



Universidad
Carlos III de Madrid

Apuntes de Campos Electromagnéticos
y Propagación
Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería de Sistemas Audiovisuales
Curso 10-11

José Luis Vázquez Roy
Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

27 de septiembre de 2010





Índice general

0. Introducción y Revisión de Electricidad y Magnetismo	7
0.1. Definiciones básicas	7
0.1.1. Definiciones de campo	7
0.1.2. Líneas de campo	7
0.1.3. Flujo de \vec{A} a través de una superficie S	8
0.2. Sistemas de coordenadas	8
0.2.1. Definición	8
0.3. Cálculo diferencial vectorial	8
0.3.1. Gradiente de una función escalar de punto ψ	8
0.3.2. Laplaciana de una función escalar de punto ψ	8
0.3.3. Divergencia de una función vectorial de punto \vec{A}	9
0.3.4. Rotacional de una función vectorial de punto \vec{A}	9
0.3.5. Laplaciana de una función vectorial de punto \vec{A}	9
0.3.6. Teorema de la divergencia de Gauss	9
0.3.7. Teorema de Stokes	9
0.4. Electrostática	10
0.4.1. La carga	10
0.4.2. Ley de Coulomb y principio de superposición	10
0.4.3. Definición de \vec{E}	11
0.4.4. Definición de \vec{D}	11
0.4.5. Propiedades integrales y diferenciales de \vec{E} y \vec{D}	12
0.4.6. Potencial electrostático	12
0.5. Magnetostática	13
0.5.1. Corriente y conceptos relacionados	13
0.5.2. Fuerzas entre conductores	14
0.5.3. Definición del vector de intensidad de campo magnético \vec{H}	15
0.5.4. Definición del vector de inducción magnética \vec{B}	16
0.5.5. Propiedades diferenciales e integrales de \vec{B} y \vec{H}	16
0.5.6. El Potencial vector magnético	16
0.6. Energía en campos estáticos	17



4 ÍNDICE GENERAL

0.6.1.	Energía electrostática	17
0.6.2.	Energía magnetostática	18
0.7.	Electrodinámica	18
0.7.1.	El problema de la variación temporal	18
0.7.2.	La Ley de Faraday	18
0.7.3.	La corriente de desplazamiento y las ecuaciones de Maxwell	19
1.	El modelo electromagnético	23
1.1.	El campo electromagnético sobre el cuerpo real	23
1.1.1.	Ecuaciones locales	23
1.1.2.	Condiciones de contorno	24
1.1.3.	Medio material de conductividad infinita. Condiciones de contorno en la frontera de otro medio	25
1.1.4.	Medio material de conductividad nula	25
1.1.5.	Evolución temporal de la densidad cúbica de carga	26
1.2.	El campo electromagnético sobre el cuerpo complejo (dominio de la frecuencia)	26
1.2.1.	Soluciones estacionarias (régimen permanente)	26
1.2.2.	Medio conductor no perfecto. Permitividad compleja	28
1.3.	Energía y potencia en los campos electromagnéticos reales y complejos. Vector de Poynting	30
1.3.1.	Introducción	30
1.3.2.	Energía y potencia en el campo electromagnético real. Vector de Poynting	31
1.3.3.	Energía y potencia en el campo electromagnético complejo. Vector de Poynting complejo	32
2.	Propagación en medio indefinido	35
2.1.	Ondas planas	35
2.1.1.	Velocidad de fase	36
2.1.2.	Impedancia intrínseca	36
2.2.	Ondas planas en medios con pérdidas	37
2.2.1.	Ondas planas en medio buen dieléctrico	38
2.2.2.	Ondas planas en medio buen conductor	38
2.3.	Vector de Poynting	39
2.4.	Ondas planas. Planteamiento general	39
2.5.	Dispersión	40
2.5.1.	Velocidad de grupo	40
2.5.2.	Diagrama de Brillouin	40
2.6.	Polarización	41
2.6.1.	Representación de estados de polarización	42
2.7.	Ondas planas en cambios de medio	42



2.7.1. Incidencia normal	43
2.7.2. Incidencia oblicua	47



Universidad
Carlos III de Madrid

6 ÍNDICE GENERAL



CAPÍTULO 0

Introducción y Revisión de Electricidad y Magnetismo

I. REVISIÓN DE ELEMENTOS MATEMÁTICOS

En este apartado se introducen los elementos básicos del cálculo vectorial que serán útiles en el desarrollo de los contenidos de los apuntes. También se hace un repaso breve del problema de las magnitudes y unidades en las leyes físicas.

0.1 DEFINICIONES BÁSICAS

0.1.1

Definiciones de campo

Definimos un *campo escalar* ψ como:

$$\psi : D \subset \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}$$

función escalar y de punto que asocia a cada punto \vec{x} en su dominio D un escalar ψ .

Definimos un *campo vectorial* \vec{A} como:

$$\vec{A} : D \subset \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^3$$

función vectorial y de punto que asocia a cada punto \vec{x} en su dominio D un vector \vec{A} .

Las versiones complejas de los campos escalares y vectoriales se definen de manera análoga.

0.1.2

Líneas de campo

Las líneas de campo son líneas tangentes al campo vectorial en cada punto. Indican dirección y sentido e intensidad, para lo cual se dibujan de forma



8 INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

que hay mayor densidad de líneas en las zonas donde la intensidad de campo es mayor.

En dinámica de fluidos, una línea de campo es precisamente una trayectoria recorrida por una partícula de fluido.

0.1.3

Flujo de \vec{A} a través de una superficie S

Dado un campo vectorial \vec{A} decimos que su *flujo* a través de una superficie S viene dado por:

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

En dinámica de fluidos, donde \vec{A} representa un campo de velocidades, el diferencial de flujo mide la cantidad de fluido que pasa por el paralelogramo tangente por unidad de tiempo.

0.2 SISTEMAS DE COORDENADAS

0.2.1

Definición

Dependiendo del problema y de las simetrías que presente, es conveniente elegir el sistema de coordenadas.

- Coordenadas rectangulares (x, y, z) .
- Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) .
- Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Notar que el ángulo θ es de revolución con respecto al eje z y varía entre 0 y π mientras que el ϕ se mide siempre en el plano xy y varía en un margen de 0 a 2π .

0.3 CÁLCULO DIFERENCIAL VECTORIAL

0.3.1

Gradiente de una función escalar de punto ψ

Sea $\psi(x, y, z)$ una función escalar y de punto. Se define el gradiente de ψ en coordenadas rectangulares como:

$$\nabla\psi(x, y, z) = \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial z}\hat{z}$$

0.3.2

Laplaciana de una función escalar de punto ψ

Sea $\psi(x, y, z)$ una función escalar y de punto. Se define la laplaciana de ψ en coordenadas rectangulares como:

$$\Delta\psi(x, y, z) = \nabla^2\psi(x, y, z) = \frac{\partial^2\psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y, z)}{\partial z^2}$$

0.3.3

Divergencia de una función vectorial de punto \vec{A}

Sea $\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$ una función vectorial y de punto. Se define la divergencia de \vec{A} en coordenadas rectangulares como:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

0.3.4

Rotacional de una función vectorial de punto \vec{A}

Sea $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ una función escalar y de punto. Se define el rotacional de \vec{A} en coordenadas rectangulares como:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

que simbólicamente puede expresarse como:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

0.3.5

Laplaciana de una función vectorial de punto \vec{A}

Sea $\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$ una función vectorial y de punto. Se define la laplaciana de \vec{A} en coordenadas rectangulares como:

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \hat{x} + \Delta A_y \hat{y} + \Delta A_z \hat{z}$$

0.3.6

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea V una región y S la superficie cerrada orientada que acota V . Sea \vec{A} un campo vectorial definido en V . Entonces:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

0.3.7

Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada definida por una función C^2 , $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ y sea \vec{A} un campo vectorial C^1 en S . Entonces, si L denota una curva frontera orientada de S , tenemos:

$$\iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



II. REVISIÓN DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

En este apartado se revisan los conceptos más importantes de la electricidad y magnetismo clásicos hasta llegar al planteamiento de las ecuaciones de Maxwell.

0.4 ELECTROSTÁTICA

0.4.1

La carga

Electricidad deriva de $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ que significa ámbar en griego

Introducimos la función $\rho(\vec{r})$ conocida como *densidad de carga*

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dv}$$

La carga está cuantizada, de forma que la carga total de un cuerpo es un múltiplo entero de la carga de un electrón. Las distribuciones de carga que emplearemos son continuas. Por ello, consideraremos elementos de volumen suficientemente grandes como para englobar un número elevado de partículas cargadas, de forma que deje de manifestarse su carácter discreto y veamos efectos de promedio.

La unidad de carga en el sistema MKSA (SI) es el Coulombio (C). La carga de un electrón es de $-1.602 \times 10^{-19}C$

Se entiende por carga puntual situada en \vec{r}_1 la definida como:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

donde $\delta(\cdot)$ es una función *delta de Dirac*. Una carga puntual tiene sentido al considerar distribuciones de carga a distancias muy grandes respecto a su tamaño.

0.4.2

Ley de Coulomb y principio de superposición

Hay dos leyes fundamentales en la electrostática: la Ley de Coulomb y el principio de superposición. Supongamos dos cargas puntuales de valor q y q' separadas una distancia r . La *Ley de Coulomb* establece que la fuerza entre ellas responde a la expresión:

$$\vec{F} = C \frac{qq'}{r^2} \hat{r}$$

donde C es una constante que depende del medio. En un sistema racionalizado la ecuación anterior resulta:

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

siendo ϵ una constante conocida como *permitividad o constante dieléctrica* del medio.

Cuando las cargas se encuentran en el vacío, decimos que $\epsilon = \epsilon_0$. El valor de esta constante en MKSA es (notar que tiene dimensiones):

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} (\text{Faradios}/m) = 8.854 \times 10^{-12} (\text{F}/m)$$

Para medios lineales, homogéneos e isotrópos distintos al vacío, la permitividad se expresa como:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

siendo ϵ_r la *permitividad relativa* del medio, que cumple siempre $\epsilon_r > 1$. Más adelante comentaremos brevemente cómo se introducen los medios materiales en la descripción del fenómeno electromagnético. En cuanto al *principio de superposición*, establece que la fuerza que experimenta una carga dada debida a una distribución de cargas es la suma vectorial de las fuerzas que producirían cada una de las cargas de la distribución si estuvieran aisladas del resto.

Un medio es homogéneo cuando sus características no dependen de las coordenadas, e isotrópico, cuando las propiedades del mismo varían igual en todas las direcciones en torno a un punto dado.

0.4.3

Definición de $\vec{\mathcal{E}}$

Aunque las dos leyes anteriores son suficientes para resolver cualquier problema de la electrostática, es conveniente por razones prácticas y conceptuales introducir dos ideas secundarias que serán de gran utilidad: el campo eléctrico y el potencial electrostático.

Se define el campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$ creado por q' en la posición de la carga q como la fuerza que experimenta la unidad de carga:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{q}$$

de donde se sigue que:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{q'}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \quad (1)$$

Observamos que se trata de un campo de fuerzas centrales. Sus unidades más habituales en MKSA son N/C ó $Voltio/m = V/m$.

El principio de superposición se expresa como:

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{4\pi\epsilon r_i^2} \hat{r}_i$$

0.4.4

Definición de $\vec{\mathcal{D}}$

Resulta de interés introducir un nuevo vector más relacionado con las cargas que $\vec{\mathcal{E}}$. Definimos:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (2)$$

asumiendo una relación lineal entre $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{D}}$. Este nuevo campo se denomina *vector desplazamiento eléctrico* o *vector de densidad eléctrica de flujo*. Para cargas puntuales, este vector tiene la propiedad de que es radial e independiente del material en cuyo seno se encuentran las cargas. Además su flujo a través de una superficie cerrada que englobe a la carga es igual a la carga total:

$$\oiint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{s} = \Sigma q_i$$

y esto es independiente de la superficie en cuestión.

Cuando se trabaja con medios materiales reales (no en el vacío), la presencia de un campo eléctrico en dichos medios puede provocar que las cargas



12 INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

de las moléculas (neutra en un principio) se desplacen de forma que dichas moléculas se *polarizan*. También puede ocurrir que la molécula inicialmente se encuentre polarizada (o lo que es lo mismo, que tenga un momento dipolar permanente), por lo que el campo hará que se oriente de determinada forma. *Grosso modo*, el campo final será la suma del campo inicial más las contribuciones de los distintos dipolos y la distribución de campo en el interior del material será difícil de determinar y presentará grandes variaciones a nivel microscópico. De acuerdo con la evidencia experimental se verifica:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e \quad (3)$$

Recordamos que una distribución con un momento dipolar \vec{P}_e crea un campo externo equivalente al que produciría una distribución volumétrica de carga $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}_e$ y una distribución superficial $\rho_s = P_{en}$.

El vector \vec{P}_e es el vector adicional de polarización eléctrica.

En medios lineales, homogéneos e isotrópicos (3) se convierte en:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

donde χ_e es una constante positiva que depende del material y se denomina *susceptibilidad eléctrica*.

0.4.5

Propiedades integrales y diferenciales de \vec{E} y \vec{D}

Según el teorema de Helmholtz, un campo vectorial queda unívocamente determinado si se conocen su divergencia y su rotacional en todos los puntos del espacio.

Estudiamos las propiedades integrales y diferenciales de \vec{E} a partir de la expresión (1) utilizando resultados conocidos del cálculo vectorial.

Se demuestra que se verifica la ecuación:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dv$$

donde S es la superficie cerrada que encierra el volumen V .

Esta expresión se conoce como *Teorema de Gauss*. Esto significa que el flujo neto a través de una superficie cerrada que no encierra ninguna carga es cero.

La versión diferencial de este teorema es:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Por otra parte, es fácil demostrar que

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

y aplicando el teorema de Stokes a esta integral, resulta:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4)$$

Un campo que verifica (4) se denomina conservativo.

0.4.6

Potencial electrostático

Esta propiedad permite una simplificación. Sabemos que un campo que cumpla esta propiedad se puede calcular como:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\Phi} \quad (5)$$

siendo Φ una función escalar y de punto denominada *potencial electrostático* que tiene una propiedad muy útil: la diferencia entre dos puntos es igual al trabajo que hay que realizar para trasladar una carga unidad entre ellos.

En efecto, el trabajo que hay que realizar para transportar una carga del punto 1 al punto 2 contra el campo $\vec{\mathcal{E}}$ será:

$$W_{12} = - \int_1^2 \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \Phi_2 - \Phi_1$$

Así, la diferencia de potencial entre dos puntos es igual al trabajo que hay que realizar para trasladar una carga unidad entre los dos puntos. La ecuación $\Phi(\vec{r}) = cte.$ define una superficie equipotencial, siendo el campo perpendicular a estas superficies en todo punto.

Si ahora tomamos la divergencia de (5), resulta:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

se obtiene la conocida como *Ecuación de Poisson*, que para puntos del espacio donde $\rho = 0$ se convierte en:

$$\Delta\Phi = 0$$

conocida como *Ecuación de Laplace*.

Teniendo en cuenta que el potencial creado por una carga puntual es:

$$\Phi_q = \frac{q'}{4\pi\epsilon r}$$

para un elemento de carga $\rho dv'$ será $d\Phi = \rho dv' / |\vec{r} - \vec{r}'|$ por lo que el potencial total será, por superposición:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

que corresponde a la versión integral de la ecuación de Poisson. Esta ecuación plantea un *problema de suma* en contraste con los problemas de condiciones de contorno, bastante más complejos, en los que $\rho(\vec{r})$ no se conoce de antemano.

0.5 MAGNETOSTÁTICA

0.5.1

Corriente y conceptos relacionados

Supongamos una distribución de carga que se mueve con velocidad \vec{v} constante. Definimos un vector densidad superficial de corriente eléctrica $\vec{\mathcal{J}}$ en cada punto como:

$$\vec{\mathcal{J}} = \rho\vec{v} \quad (6)$$

esto es, como la cantidad de carga que por unidad de tiempo atraviesa una unidad de área (A/m^2 en MKSA).

Supongamos ahora una densidad de corriente dependiente del tiempo $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t)$ y una superficie infinitesimal $d\vec{s}$ situada en el seno de la corriente y sea

La palabra magnetismo deriva de Magnesia, región de Grecia donde se encontraron las primeras piedras imán con estas propiedades



14 INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

dI la carga que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Claramente $dI = \vec{J} \cdot d\vec{s}$ por lo que se verificará:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

I se denomina *corriente* a través de la superficie S .

Supongamos que la superficie S es cerrada y que admitimos el principio de que la carga no se crea ni se destruye. Entonces, la carga total en el volumen V será $\int_V \rho dv$ y su tasa de variación con el tiempo $\partial/\partial t \int_V \rho dv$. Por tanto, el principio de conservación de la carga se expresa como:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = 0$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia al primer sumando podemos sustituirlo por $\int_V \nabla \cdot \vec{J} d\vec{s}$ y dado que la expresión anterior debe verificarse para cualquier volumen V , se sigue que:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (7)$$

expresión matemática de la *Ley de conservación de la carga* o *ecuación de continuidad de la carga*.

Si la densidad de carga ρ es una función sólo de \vec{r} y no varía con el tiempo, la ecuación anterior se convierte en:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

que implica que las líneas de flujo de corriente se cierran sobre sí mismas, esto es, forman lazos cerrados.

Cuando la corriente se produce dentro de un conductor y dentro del conocido como *margen lineal*, se verifica experimentalmente la conocida *Ley de Ohm (generalizada)*:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

siendo σ la *conductividad* del medio ($\Omega^{-1}m^{-1}$ en MKSA). El valor σ permite clasificar a su vez a los medios como conductores, semiconductores y aislantes, si bien esta división es relativa, como veremos más adelante.

A partir de la anterior se deriva la *Ley de Joule*:

$$\frac{dP}{dv} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma |\vec{E}|^2$$

0.5.2

Fuerzas entre conductores

Supongamos dos lazos por los que discurren las corrientes I_1 y I_2 respectivamente. Los experimentos de Ampère mostraron que la fuerza total \vec{F}_1 sobre el circuito 1 debida a su interacción con el circuito 2 es proporcional a las dos corrientes I_1 y I_2 y a una integral que depende sólo de la geometría (ver figura 1):

$$\vec{F}_1 = C I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

La constante de proporcionalidad C depende del medio. En un sistema

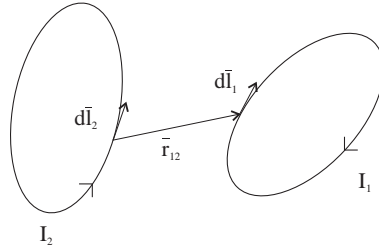


Figura 1: Ley de Ampère

racionalizado, la ecuación anterior se escribe:

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

siendo μ una constante conocida como *permeabilidad magnética* del medio, cuyas unidades son $(\text{Henrio}/\text{m}) = \text{H}/\text{m}$ en MKSA. La permeabilidad del vacío en este sistema es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\text{H}/\text{m})$$

Para cualquier otro medio lineal, homogéneo e isótropo, podemos escribir:

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

0.5.3

Definición del vector de intensidad de campo magnético $\vec{\mathcal{H}}$

Partimos de una situación en la que tenemos corrientes eléctricas estacionarias, esto es $\partial\vec{\mathcal{J}}/\partial t = 0$. Tal y como hicimos en electrostática, es conveniente definir un nuevo campo, imaginando que una de las corrientes produce un campo que actúa sobre la otra.

Definimos el *vector intensidad de campo magnético* $\vec{\mathcal{H}}$ producido por I_2 como:

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{I_2}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Entonces, postulamos que este campo $\vec{\mathcal{H}}$ ejerce una fuerza $\vec{\mathcal{F}}_1$ sobre la corriente I_1 dada por:

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = \mu I_1 \oint d\vec{l}_1 \times \vec{\mathcal{H}}$$

siendo las unidades de $\vec{\mathcal{H}}$ A/m en MKSA.

Es conveniente extender la definición de $\vec{\mathcal{H}}$ asumiendo que cada elemento $d\vec{l}$ de corriente produce un campo $d\vec{\mathcal{H}}$ dado por:

$$d\vec{\mathcal{H}} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

siendo \vec{r} el vector que une el elemento y el punto en el que se calcula el campo. Esta expresión recibe el nombre de *Ley de Biot y Savart*. Notar que implícitamente estamos utilizando el principio de superposición de fuerzas magnéticas.



0.5.4

Definición del vector de inducción magnética \vec{B}

De la misma forma que hicimos con el campo eléctrico en electrostática, es necesario introducir el efecto de lo microscópico en nuestro planteamiento macroscópico. A efectos de calcular el campo magnético, los medios materiales se caracterizan mediante momentos dipolares magnéticos. Introducimos un vector vector de inducción magnética \vec{B} definido como:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8)$$

que puede expresarse como

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{P}_m \quad (9)$$

siendo \vec{P}_m el vector adicional de magnetización. En medios lineales, homogéneos e isotropos (9) se convierte en:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{P}_m = \mu_o \vec{H} + \mu_o \chi_m \vec{H}$$

donde χ_m es una constante positiva o negativa que depende del material y se denomina *susceptibilidad magnética*

0.5.5

Propiedades diferenciales e integrales de \vec{B} y \vec{H}

Operando a partir de las ecuaciones anteriores, se puede demostrar que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11)$$

esto es, el campo \vec{B} es rotacional puro. Empleando los teoremas de la divergencia y Stokes llegamos a las versiones integrales:

Notar que el campo \vec{B} no es conservativo

$$\boxed{\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I}$$

conocida como *Ley de Ampère*, junto con

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

0.5.6

El Potencial vector magnético

Dado que $\nabla \times \vec{B}$ es distinto de cero, no puede existir un potencial *real* para calcular el campo mediante una diferenciación. No obstante, podemos introducir un potencial generalizado de tipo vectorial que sí cumple esta propiedad. Además el resultado será válido también para el interior de las corrientes.

Introducimos un vector \vec{A} al que llamaremos *potencial vector* de forma que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$



por lo que se cumplirá automáticamente que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Entonces, la ecuación (10) resulta:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J}$$

que corresponde a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas y que se puede expresar como:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}$$

Por el teorema de Helmholtz, \vec{A} queda determinado sólo cuando definamos $\nabla \cdot \vec{A}$. Como tenemos libertad para hacerlo como queramos, a la vista de la ecuación anterior, interesa imponer $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ de forma que:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

Dado que esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de Poisson, su solución será análoga, de forma que podemos decir que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

0.6 ENERGÍA EN CAMPOS ESTÁTICOS

0.6.1

Energía electrostática

Suponemos una distribución arbitraria de cargas. Se demuestra que la energía potencial del sistema conocida como *energía electrostática* viene dada por:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv'$$

Una variante de esta expresión es:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) dv$$

Aunque esta integral se extiende sólo a los puntos donde existe densidad de carga, puede ser extendida a todo el volumen de espacio V_t de la siguiente forma:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{V_t} \vec{E} \cdot \vec{D} dv$$

Esta fórmula expresa la energía únicamente en términos del campo electrostático, concepto básico Maxwelliano (la energía reside en el campo no en las fuentes).



0.6.2

Energía magnetostática

Se demuestra que la energía necesaria para formar una distribución de corriente viene dada por:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dv$$

Aunque la energía parece residir en las corrientes, esta expresión puede modificarse para que la energía se exprese únicamente en función del campo:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{V_t} \vec{B} \cdot \vec{H} dv$$

0.7 ELECTRODINÁMICA

0.7.1

El problema de la variación temporal

La electrostática trata distribuciones de cargas estáticas, esto es, inmóviles en promedio. Por tanto, los campos eléctricos que se producen son independientes del tiempo. La magnetostática estudia los campos creados por cargas en movimiento, con la particularidad de que estas corrientes son estacionarias, esto es, independientes del tiempo. Los campos eléctricos y magnéticos son, por tanto, independientes del tiempo. Ahora vamos a calcular el efecto del movimiento de las cargas de manera arbitraria, por lo que los campos serán variables con el tiempo.

En espacio libre, en presencia únicamente de cargas y distribuciones de corriente pero no de materia, hay cuatro ecuaciones básicas para los campos estáticos, dos para definir la divergencia y el rotacional de \vec{E} y otras dos para \vec{B} . Para el caso electrodinámico, las ecuaciones que definen los rotacionales deben completarse con términos que dependen de la variación temporal. Uno de ellos fue encontrado experimentalmente por *Faraday*. El otro, fue postulado por *Maxwell*. Este conjunto de 4 ecuaciones completas se denomina *ecuaciones de Maxwell para espacio libre*.

0.7.2

La Ley de Faraday

Faraday encontró, empleando corrientes en lazos, que la integral curvilínea del campo eléctrico alrededor de un lazo es proporcional a la variación temporal del flujo magnético a través de ese lazo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

La evidencia empírica indica que esta relación entre un campo magnético variable y el campo eléctrico, es una propiedad de los campos en el espacio: los cables y las corrientes que fluyen en ellos sirve únicamente para que se manifieste (12).

Empleando el teorema de Stokes podemos escribir:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

que es la generalización de la ley $\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$ de la electrostática.

Si generalizamos lo anterior a lazos de forma variable se obtiene la conocida *Ley de Lenz*:

$$fem = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (13)$$

siendo ϕ el flujo a través de la superficie que define el lazo y fem la fuerza electromotriz generada.

0.7.3

La corriente de desplazamiento y las ecuaciones de Maxwell

Discutimos ahora una generalización de las ecuaciones anteriores debida a *James C. Maxwell*. Esta generalización es un postulado que se entiende mejor si miramos al contexto de la época en que se introdujo.

Consideremos la ecuación de la magnetostática $\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{J}}$. Si tomamos la divergencia de esta ecuación obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0$$

Sabemos que el hecho de que la divergencia de un vector sea cero implica que las líneas de campo se cierran sobre sí mismas. Por lo tanto, la ecuación anterior implica que la corriente fluye en lazos cerrados. Esto es lo que ocurre con campos estáticos. Sin embargo ahora, nos encontramos ante una situación diferente.

Si p. ej. consideramos un condensador que se carga conectando las dos placas a una batería, podemos decir que existe corriente en el cable pero no habrá corriente entre las placas del condensador. La concepción de este proceso por parte de Maxwell es diferente. Para entenderla acudimos a los descubrimientos de Faraday sobre el fenómeno de la polarización o lo que es lo mismo, a la separación de cargas en un medio material debido a la presencia de un campo eléctrico. Las cargas deben moverse para separarse y, dado que las cargas en movimiento constituyen una corriente, el proceso de polarización implica la existencia de una corriente que puede llamarse *corriente de polarización*. En aquel momento se suponía que las acciones electromagnéticas no se transmitían a través del vacío sino a través de un *éter* que no era distinto en nada a la *materia dieléctrica*. Por lo tanto, no era raro que Maxwell extendiera el concepto de *corriente de polarización* al éter.

Maxwell consideró que, en el proceso de carga de un condensador, los cables del condensador y el éter entre dichas placas formaban un circuito material continuo. Para ello, modificó las ecuaciones anteriores como se indica a continuación.

A partir de $\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$ se sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}$$



20 INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Si introducimos esto en la ecuación de continuidad de carga (7) obtenemos:

$$\nabla \cdot \left[\vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right] = 0 \quad (14)$$

El segundo sumando $\partial \vec{\mathcal{D}}/\partial t$ tiene las dimensiones de una corriente y fue denominado por Maxwell *corriente de desplazamiento*. Si consideramos que la corriente total consiste en una densidad de corriente más una corriente de desplazamiento, vemos que la corriente total siempre fluye en lazos cerrados. Sin embargo, debemos recordar que la corriente de desplazamiento no es una corriente en el sentido ordinario, ya que no está asociada a un flujo de carga.

A partir del resultado (14), Maxwell generalizó la Ley de Ampère diferencial $\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}}$ asumiendo que para los campos variables con el tiempo, la corriente en esta fórmula debería ser la corriente total incluyendo la corriente de desplazamiento, de forma que esta ecuación resulta:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (15)$$

Esta ecuación es un postulado que ha quedado contrastado ampliamente por la experiencia. Entonces, las ecuaciones del modelo de Maxwell son:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

y si imponemos como postulado la ley de conservación de carga:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

se puede demostrar fácilmente que se cumple:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

Además, en el sistema de ecuaciones planteado, hemos de considerar el tipo de medio material (ϵ, μ, σ):

$$\vec{\mathcal{J}} = \sigma \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$$

conocidas como *relaciones constitutivas* del medio material

Las ecuaciones de Maxwell permiten calcular los campos $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{B}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$ a partir de fuentes arbitrarias. Dado que estos campos son importantes debido a su acción sobre las cargas, los fundamentos de la teoría electromagnética se completan prescribiendo cómo es dicha acción. Para ello se utiliza la *Ley de la densidad de fuerza de Lorentz*: dada una distribución de carga arbitraria caracterizada por $\rho(\vec{r})$ que se mueve a una velocidad $\vec{v}(\vec{r})$ con respecto a un sistema de referencia inercial en el cual hay campos $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$, la densidad de fuerza (fuerza/unidad volumen) que actúa sobre la distribución \vec{f} es:

$$\boxed{\vec{f} = \rho(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}})}$$



Observamos cómo el primer sumando es una extensión del campo electrostático al caso electrodinámico. El segundo sumando es la esencia del postulado. Generaliza los resultados obtenidos en magnetostática sobre la fuerza entre dos lazos con corrientes estacionarias. Por último, la energía almacenada (eléctrica y magnética) por el campo electromagnético vendrá dada por:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{V_t} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} dv$$
$$W_M = \frac{1}{2} \int_{V_t} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}} dv$$

Como veremos a lo largo del curso, los conceptos clave del planteamiento, ampliamente validado por la experiencia, son:

- la introducción de $\vec{\mathcal{D}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$
- la inseparabilidad $\vec{\mathcal{E}} \leftrightarrow \vec{\mathcal{B}}$: observamos como están acoplados en las ecuaciones y que, aunque se verifique $\vec{\mathcal{J}} = 0$ existirán fuentes de campo magnético si $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t \neq 0$, por lo que si existen campos eléctricos variables, éstos se convierten en fuentes de campo magnético variable y lo mismo ocurre al contrario: aunque no existan distribuciones de cargas, si existen campos magnéticos variables $\partial \vec{\mathcal{B}} / \partial t \neq 0$, éstos se convierten en fuentes de campo eléctrico.





CAPÍTULO 1

El modelo electromagnético

1.1 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO SOBRE EL CUERPO REAL

1.1.1

Ecuaciones locales

Postulamos que las magnitudes que intervienen en el electromagnetismo están ligadas por las ecuaciones *locales*:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (1.5)$$

$$\vec{\mathcal{J}} = \sigma \vec{\mathcal{E}} \quad (1.6)$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (1.7)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}} \quad (1.8)$$

Las dos primeras son igualdades vectoriales y se conocen habitualmente con la designación de *primera y segunda ecuación de Maxwell*, respectivamente. La tercera, escalar, traduce el postulado de la conservación de la carga eléctrica y, unida a la cuarta y la quinta, también escalares, forma el bloque de las ecuaciones de la divergencia. Las tres últimas, vectoriales, introducen las constantes materiales σ , ϵ y μ que caracterizan electromagnéticamente el medio soporte del campo (relaciones constitutivas del medio material).

Ha de indicarse que, el sistema de ecuaciones así establecido es compatible a pesar de no ser independiente. Se puede demostrar que efectivamente no lo es ya que (1.4) es consecuencia de (1.1) y (1.3) y (1.5) lo es de (1.2).

Hay que destacar lo siguiente:

1. Los campos vectoriales y escalares que aparecen en las ecuaciones anteriores son reales, por su propia definición.

24 EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO

2. En lo sucesivo, salvo indicación expresa, consideraremos las tres constantes materiales σ , ϵ y μ como magnitudes escalares independientes del punto del espacio y del tiempo, consecuencia de admitir que el medio es *homogéneo* e *isótropo*.
3. Todas las leyes integrales del electromagnetismo experimental se deducen con todo rigor de las ecuaciones postuladas.

1.1.2

Condiciones de contorno

Las *condiciones de contorno* relacionan los valores que toman las magnitudes del campo electromagnético en dos puntos infinitamente próximos, situados a uno y otro lado de una superficie de discontinuidad del espacio soporte del campo, superficie que será la frontera de dos medios materiales eléctricamente distintos, que no están caracterizados por las mismas constantes σ , ϵ y μ (habitualmente conocidos como medios *1* y *2*).

Definimos en cada punto un vector unitario \hat{n} normal a la superficie de separación tal y como se muestra en la figura 1.1.

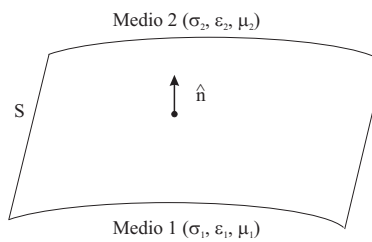


Figura 1.1: Superficie de separación entre materiales

Postulamos que las magnitudes que intervienen en cualquier problema de campo electromagnético satisfacen las condiciones de contorno, sobre una superficie de separación S de dos medios distintos:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) &= \rho_s \\ \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_2 - \vec{\mathcal{B}}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) &= \vec{J}_s \\ \hat{n} \times (\vec{\mathcal{E}}_2 - \vec{\mathcal{E}}_1) &= 0\end{aligned}$$

en que \hat{n} es un vector unitario normal a S y dirigido del medio 1 hacia el medio 2 tal y como se ha comentado y hay que admitir la existencia de hojas de carga y corriente definidas como:

- ρ_s , una densidad superficial de carga (C/m^2)
- \vec{J}_s , una densidad lineal de corriente (A/m)

Veamos ahora qué ocurre en dos casos particulares.

1.1.3

Medio material de conductividad infinita. Condiciones de contorno en la frontera de otro medio

En el seno de un medio de conductividad infinita (conductor perfecto) se verifica que el campo electromagnético es nulo. Entonces, las condiciones generales se reducen a:

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{D}}_2 = \rho_s \quad (1.9)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_2 = 0 \quad (1.10)$$

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_2 = \vec{\mathcal{J}}_s \quad (1.11)$$

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_2 = 0 \quad (1.12)$$

Podemos expresar estos resultados de modo sencillo diciendo que en los puntos de un medio material de conductividad finita inmediatos a una superficie frontera con otro de conductividad infinita, el campo eléctrico debe ser normal y el campo magnético tangencial a dicha superficie. Además, la corriente sobre éste viene dada por (1.11), en que \hat{n} es un vector unitario normal dirigido en el sentido que va del medio conductor perfecto al otro medio.

1.1.4

Medio material de conductividad nula

Si un medio material es un aislante perfecto, σ es cero y (1.6) nos dice que no hay corrientes de conducción $\vec{\mathcal{J}}$ en ningún punto del medio. Pero entonces, (1.3) establece que la densidad cúbica de carga no depende del tiempo, es decir, que se mantiene igual al valor inicial en todos los puntos del medio. Es un resultado que físicamente podíamos haber dado a priori, pues si el medio no es conductor, no permitirá el desplazamiento de cargas en su interior y ρ se mantendrá invariable.

En los problemas que trataremos a continuación supondremos, salvo en casos excepcionales, que es un aislante perfecto el medio para el que plantearemos y resolveremos las ecuaciones de Maxwell y, en consecuencia, prescindiremos de $\vec{\mathcal{J}}$. A pesar de que esta hipótesis sólo implica que ρ sea independiente del tiempo, pero no idénticamente nula, postularemos también esta anulación, apoyándonos en el resultado a que llegaremos en el apartado siguiente. Las ecuaciones locales para estos medios aislantes serán pues:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$$

1.1.5



Evolución temporal de la densidad cúbica de carga

Sea un medio material homogéneo e isótropo cualquiera con σ finita y no nula, para el que son válidas las ecuaciones (1.1)-(1.8). De (1.3) y (1.6), deducimos que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

por lo que

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

y de (1.4) y (1.7):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

se sigue que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Igualando los segundos miembros de estas ecuaciones, dado que el primer miembro es el mismo, llegamos a:

$$-\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \implies \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$

ecuación que da la dependencia temporal de ρ y cuya integración inmediata es:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_o(x, y, z, t_o) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = \rho_o(x, y, z, t_o) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

siendo $\tau = \epsilon/\sigma$ la *constante de relajación del medio*, valor de t que corresponde a una caída de $1/e$ (63%).

En esta solución, $\rho_o(x, y, z, t)$ es el valor de la densidad cúbica de carga en el punto (x, y, z) en el instante inicial $t = 0$. Pero este resultado nos dice que, salvo el caso extremo de un aislante rigurosamente perfecto, en que σ sea idénticamente nulo, la densidad cúbica de carga tiende a anularse en el transcurso del tiempo, siendo tanto más rápida esta tendencia cuanto menor sea la cte. τ . P. ej. para el Cobre (conductor), $\tau = 1.5 \cdot 10^{-17}$ s y para el cuarzo (aislante) $\tau = 20$ días.

En consecuencia, salvo si en un instante determinado creamos voluntariamente una densidad cúbica de carga, su evolución temporal será continuamente decreciente y esta disminución será un proceso que se habrá iniciado en el comienzo de los tiempos. Es pues natural suponer que, por pequeño que sea σ , la densidad cúbica de carga es despreciable y admitir que esta densidad es cero.

1.2 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO SOBRE EL CUERPO COMPLEJO (DOMINIO DE LA FRECUENCIA)

1.2.1

Soluciones estacionarias (régimen permanente)

De la misma forma que se hace en la teoría de circuitos, cuando se trabaja en régimen permanente (soluciones estacionarias) es conveniente imponer variaciones de tipo armónico en el tiempo. En ese caso, tal y como ocurre en cualquier sistema lineal, excitaciones de entrada con la forma:

$$x(t) = \cos \omega t$$



1.2. El campo electromagnético sobre el cuerpo complejo (dominio de la frecuencia) 27

proporcionan salidas del tipo:

$$y(t) = \mathcal{A} \cos(\omega t + \phi)$$

Dado que el seno o el coseno no son más que combinaciones de las exponenciales complejas $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$, es más sencillo suponer que la señal de entrada es directamente una de estas funciones:

$$X(\omega) = e^{j\omega t}$$

a la que corresponde una salida

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \mathcal{A}e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$

quedando el problema caracterizado por un número complejo $H = \mathcal{A}e^{j\phi}$ que depende de ω . Esta notación se conoce como *fasorial*. Entonces, para trasladar al dominio del tiempo cualquier fasor basta con multiplicar por $e^{j\omega t}$ y tomar la parte real, p. ej. en el caso del fasor Y :

$$y(t) = \text{Re}[H \cdot e^{j\omega t}]$$

o la parte imaginaria si nuestra referencia es el seno. En cualquier caso, esto no es una limitación de cara a trabajar con señales de variación arbitraria, ya que éstas se pueden expresar como suma de senos y cosenos en ωt (transformada de Fourier).

Las exponenciales $e^{j\omega t}$ son autofunciones de los sistemas lineales y los autovalores asociados son los H

Todo lo visto hasta ahora para señales de una dimensión, es directamente trasladable al cálculo del campo EM en régimen permanente, ya que las ecuaciones de Maxwell son un sistema lineal, con la particularidad de que las magnitudes que manejamos son vectoriales, de forma que los fasores son también vectoriales. De esta forma podemos trabajar con campos de componentes complejas \vec{E} que se pueden trasladar al dominio del tiempo sin más que tomar:

$$\vec{\mathcal{E}} = \text{Re}[\vec{E} \cdot e^{j\omega t}] \quad (1.13)$$

Una ventaja de este planteamiento es que la variable t y las derivadas en t desaparecen, quedando la frecuencia ω como parámetro que se conoce de antemano (especificado en cada caso). P. ej. si imponemos este tipo de solución a la ecuación del rotacional de $\vec{\mathcal{E}}$ y trabajamos en el cuerpo complejo (o dominio de la frecuencia), tendremos:

$$\nabla \times \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{Re}[\vec{B}e^{j\omega t}])$$

$$\text{Re}[\nabla \times \vec{E}e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}e^{j\omega t})\right] = \text{Re}[-j\omega \vec{B}e^{j\omega t}]$$

que, de forma compacta, se escribe en el cuerpo complejo como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

y tenemos una ecuación que relaciona directamente los fasores complejos \vec{E} y \vec{B} a partir de los cuales se pueden calcular los campos en el dominio del tiempo $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ aplicando ecuaciones del tipo (1.13).

Entonces, el sistema de las ecuaciones de Maxwell junto con las relaciones constitutivas del medio y las condiciones de contorno expresado en el cuerpo

El planteamiento presentado es equivalente a trabajar directamente con las transformadas de Fourier de las ecuaciones y los campos



complejo es:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.17)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (1.18)$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (1.19)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (1.20)$$

$$(1.21)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (1.22)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.23)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (1.24)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.25)$$

y resuelto el problema planteado por estas ecuaciones, se obtienen las versiones de los campos en el dominio del tiempo tomando la parte real o imaginaria de cada vector multiplicado por $e^{j\omega t}$.

Si existieran densidades de corrientes debidas a fuerzas no electromagnéticas (excitación externa), y por tanto independientes del campo, la ecuación (1.14) se escribiría:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} + \vec{J} + j\omega\vec{D}$$

1.2.2

Medio conductor no perfecto. Permitividad compleja

Es interesante hacer observar que si para un medio conductor, pero no perfecto, hacemos en el sistema de ecuaciones la sustitución

$$\sigma + j\omega\epsilon = j\omega\epsilon_c$$

las nuevas ecuaciones con esta nueva permitividad son las correspondientes a un medio aislante. En consecuencia, si el medio es conductor, podemos tratarlo como aislante de permitividad compleja ϵ_c ($\epsilon_c \in \mathcal{C}$) mediante:

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

Notar que la parte imaginaria de ϵ_c es negativa

que se suele expresar como:

$$\epsilon_c = \epsilon \left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]$$

De esta forma, el sistema de las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos, lineales y con pérdidas se puede escribir también como:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_c\vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

1.2. El campo electromagnético sobre el cuerpo complejo (dominio de la frecuencia) 29

Como puede observarse, la parte imaginaria de la permitividad compleja está relacionada con la conductividad y por lo tanto, con las corrientes de conducción y las pérdidas por efecto Joule.

A frecuencias altas, por encima de los GHz, existe otro mecanismo por el cual pueden aparecer pérdidas o lo que es lo mismo, parte imaginaria en ϵ_c . Este tiene que ver con calentamiento del material debido al amortiguamiento de las vibraciones de los dipolos e iones de que está constituido (microscópico). Esto equivale a decir que los vectores \vec{D} y \vec{E} no son directamente proporcionales (es decir, están en fase), sino que aparece un cierto retardo ó desfase entre ellos que es más sencillo de expresar en el dominio de la frecuencia mediante una parte imaginaria ϵ'' :

$$\vec{D} = (\epsilon' - j\epsilon'')\vec{E} = [\epsilon'(f) - j\epsilon''(f)]\vec{E} = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} e^{-j\phi}\vec{E}$$

Para tener en cuenta este efecto se debe añadir un nuevo sumando a ϵ_c :

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' - j\frac{\sigma}{\omega}$$

En la práctica, las pérdidas debidas a σ y las debidas a ϵ'' son indistinguibles. Por ello, una cantidad de interés y además medible, relacionada con esta expresión, es la conocida como *tangente de pérdidas eléctricas del material* que se define como:

$$\tan \delta = \frac{\omega\epsilon'' + \sigma}{\omega\epsilon'}$$

de forma que se verifica:

$$\epsilon_c = \epsilon(1 - j \tan \delta)$$

Un material con pérdidas es aquel en el que $\tan \delta \neq 0$

que en función de la *permitividad relativa* ϵ_r resulta:

$$\boxed{\epsilon_c = \epsilon_r \epsilon_o (1 - j \tan \delta)}$$

donde ϵ_o es la permitividad del vacío. Finalmente, hay que destacar que $\vec{D} = (\epsilon' - j\epsilon'')\vec{E} \neq \epsilon_c \vec{E}$.

Por último, hay que señalar que aunque con campos estáticos se pueden dividir los materiales en *conductores* y *aislantes* dependiendo de la cte. de relajación τ , no ocurre lo mismo en la electrodinámica. No obstante, es posible establecer un criterio, que dependerá de la frecuencia, según el cual se considera (analizando el término $j\omega\epsilon_c\vec{E}$ en la ecuación del rotacional de \vec{H}):

- Conductor: aquel medio en el cual predomina la corriente de conducción sobre la de desplazamiento (predomina la parte imaginaria en ϵ_c):

$$\sigma + \omega\epsilon''(f) \gg \omega\epsilon'(f)$$

- Aislante (dieléctrico): aquel medio en el cual predomina la corriente de desplazamiento sobre la de conducción (predomina la parte real en ϵ_c):

$$\omega\epsilon'(f) \gg \sigma + \omega\epsilon''(f)$$



1.3 ENERGÍA Y POTENCIA
EN LOS CAMPOS
ELECTROMAGNÉTICOS
REALES Y COMPLEJOS.
VECTOR DE POYNTING

1.3.1

Introducción

El estudio electromagnético se inicia con la electrostática y sus definiciones de carga eléctrica y campo eléctrico, ligadas entre sí por el concepto mecánico de fuerza. Dada una distribución estática de cargas sobre conductores, puede obtenerse energía mecánica de esta distribución por alteración de la misma o por desplazamiento de los conductores. En consecuencia, a la configuración estática en cuestión le corresponde una energía mecánica potencial, de origen eléctrico, denominada *energía electrostática*.

Para evaluarla se extiende el principio de conservación de la energía, que incluía ya las energías mecánica y calorífica, a este nuevo tipo y se calcula la correspondiente a una distribución estática de cargas, partiendo de la base de que será igual a la energía mecánica que hay que gastar para llegar a esa configuración desde otra energía nula, siempre que no hayan aparecido energías de los tipos ya conocidos, mecánica y calorífica.

Para hacer este cálculo se elige arbitrariamente como configuración de energía nula la que presenta ausencia total de cargas eléctricas a distancia finita de los conductores, estando tales cargas a distancia infinita. Para evitar la aparición de energías de otro tipo hay que traer las cargas en cantidades infinitamente pequeñas, desplazándolas además de modo que pasen por una sucesión indefinida de estados de equilibrio, lo que requiere un tiempo infinitamente grande y se demuestra que esta energía es igual a una integral de volumen extendida a todos los puntos del espacio en que existan los vectores $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{D}}$

$$\int_V U dv$$

en la que aparece una *densidad cúbica de energía* U que vale

$$U = \frac{\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}}{2} \quad (1.26)$$

si el medio es homogéneo e isótropo.

La idea general de Maxwell consistió en postular que este resultado matemático era la traducción de una realidad física, la del almacenamiento de la energía en el medio asilante exterior a los conductores, en los puntos del espacio donde existan $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{D}}$, en lugar de estar concentrada en donde era lógico suponer, en las cargas llevadas a los conductores.

Razonamiento análogo se aplica para afirmar que la *energía magnetostática* está almacenada en el medio con una densidad:

$$W = \frac{\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}}{2} \quad (1.27)$$

si el medio es homogéneo e isótropo.

Además, establecemos que la densidad de energía por unidad de tiempo que se disipa en forma *calorífica* en un medio material conductor recorrido por una corriente estacionaria caracterizada por una densidad de corriente $\vec{\mathcal{J}}$

$$q = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} \quad (1.28)$$

1.3.2

Energía y potencia en el campo electromagnético real. Vector de Poynting

Postulamos que, cualquiera que sean el campo existente y su variación temporal, la energía electromagnética está almacenada en el medio, parte en forma de energía electrostática, con densidad (1.26) y el resto en magnetostática, con densidad (1.27), teniendo además lugar la disipación calorífica local (1.28) si el medio es conductor.

Con estos postulados previos, pasaremos a presentar la *interpretación* energética de una ecuación local y de su correspondiente forma integral, ambas deducidas por Poynting a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Operando sobre estas ecuaciones llegamos a:

$$\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} - \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (1.29)$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por el elemento de volumen de dv e integrando el resultado para un volumen cualquiera V , se sigue que:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) dv + \int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} dv = - \int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} dv - \int_V \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} dv$$

Si el volumen V y su superficie exterior Σ cumplen las condiciones que permiten aplicar el teorema de Gauss, podemos transformar la primera integral de volumen de la igualdad anterior en la integral sobre Σ del flujo del vector $(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}})$. Con esta transformación:

$$\oint_{\Sigma} \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) d\vec{s} + \int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} dv = - \int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} dv - \int_V \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} dv \quad (1.30)$$

siendo $d\vec{s}$ el vector normal a Σ correspondiente al área elemental ds y dirigido hacia el exterior de V .

La energía electromagnética W_{em} contenida en el interior de V en un instante cualquiera valdrá, de acuerdo con la postulación hecha:

$$W_{em} = \int_V \frac{\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}}{2} dv + \int_V \frac{\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}}{2} dv$$

y, asumiendo un medio homogéneo e isótropo, su incremento en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño Δt será:

$$\begin{aligned} \Delta W_{em} &= \frac{\partial W_{em}}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}}{2} dv + \int_V \frac{\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}}{2} dv \right] \Delta t = \\ &= \left[\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}}{2} \right) dv + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}}{2} \right) dv \right] \Delta t \end{aligned}$$

si suponemos que V no varía en el transcurso del tiempo.

resultando finalmente:

$$\Delta W_{em} = \left[\int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} dv + \int_V \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} dv \right] \Delta t$$

En consecuencia, el segundo miembro de (1.30) multiplicado por Δt , es igual a la variación en dicho intervalo de tiempo, cambiada de signo, de



32 EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO

la energía electromagnética almacenada en el interior de V . Teniendo en cuenta el signo, será igual a la energía que ha desaparecido del interior de V en el mencionado intervalo de tiempo.

Por otra parte, el segundo término del primer miembro, también multiplicado por Δt , da la energía disipada en forma de calor en el volumen V durante el intervalo Δt .

Ahora bien, si postulamos que en el caso de medios materiales en reposo las únicas formas posibles de energía son la electromagnética y la calorífica, la diferencia entre la desaparecida en la segunda será una energía que ha debido salir de V hacia otras regiones del espacio, dado que aceptamos la validez del principio de conservación de la misma, extendido al campo electromagnético:

$$\Delta W_{em} = - \left[\Delta t \oint_{\Sigma} (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot d\vec{s} + \Delta t \int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} dv \right]$$

Entonces, lo más natural e intuitivo es suponer que tal energía haya salido a través de la superficie Σ que limita V y como (1.30) nos dice que la diferencia en cuestión vale

$$\Delta t \oint_{\Sigma} (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot d\vec{s}$$

es decir, viene dada por una integral de superficie, es lógico suponer que esta integral nos da el flujo de la energía electromagnética a través de Σ por unidad de tiempo (notar que esta expresión es tanto más aproximada a la verdad cuanto menor sea la unidad de tiempo elegida).

Puesto que la energía que fluye a través de Σ por unidad de tiempo es una integral de superficie, parece natural que el elemento ds de ella contribuya al flujo total con el valor de la cantidad superficial

$$(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot d\vec{s}$$

que es el flujo a través de ds del vector

$$\boxed{\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}} \quad (1.31)$$

llamado *Vector de Poynting (instantáneo)*.

Aunque todo lo anterior se demuestra para superficies cerradas, postularemos que el flujo de $\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$ a través de cualquier superficie, abierta o cerrada, es igual al flujo de potencia electromagnética a través de la misma, apoyándonos en la evidencia experimental.

1.3.3

Energía y potencia en el campo electromagnético complejo. Vector de Poynting complejo

Aceptado el postulado anterior, si empleamos la formulación compleja, el flujo instantáneo de potencia a través de una superficie Σ valdrá:

$$\oint_{\Sigma} [Re(\vec{E}e^{j\omega t}) \times Re(\vec{H}e^{j\omega t})] \cdot d\vec{s}$$

cantidad que varía periódicamente con el tiempo.

En el estudio de las señales alternas (régimen permanente sinusoidal) se demuestra que no tiene interés práctico, en general, el conocimiento del valor instantáneo de la potencia, siendo suficiente determinar su valor medio.



1.3. Energía y potencia en los campos electromagnéticos reales y complejos. Vector de Poynting 33

Se puede demostrar que el valor medio del vector de Poynting real, correspondiente a una solución compleja \vec{E}_c, \vec{H}_c de las ecuaciones de Maxwell, valdrá:

$$\langle \vec{S} \rangle = \text{Re}(\vec{E}e^{j\omega t}) \times \text{Re}(\vec{H}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}e^{j\omega t} \times \vec{H}^*e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (1.32)$$

El valor medio (1.32) es la parte real del llamado *vector de Poynting complejo* \tilde{S} :

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* \quad (1.33)$$

Postulamos entonces que la potencia que pasa a través de una superficie abierta es igual al flujo a través de ella del vector de Poynting real. Si queremos calcular la citada potencia, cuando se ha planteado y resuelto un problema en el campo complejo, tendremos que utilizar:

$$\langle P \rangle = \text{Re} \left[\int_{\Sigma} \tilde{S} \cdot d\vec{s} \right] = \frac{1}{2}\text{Re} \left[\int_{\Sigma} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{s} \right]$$

Podemos resumir este resultado diciendo que, en el campo complejo, el valor medio de la potencia electromagnética que pasa a través de una superficie Σ , abierta o cerrada, es igual a la parte real del flujo del vector de Poynting complejo, \tilde{S} , a través de dicha superficie.





CAPÍTULO 2

Propagación en medio indefinido

Buscamos soluciones de las ecuaciones de Maxwell para campo complejo en medios sin fuentes, homogéneos, isotropos, sin pérdidas y con variaciones del tipo:

$$\vec{E}, \vec{H} = f(\vec{r})e^{j\omega t}$$

Tomando rotacionales sobre las ecuaciones de Maxwell y simplificando, se llega a:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0; \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

donde $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ se conoce como *número de ondas* ó *constante de propagación*.

Simplificamos el problema para el caso unidimensional (suponiendo que los campos sólo varían con z y no con x e y). Tomamos arbitrariamente el eje x paralelo a \vec{E} :

$$\vec{E} = E_x \hat{x}$$

aplicando la ecuación $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{J}$ se llega a:

$$\vec{H} = H_y \hat{y}$$

esto es, los campos están en cuadratura espacial. También se verifica que si $E_z = 0$, entonces $H_z = 0$ y se cumple que:

$$\vec{E} \times \vec{H} \times \vec{z} = 0$$

Busquemos ahora soluciones de esta ecuación de ondas, ecuación que se convierte en

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + k^2 \vec{E} = 0$$

cuya solución es de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= [E_i e^{-jkz} + E_r e^{+jkz}] \hat{x} \\ \vec{H} &= [H_i e^{-jkz} + H_r e^{+jkz}] \hat{y} \end{aligned}$$

siendo E_i , E_r , H_i y H_r constantes complejas por determinar dependientes de las condiciones iniciales y de contorno.

Si expresamos la solución anterior en el dominio del tiempo resulta:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= [E_i \cos(\omega t - kz) + E_r \cos(\omega t + kz)] \hat{x} \\ \vec{H} &= [H_i \cos(\omega t - kz) + H_r \cos(\omega t + kz)] \hat{y} \end{aligned}$$

2.1 ONDAS PLANAS



36 PROPAGACIÓN EN MEDIO INDEFINIDO

donde hemos considerado que E_i , E_r , H_i y H_r son constantes reales.

El término $E_i \cos(\omega t - kz)$ corresponde a una onda viajera (*travelling wave*) que viaja hacia z^+ . El término $E_r \cos(\omega t + kz)$ es una onda viajera hacia z^- . La combinación de las dos ondas viajeras se denomina onda *estacionaria*. En el dominio de la frecuencia podemos identificar:

- e^{-jkz} = Onda viajera positiva
- e^{jkz} = Onda viajera negativa

Recordamos que la solución obtenida incluye todos los posibles términos. Hasta que no fijemos las condiciones de contorno e iniciales, no quedara completamente determinada. Esto es equivalente a fijar el valor del campo en t_o y z_o (o lo que es lo mismo, el argumento absoluto de los cosenos).

2.1.1

Velocidad de fase

Tomemos un solo sentido de propagación. Un plano de fase constante es un plano móvil perpendicular a la dirección de propagación:

$$\omega t - kz = cte. \rightarrow \perp \vec{z}$$

La velocidad a la cual se mueve un punto de fase fija se denomina *velocidad de fase*, v_f y viene dada por:

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega t - cte}{k} \right) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

En el espacio libre:

$$v_f = c_o = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o}}$$

donde c_o es la velocidad de la luz en el vacío y en cualquier otro medio:

$$v_f = \frac{c_o}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

La velocidad de fase en un medio material es siempre inferior a la velocidad de la luz en el vacío

Se define la *longitud de onda* λ como la distancia entre dos máximos o mínimos consecutivos. Para calcularla imponemos la condición:

$$(\omega t - kz) - [\omega t - k(z + \lambda)] = 2\pi$$

de donde se sigue que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_f}{f}$$

2.1.2

Impedancia intrínseca

Buscamos ahora una relación entre las soluciones obtenidas para \vec{E} y \vec{H} . Aplicando la ecuación del rotacional obtenemos:

$$-jkE_x = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

de donde se sigue que:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} [E_i e^{-jkz} - E_r e^{jkz}] \hat{y} \quad (2.1)$$

siendo

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

que se conoce como *impedancia intrínseca del medio* (tiene unidades de Ω) y en el vacío es:

$$\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \approx 120\pi \quad (\Omega)$$

y en cualquier otro medio homogéneo y sin pérdidas se escribe:

$$\eta = \eta_o \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \approx 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (\Omega)$$

Notar que el sumando que corresponde a e^{jkz} en (2.1) lleva el signo cambiado con respecto a la solución de \vec{E} .

Cuando trabajemos en medios con pérdidas, debemos emplear la permitividad y la permeabilidad compleja con lo que la ecuación de ondas resulta:

$$\Delta \vec{E} - \gamma^2 \vec{E}; \quad \Delta \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0$$

donde

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu_c \epsilon_c}$$

se denomina *constante de propagación compleja* que normalmente se escribe:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

En este caso, la solución del campo tiene la forma:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= [E_i e^{-\gamma z} + E_r e^{+\gamma z}] \hat{x} \\ \vec{H} &= [H_i e^{-\gamma z} + H_r e^{+\gamma z}] \hat{y} \end{aligned}$$

La onda viajera positiva tiene un factor de propagación:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

que en el dominio del tiempo tiene la forma:

$$e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

y observamos como, debido a las pérdidas, aparece un factor de amortiguamiento exponencial que afecta al módulo de la solución. Por todo ello, denominamos:

- α = constante de atenuación (m^{-1})
- β = constante de fase (m^{-1})

Por último, el campo \vec{H} expresado en términos de \vec{E} será:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} [E_i e^{-\gamma z} - E_r e^{+\gamma z}] \hat{y}$$

2.2 ONDAS PLANAS EN MEDIOS CON PÉRDIDAS

En la raíz compleja que define γ nos quedamos con el valor principal

Las unidades más frecuentes de α son Nep/m ó db/m y las de β , rad/m . Un neperio es equivalente a 8.68 dB



38 PROPAGACIÓN EN MEDIO INDEFINIDO

siendo:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_c}{\epsilon_c}} = \frac{j\omega\mu_c}{\gamma}$$

la impedancia intrínseca compleja del medio con pérdidas que podemos escribir como:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu_c\epsilon_c} = j\omega\sqrt{\mu_r\mu_o\epsilon_r\epsilon_o}\sqrt{1 - j\tan\delta} \quad (2.2)$$

Estudiamos ahora dos casos particulares:

- Medio real con bajas pérdidas (buen dieléctrico)
- Medio real buen conductor

2.2.1

Ondas planas en medio buen dieléctrico

Supongamos un medio buen dieléctrico (aislante) con bajas pérdidas. Si hacemos un desarrollo en serie de Taylor de (2.2) para el caso $\tan\delta \ll 1$ llegamos a:

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon_r\epsilon_o} \left[1 - \frac{1}{2}j\tan\delta + \dots \right]$$

de forma que:

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon_r\epsilon_o}$$

$$\alpha \approx \frac{k\tan\delta}{2}$$

resultado que podemos resumir diciendo que:

- La constante de propagación es aproximadamente la de un medio sin pérdidas con la misma permitividad y permeabilidad relativa.
- La constante de atenuación depende directamente de las pérdidas (de $\tan\delta$).

2.2.2

Ondas planas en medio buen conductor

Un medio buen conductor es aquel en el que $\sigma \gg \omega\epsilon$ esto es aquel en el que las corrientes de conducción son mucho mayores que las corrientes de desplazamiento.

En este caso, despreciando el término de la corriente de desplazamiento, podemos escribir:

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon_r\epsilon_o} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

de forma que se cumple:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Definimos $\delta_s =$ profundidad de penetración o espesor de piel como:

$$\delta_s = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

δ_s es la distancia que hay que recorrer para que la amplitud del campo caiga $1/e = 36.8\%$

La impedancia intrínseca compleja en el seno de un buen conductor será:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)\frac{1}{\sigma\delta_s}$$

Notar que la fase de η es 45° , lo cual es característico de los buenos conductores.

Resulta sencillo comprobar que el valor medio del vector de Poynting para una onda viajera positiva es:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|E_o|^2}{2\eta^*} \cdot e^{-2\alpha z} \hat{z}$$

siendo $|E_o|$ el módulo del fasor del campo eléctrico. Se observa que:

- $\langle \vec{S} \rangle$ apunta según la dirección de propagación, como era de esperar
- $\langle \vec{S} \rangle$ se atenúa según un factor exponencial $e^{-2\alpha z}$

En el caso de un medio sin pérdidas (con $\eta \in \mathbb{R}$) esta expresión se convierte en:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|E_o|^2}{2\eta} \hat{z}$$

vector que tiene sólo parte real.

Generalizamos los resultados obtenidos para una dirección de propagación cualquiera \hat{n} . La ecuación de ondas se escribe:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0$$

cuya solución es:

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k\hat{n} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \\ \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \end{aligned}$$

el conocido como *vector de propagación* cumpliéndose además que:

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \vec{E}_o &= 0 \\ \vec{E} \times \vec{H} \times \hat{k} &= 0 \\ \vec{H} &= \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \hat{n} \times \vec{E} \\ \vec{E} &= \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \langle \vec{S} \rangle &= \frac{|\vec{E}_o|^2}{2\eta} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot \vec{r}} \hat{k} \end{aligned}$$

etc.

Para simplificar el planteamiento de un problema con dirección de propagación arbitraria, suele ser recomendable cambiar previamente el sistema de referencia para asociar el campo electromagnético al plano transversal XY que hemos estado manejando.

2.3 VECTOR DE POYNTING

2.4 ONDAS PLANAS. PLANTEAMIENTO GENERAL

2.5 DISPERSIÓN

2.5.1

Velocidad de grupo

Tal y como hemos visto, la velocidad de fase viene dada por:

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Supongamos una señal muy simple $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ donde:

$$\Psi_1 = \cos(kz - \omega t)$$

$$\Psi_2 = \cos[(k + \Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t]$$

Entonces:

$$\Psi = 2 \cos \frac{z\Delta k - t\Delta\omega}{2} \cos \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) z - \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right]$$

Observamos que la amplitud de la señal A es variable y que tenemos una constante de propagación *efectiva* de valor $k + \Delta k/2$ y una pulsación *efectiva* de valor $\omega + \Delta\omega/2$.

Entonces, los puntos en los que tenemos una amplitud constante cumplen $z\Delta k - t\Delta\omega = cte$. Podemos definir entonces una *velocidad de grupo* como:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

que en el límite se expresa:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Distinguiamos dos tipos de medio:

1. Medio no dispersivo: cuando $v_f = v_g$, o lo que es lo mismo, $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, esto es, la dependencia es lineal. En este caso, las componentes de distintas frecuencias viajarán a la misma velocidad por lo que se conservará la forma de onda y por lo tanto no existirá distorsión.
2. Medio dispersivo: cuando $v_f \neq v_g$, y por lo tanto, exista distorsión.

2.5.2

Diagrama de Brillouin

Para representar la dispersión de un medio se utiliza el *Diagrama de Brillouin*, que no es más que una representación de ω vs. β (figura 2.1).

En un medio dispersivo general tendremos que $v_f \neq v_g$, siendo:

$$v_f = \tan \phi_1$$

$$v_g = \tan \phi_2$$

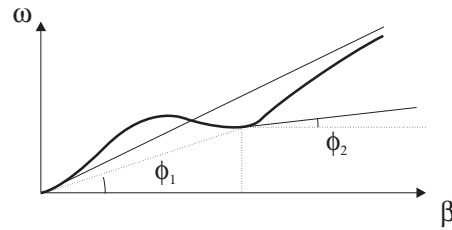


Figura 2.1: Diagrama de Brioullin

La polarización de una onda plana se refiere a la orientación del campo eléctrico, que puede seguir una dirección fija o cambiar con el tiempo.

2.6 POLARIZACIÓN

Si suponemos que la dirección de propagación es \hat{z} y fijamos un instante t tendremos:

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{x} + \mathcal{E}_y \hat{y}$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \mathcal{E}_1 \cos \omega t \\ \mathcal{E}_y &= \mathcal{E}_2 \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

Si fijamos un plano $z = \text{cte.}$ y observamos lo que ocurre a lo largo del tiempo, en el caso más general, el extremo del vector $\vec{\mathcal{E}}$ describirá una elipse (x, y) como la de la figura 2.2.

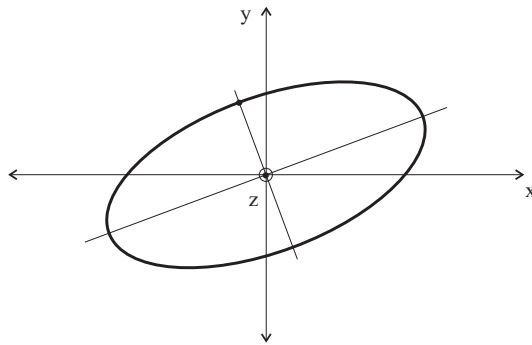


Figura 2.2: Elipse de polarización

Buscamos la ecuación de esta elipse. Si en el sistema de ecuaciones anterior eliminamos ωt se llega a:

$$\mathcal{E}_1^2 y^2 + \mathcal{E}_2^2 x^2 - 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \cos \delta xy - \mathcal{E}_1^2 \mathcal{E}_2^2 \sin^2 \delta = 0$$

ecuación de la *elipse de polarización*.

Veamos varios casos particulares:

1. Si $\delta = 0$ (componentes en fase):

$$y = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} x$$

la polarización es *lineal* (rectilínea). Si $\delta = \pi$ entonces $y = -\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} x$.



42 PROPAGACIÓN EN MEDIO INDEFINIDO

2. Si $\delta = \pm\pi/2$ (componentes en cuadratura) y $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$:

$$y^2 + x^2 = \mathcal{E}^2$$

la polarización es *circular*.

3. En el resto de los casos, la polarización es *elíptica*.

Notar que las polarizaciones elípticas y circulares pueden girar a *derechas* o a *izquierdas*, dependiendo del sentido del giro del extremo del vector $\vec{\mathcal{E}}$. Si el vector de propagación apunta según la perpendicular del plano del papel hacia arriba, hablaremos de:

- Polarización a derechas o positiva: cuando el sentido de giro es anti-horario
- Polarización a izquierdas o negativa: cuando el sentido de giro es el horario

2.6.1

Representación de estados de polarización

Utilizamos el vector unitario de polarización. Supongamos un campo de la forma:

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_1 \cos \omega t \hat{x} + \mathcal{E}_2 \cos(\omega t + \delta) \hat{y}$$

que en el dominio de la frecuencia tiene como fasor complejo:

$$\vec{E} = \mathcal{E}_1 \hat{x} + \mathcal{E}_2 e^{j\delta} \hat{y}$$

Definimos el *vector de polarización* como un vector unitario \hat{e} que tiene la dirección de \vec{E} . Si definimos un ángulo γ de forma que:

$$\tan \gamma = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}$$

resultará:

$$\hat{e} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \cos \gamma \hat{x} + \sin \gamma e^{j\delta} \hat{y}$$

2.7 ONDAS PLANAS EN CAMBIOS DE MEDIO

Suponemos dos medios homogéneos e isotropos caracterizados por $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ y $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ que tienen como superficie de separación el plano S (dioptrio). Podemos plantear dos casos:

1. La superficie de separación es infinita (o muy grande en comparación con λ). Postulamos una solución que consiste en tres ondas planas: incidente, reflejada y transmitida
2. La superficie de separación es del orden de λ : ocurre un fenómeno de difracción. Este fenómeno se estudiará posteriormente.

En este apartado estudiaremos el primero de los casos analizando dos situaciones:

1. El campo \vec{E} incide normalmente a S (dirección de propagación \hat{k} perpendicular a S)

2. El campo \vec{E} incide de forma oblicua a S (dirección de propagación \hat{k} oblicua a S)

El procedimiento en ambos casos consiste en postular unas soluciones que relacionamos mediante las condiciones de contorno en la superficie de discontinuidad.

2.7.1

Incidencia normal

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico incide sobre S orientado según \hat{x} . Postulamos la existencia de:

- Una onda reflejada en el medio 1 ($z < 0$)
- Una onda transmitida (o refractada) en el medio 2 ($z > 0$)

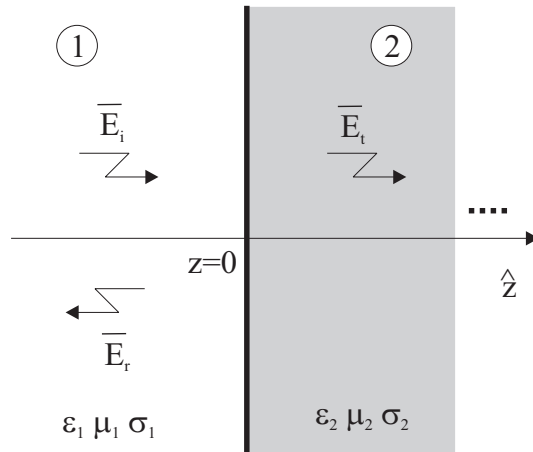


Figura 2.3: Incidencia normal

La onda que excitamos en el medio 1 será:

$$\vec{E}_i = E_o e^{-\gamma_1 z} \hat{x}$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_o}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \hat{y}$$

y definimos las ondas reflejada:

$$\vec{E}_r = E_o \Gamma e^{\gamma_1 z} \hat{x}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{E_o}{\eta_1} \Gamma e^{\gamma_1 z} \hat{y}$$

y transmitida:

$$\vec{E}_t = E_o T e^{-\gamma_2 z} \hat{x}$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_o}{\eta_1} T e^{-\gamma_2 z} \hat{y}$$

donde falta por encontrar los números complejos Γ y T conocidos como:

- $\Gamma =$ coeficiente de reflexión del campo eléctrico en la discontinuidad



- $T =$ coeficiente de transmisión del campo eléctrico en la discontinuidad

Γ y T relacionan los fasores de las ondas reflejadas y transmitidas con el de la onda incidente en la discontinuidad.

Si ahora aplicamos las condiciones de contorno en dicha discontinuidad: $\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ y $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$ obtendremos:

$$\begin{aligned}\Gamma + 1 &= T \\ \frac{1 - \Gamma}{\eta_1} &= \frac{T}{\eta_2}\end{aligned}$$

de donde se sigue que:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \quad (2.3)$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.4)$$

Los campos en el medio 1 serán:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_o e^{-\gamma_1 z} (1 + \Gamma e^{2\gamma_1 z}) \hat{x} \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{E_o}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} (1 - \Gamma e^{2\gamma_1 z}) \hat{y}\end{aligned}$$

Podemos introducir un *coeficiente de reflexión generalizado* para cualquier punto z , definido por:

$$\boxed{\Gamma(z) = \Gamma e^{2\gamma_1 z} = \Gamma(0) e^{2\gamma_1 z}}$$

de forma que resulta:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_o e^{-\gamma_1 z} [1 + \Gamma(z)] \hat{x} \\ \vec{H}_1 &= \frac{E_o}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} [1 - \Gamma(z)] \hat{y}\end{aligned}$$

expresiones correspondientes a una *onda estacionaria*. Pasamos a estudiar dos casos particulares.

Medios 1 y 2 sin pérdidas

Suponemos que $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= j\beta_1 = jk_o \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}} \\ \gamma_2 &= j\beta_2 = jk_o \sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}\end{aligned}$$

siendo además η_1 y $\eta_2 \in \mathcal{R}$, por lo que $\Gamma(0)$ será también un número real (con signo). El módulo del campo eléctrico será:

$$|E_1| = |E_o| |1 + \Gamma(0) e^{2jk_1 z}| = |E_o| \sqrt{1 + \Gamma(0)^2 + 2\Gamma(0) \cos 2k_1 z} \quad (2.5)$$

La figura 2.4 representa esta ecuación, en lo que se conoce como *diagrama de onda estacionaria*

Notar que la distancia entre máximos (o mínimos) consecutivos es de $\lambda_1/2$ y entre un máximo y un mínimo consecutivo, $\lambda_1/4$

Es interesante introducir un nuevo parámetro s , conocido como *relación de onda estacionaria* ó ROE, dado por el cociente entre el máximo y el mínimo valor del campo eléctrico:

$$ROE = s = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

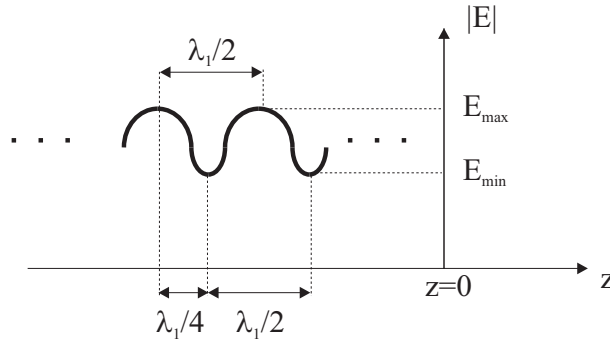


Figura 2.4: Diagrama de onda estacionaria

que se puede obtener fácilmente a partir de (2.5) y que toma valores en el intervalo $1 < s < \infty$.

La *ROE* es un parámetro fácilmente medible (basta un medidor de campo) que proporciona directamente el módulo del coeficiente de reflexión en la discontinuidad:

$$|\Gamma(0)| = \frac{s-1}{s+1}$$

En el caso particular en que $\eta_1 = \eta_2$, obtendremos $\Gamma(0) = 0$, $s = 1$ y $|E(z)| = E_o = \text{cte.}$ como corresponde a una onda viajera positiva en el medio 1 (no existe onda viajera negativa ni, por tanto, onda estacionaria).

Calculamos ahora el vector de Poynting en los dos medios:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \frac{1}{2} \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* = \frac{|E_0|^2}{2\eta_1} (e^{-jk_1z} + \Gamma(0)e^{-jk_1z})(e^{-jk_1z} + \Gamma(0)e^{-jk_1z})^* \hat{z} \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\eta_1} (1 - |\Gamma(0)|^2 + 2j\Gamma(0) \sin 2k_1z) \hat{z} \\ \tilde{S}_2 &= \frac{1}{2} \vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* = \frac{|E_0|^2}{2\eta_2} |T|^2 \hat{z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observamos como \tilde{S}_1 tiene parte real (energía que se propaga) y parte imaginaria (energía reactiva almacenada) mientras que \tilde{S}_2 tiene sólo parte real. Se puede demostrar fácilmente que las partes reales de los dos vectores calculados coinciden (lo cual es lógico, ya que la energía que se propaga en la dirección \hat{z} desde el medio 1 pasa al medio 2).

Medios 1 sin pérdidas, medio 2 con pérdidas

En este caso, el diagrama de onda estacionaria vendrá dado por:

$$|E_1| = |E_o| |1 + \Gamma(0)e^{2jk_1z}| = |E_o| \sqrt{1 + |\Gamma(0)|^2 + 2|\Gamma(0)| \cos(2k_1z + \phi)}$$

donde se ha tomado un $\Gamma(0)$ complejo, dado por:

$$\Gamma(0) = |\Gamma(0)| e^{j\phi}$$

Se observa como aparece un desfase adicional ϕ en el coseno dado por la fase del coeficiente de reflexión en la discontinuidad. Señalar que el concepto de *ROE* sigue siendo perfectamente aplicable.

Medio 1 sin pérdidas, medio 2 conductor perfecto

En este caso, no existe onda transmitida por lo que tendremos:

$$T = 0$$

$$\Gamma = -1$$

El módulo del campo tiene la forma:

$$|E_1| = |E_o| \sqrt{1 + (-1)^2 - 2 \cos 2k_1 z} = 2|E_o| |\sin k_1 z|$$

que corresponde a una onda estacionaria pura. En este caso los valores mínimos del campo eléctrico son nulos, por lo que tendremos $s \rightarrow \infty$. Notar que el campo se debe anular en la discontinuidad (ver figura 2.5). En este

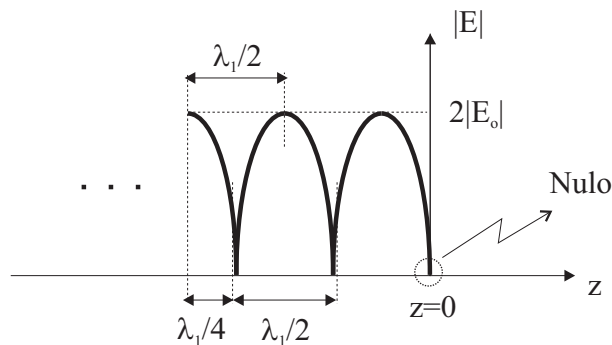


Figura 2.5: Reflexión sobre conductor perfecto

caso, la parte real del vector de Poynting \tilde{S}_1 es cero, como corresponde a una situación en la cual no hay propagación de energía según \hat{z} .

Caso general: Medios 1 y 2 con pérdidas

En este caso $\Gamma(z)$ es un número complejo cuyo módulo depende también de z :

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2\gamma_1 z} = \Gamma(0)e^{2\alpha_1 z} e^{2j\beta_1 z}$$

y tanto la onda incidente como la reflejada se ven atenuadas. En la figura 2.6 se representa el "diagrama de onda estacionaria" que corresponde a esta situación. Se observa como ya no se puede hablar de una ROE ya que los valores máximos y mínimo de campo eléctrico no se mantienen constantes al variar z .

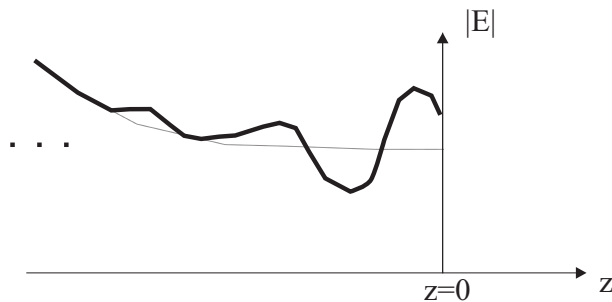


Figura 2.6: Reflexión (caso general)

2.7.2

Incidencia oblicua

Suponemos ahora un caso en el cual la dirección de propagación de la onda plana incidente no coincide con la perpendicular a la superficie S . Situamos el origen de coordenadas en cualquier punto de dicha superficie, cuya normal viene dada por el vector \hat{n} .

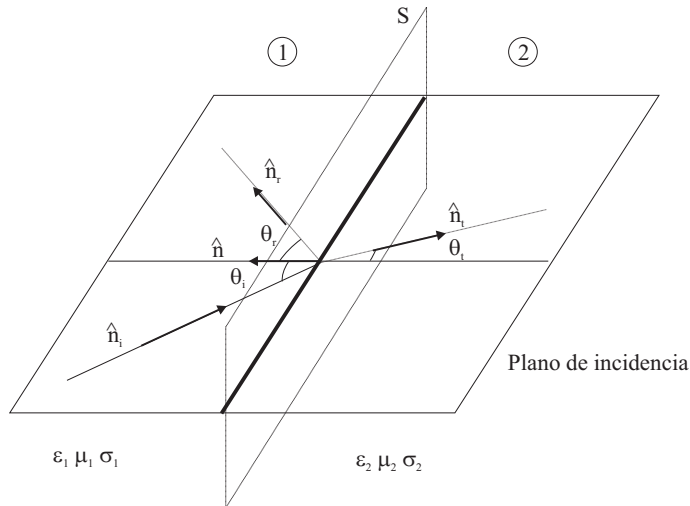


Figura 2.7: Incidencia oblicua

Al igual que hicimos en el caso de la incidencia normal, postulamos la existencia de tres ondas:

- Una onda incidente: \vec{E}_i según la dirección \hat{n}_i
- Una onda reflejada: \vec{E}_r según la dirección \hat{n}_r
- Una onda transmitida: \vec{E}_t según la dirección \hat{n}_t

cuyas expresiones son:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_o e^{-\gamma_1 \hat{n}_i \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \hat{n}_i \times \vec{E}_i$$

y definimos las ondas reflejadas:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_2 e^{-\gamma_1 \hat{n}_r \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} \hat{n}_r \times \vec{E}_r$$

y transmitida:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 e^{-\gamma_2 \hat{n}_t \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \hat{n}_t \times \vec{E}_t$$



Leyes de Snell

Imponiendo que los exponentes de las ondas sean los mismos en la superficie S se puede demostrar que los vectores \hat{n} , \hat{n}_i , \hat{n}_r y \hat{n}_t están en el mismo plano, que denominaremos *plano de incidencia* (que es perpendicular a S) y se verifican las conocidas como *Leyes de Snell*

- Primera Ley de Snell:

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i \Rightarrow \theta_r = \theta_i$$

- Segunda Ley de Snell:

$$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_2 \sin \theta_t$$

que en un caso sin pérdidas resulta:

$$\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \theta_i = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sin \theta_t$$

Ecuaciones de Fresnel

Aplicamos ahora las condiciones de contorno para determinar la relación entre los campos en cualquier punto de la superficie S :

$$\hat{n} \times (\vec{E}_i + \vec{E}_r)|_S = \hat{n} \times \vec{E}_t|_S; \quad \hat{n} \times (\vec{H}_i + \vec{H}_r)|_S = \hat{n} \times \vec{H}_t|_S$$

En lo visto hasta ahora, la orientación de \vec{E}_i era arbitraria. Distinguiamos dos casos:

1. \vec{E}_i es perpendicular al plano de incidencia, $\vec{E}_i = \vec{E}_\perp$
2. \vec{E}_i es paralelo al plano de incidencia, $\vec{E}_i = \vec{E}_\parallel$

de forma, que cualquier campo puede descomponerse en esta nueva base como:

$$\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$$

Caso 1: \vec{E}_i perpendicular al plano de incidencia ($\vec{E}_i = \vec{E}_\perp$) Si aplicamos las condiciones de contorno llegamos a:

$$\Gamma_\perp = \frac{E_\perp^r}{E_\perp^i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$T_\perp = \frac{E_\perp^t}{E_\perp^i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

Si aplicamos la segunda Ley de Snell, obtenemos que para el ángulo θ_t se cumple:

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}$$

que en un caso sin pérdidas se convierte en:

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}$$

Utilizando la segunda Ley de Snell podemos conseguir una versión más práctica en función únicamente del ángulo de incidencia θ_i :

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$T_{\perp} = \frac{E_{\perp}^t}{E_{\perp}^i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}$$

Caso 2: \vec{E}_i paralelo al plano de incidencia ($\vec{E}_i = \vec{E}_{\parallel}$) Aplicando las condiciones de contorno en la discontinuidad se llega a:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{-\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^t}{E_{\parallel}^i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

y nuevamente es conveniente escribir:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{-\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^t}{E_{\parallel}^i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}$$

y observamos que $(\Gamma_{\perp}, T_{\perp}) \neq (\Gamma_{\parallel}, T_{\parallel})$

Medios dieléctricos

Particularizamos los resultados obtenidos para el caso $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Suponemos, además, que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Entonces, la segunda Ley de Snell se escribe:

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_r} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2}$$

donde hemos introducido el valor

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

conocido como *índice de refracción del medio*

Observamos que:

- Si $\epsilon_2 > \epsilon_1$ entonces $\theta_t < \theta_i$, esto es, el rayo se acerca a la normal a S
- Si $\epsilon_1 > \epsilon_2$ hay dos posibilidades:
 - $\forall \theta_i \leq \arcsin(n_2/n_1)$ será $\theta_t > \theta_i$



50 PROPAGACIÓN EN MEDIO INDEFINIDO

- $\forall \theta_i > \arcsin(n_2/n_1)$, θ_t será complejo. Excluimos, de momento esta posibilidad

Para valores de θ_t reales las fórmulas de Fresnel proporcionan coeficientes de reflexión y transmisión también reales, por lo que las ondas transmitidas y reflejadas estarán en fase (0°) ó contrafase (180°) con respecto a la onda incidente.

Angulo de Brewster: Veamos ahora si existe algún ángulo para el cual no existe onda reflejada. Es fácil comprobar que para la polarización perpendicular al plano de incidencia no es posible anular el fasor E_{\perp}^t . Sin embargo la ecuación de Γ_{\parallel} se anula cuando se verifique:

$$-\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t = 0$$

que combinado con la primera la Ley de Snell conduce a un ángulo de incidencia:

$$\theta_i = \theta_b = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

valor que se denomina *ángulo polarizante ó de Brewster* y que existe sólo para la polarización paralela al plano de incidencia.

Reflexión total: Volvemos ahora al caso en el cual obtenemos ángulos θ_t complejos. Esto ocurre a partir de un cierto ángulo conocido como *ángulo crítico* dado por:

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

para el cual $\theta_t = \pi/2$, esto es, la onda transmitida sigue una dirección paralela a la superficie S (y los planos de fase constante ya no progresan hacia la dirección z^+).

El problema para ángulos mayores al crítico estriba en que los ángulos obtenidos en el medio 2 pierden su significado físico, si bien la solución matemática sigue siendo válida. Ello se debe a la suposición de onda plana que postulamos al principio del apartado. Se puede comprobar que los ángulos complejos corresponden a ondas no planas, que presentan componentes longitudinales de campo. A estas soluciones las llamamos *ondas de superficie*