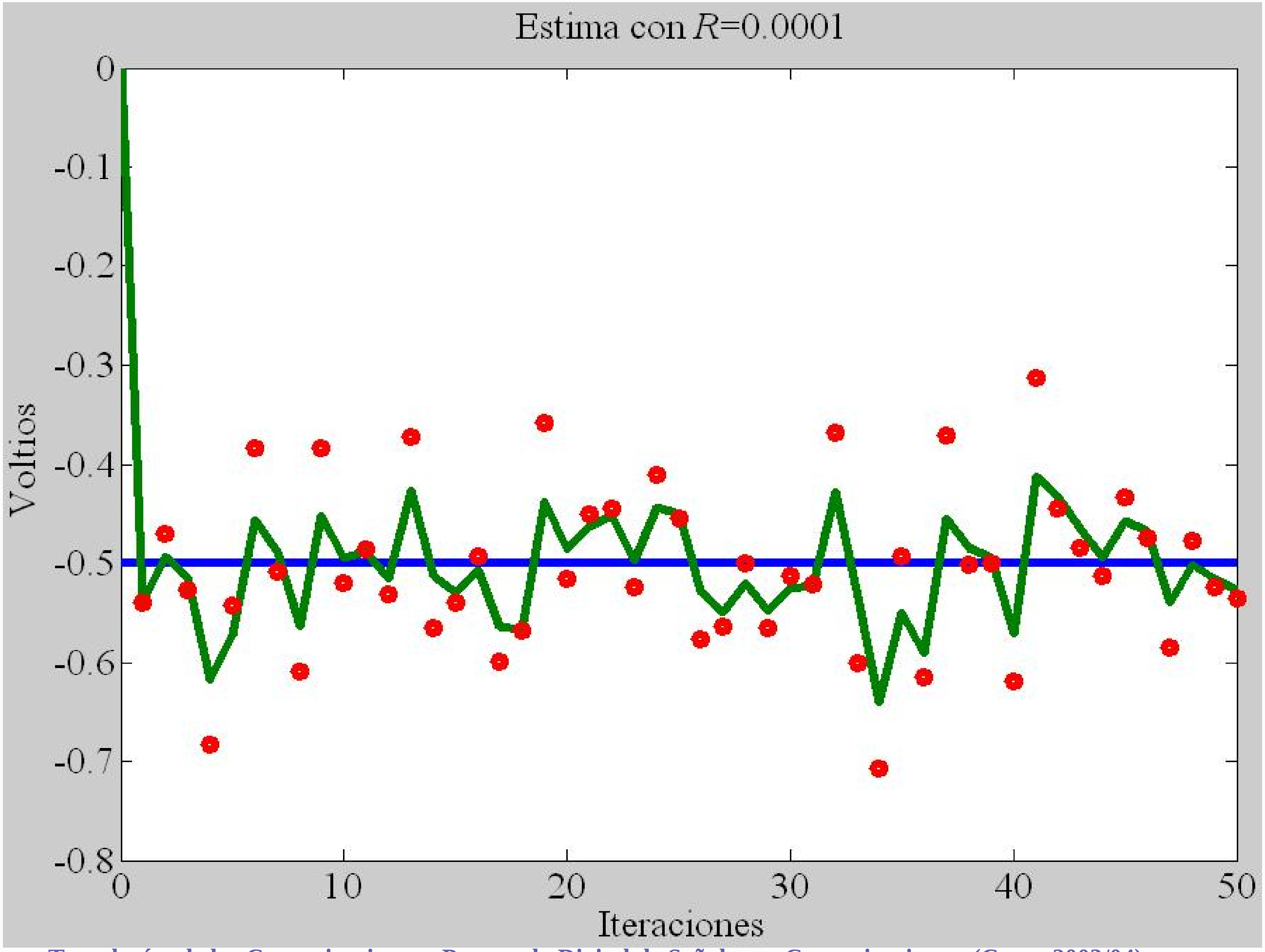
Ejemplo: $R = 0.01$



Ejemplo: $\boldsymbol{R} = 1$



Ejemplo: $R = 0.0001$



El filtro de Kalman extendido (EKF)

- Las ecuaciones del proceso y/o de medida son no lineales

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k\right) + \boldsymbol{w}_{k-1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k,$$

- Filtro de Kalman extendido: linealiza el sistema
  - Ecuación de proceso

$$\boldsymbol{A}_k = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k\right)$$

  - Ecuación de medida

$$\boldsymbol{H}_k = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)$$

Algoritmo EKF

- Ecuaciones de predicción

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{a}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{A}_k^H + \boldsymbol{Q}$$

- Ecuaciones de corrección

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^H \left(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^H + \boldsymbol{R}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{P}_k^-$$

Formulación alternativa del EKF

- Las ecuaciones del proceso y/o de medida son no lineales

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_{k-1}\right)$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_k\right)$$

- Filtro de Kalman extendido: linealiza el sistema
  - Ecuación de proceso

$$\boldsymbol{A}_k = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k, 0\right), \qquad \boldsymbol{W}_k = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{w}}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k, 0\right)$$

  - Ecuación de medida

$$\boldsymbol{H}_k = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-, 0), \qquad \boldsymbol{V}_k = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{v}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-, 0)$$

Algoritmo EKF (formulación alternativa)

- Ecuaciones de predicción

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{a}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k, 0\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{A}_k^H + \boldsymbol{W}_k \boldsymbol{Q} \boldsymbol{W}_k^H$$

- Ecuaciones de corrección

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^H \left(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^H + \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{R} \boldsymbol{V}_k^H\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-, 0)\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{P}_k^-$$

Filtros de partículas

- Permiten considerar no linealidad y no gaussianidad del sistema dinámico
- Basados en la teoría Bayesiana y en el uso de muestreo enfatizado (*sequential importance sampling*)
- Método secuencial que estima las distribuciones de probabilidad relevantes
  - Filtrado: $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{z}_{1:k})$
  - Predicción: $p(\boldsymbol{x}_{k+n}|\boldsymbol{z}_{1:k})$
  - Smoothing: $p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{z}_{1:k})$, con $n < k$
- Las distribuciones se aproximan mediante suma de partículas aleatorias (muestras en el espacio de la variable)

Muestreo enfatizado

- Estima de una distribucion $p(x) \propto \pi(x)$
- Se definen muestras de una densidad enfatizada $q(x)$

$$x^i \sim q(x), \qquad i = 1, \cdots, N_s$$

- Aproximación de la densidad $p(x)$

$$p(x) \approx \sum_{i=1}^{N_s} \omega^i \delta(x - x^i), \qquad \omega_i \propto \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)}$$

- Estima de esperanzas

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx \quad \Rightarrow \quad E[g(X)] \approx \sum_{i=1}^{N_s} \omega^i g(x^i)$$

Filtro de partículas

- Aplicación del muestreo enfatizado a la estima del estado de un sistema dinámico

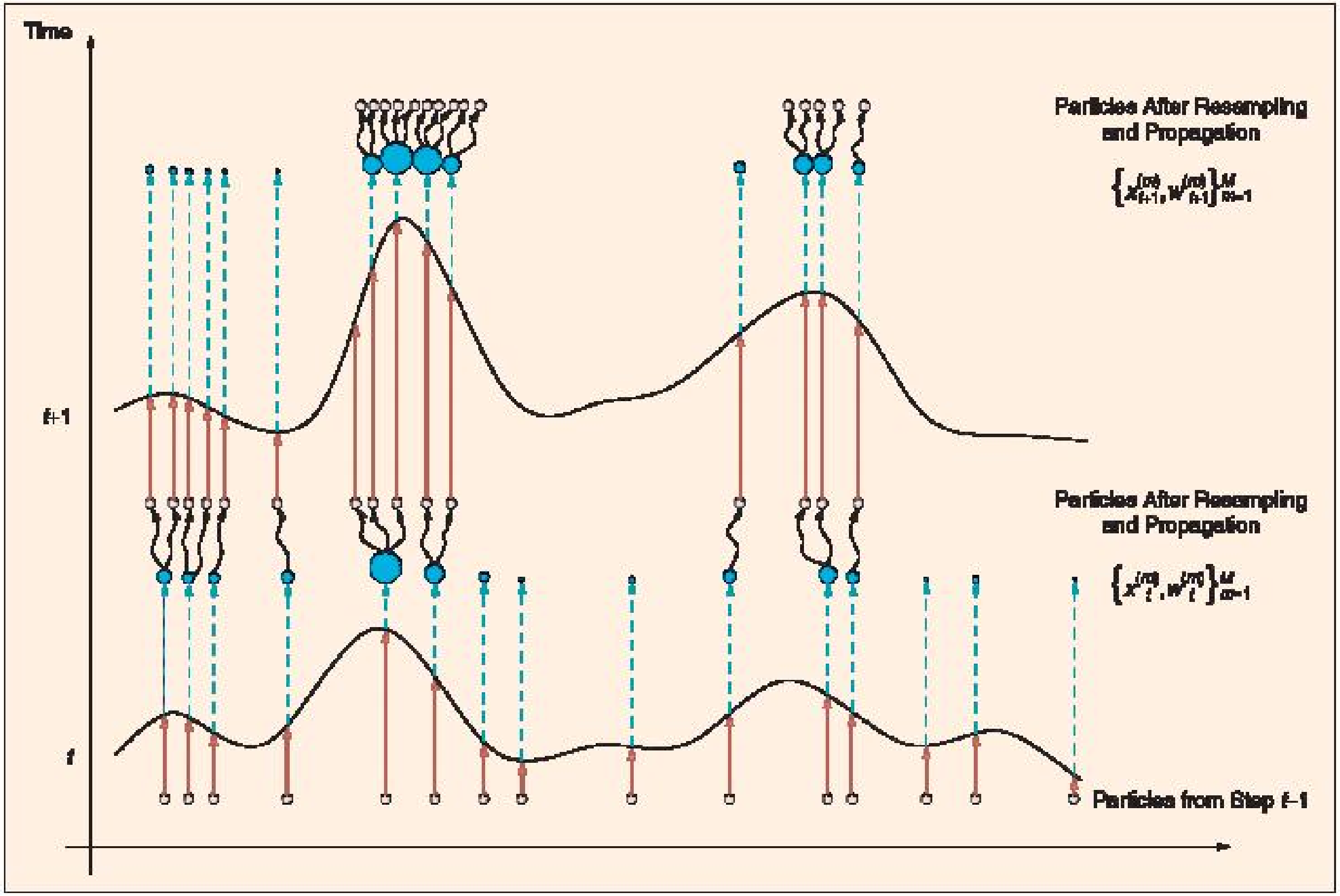
$$\text{Estima de } p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{z}_{1:k}) \quad \Rightarrow \quad \omega_k^i \propto \frac{p(\boldsymbol{x}_{0:k}^i|\boldsymbol{z}_{1:k})}{q(\boldsymbol{x}_{0:k}^i|\boldsymbol{z}_{1:k})}$$

- Si se cumple $q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{0:k-1}, \boldsymbol{z}_{1:k}) = q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{z}_k)$ sólo es necesario obtener $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{z}_{1:k})$ y almacenar $\boldsymbol{x}_k^i$

$$\omega_k^i \propto \boldsymbol{w}_{k-1}^i \frac{p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k^i)p(\boldsymbol{x}_k^i|\boldsymbol{x}_{k-1}^i)}{q(\boldsymbol{x}_k^i|\boldsymbol{x}_{k-1}^i, \boldsymbol{z}_k)} \quad \Rightarrow \quad p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_s} \omega_k^i \delta(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_k^i)$$

Degeneración → Remuestreo

- Después de algunas iteraciones muchas partículas pueden tener pesos despreciables
- Solución: remuestreo con la representación discreta de $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{z}_{1:k})$



Selección de la función de densidad enfatizada

- Función óptima (minimiza la varianza de los pesos)

$$q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^i,\boldsymbol{z}_k)_{opt} = p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^i,\boldsymbol{z}_k)$$

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^i) = \omega_{k-1}^i \int p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k')p(\boldsymbol{x}_k'|\boldsymbol{x}_{k-1}^i)d\boldsymbol{x}_k'$$

  - Problema: hay que conocer $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^i,\boldsymbol{z}_k)$ y la evaluar la integral

- Función *conveniente*

$$q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^i,\boldsymbol{z}_k) = p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^i)$$

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i p(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k^i)$$

- Existen múltiples elecciones para la función (es un paso esencial en el diseño del filtro)

Conclusiones

- Problema: Estima del estado de un sistema dinámico a partir de un conjunto de medidas relacionadas con el mismo
- Filtro de Kalman
  - Modelo lineal y gaussiano
  - Estima recursiva: Predicción + Corrección
- Filtro de Kalman extendido
  - Modelo no lineal gaussiano
- Filtro de partículas
  - Modelo no lineal no gaussiano
  - Muestreo enfatizado y remuestreo