uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Comunicaciones Digitales

Grado en Ingeniería de Sistemas de Comunicaciones
Grado en Ingeniería Telemática

Capítulo 0

Introducción

Parte I - Objetivos del curso

Marcelino Lázaro

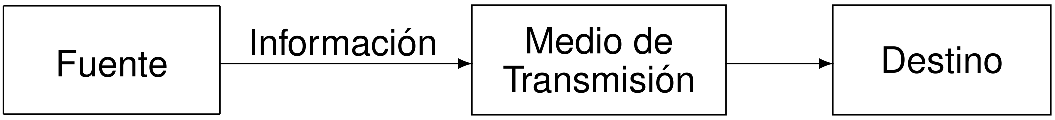
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

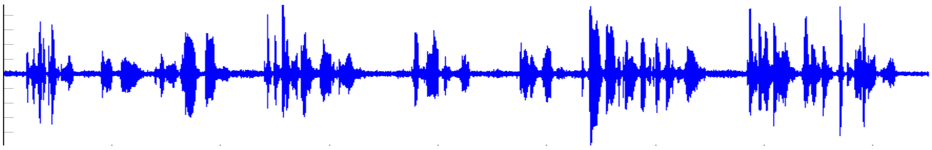
- Definición de un sistema de comunicaciones
- Clasificación: sistemas analógicos y sistemas digitales
  - Ventajas e inconvenientes de los sistemas de comunicaciones digitales
- Bloques funcionales básicos de un sistema digital de comunicaciones
- Revisión de Teoría de la Comunicación
  - Principios básicos bajo condiciones ideales
- Algunas restricciones realistas a tener en cuenta
  - Principales objetivos del curso

Definición: sistema de comunicaciones

- Finalidad de un sistema de comunicaciones: *transmisión*
- Transmisión: *proceso de **enviar**, transportar, **información** de un punto (fuente) hasta otro punto (destino) a través de un canal o medio de transmisión*



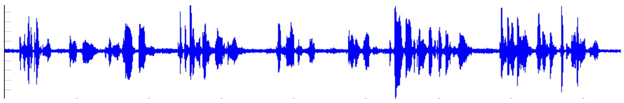
- Representación física de la información para su transmisión
  - Caso más habitual: señal eléctrica o electromagnética
    - ★ Conversión información / señal eléctrica: Transductor
      - Ejemplo: salida de un micrófono (señal de voz)



RESERVOIR DOGS (Mr. White): *"If you get a customer, or an employee, who thinks he's Charles Bronson, take the butt of your gun and smash their nose in. Everybody jumps. He falls down screaming, blood squirts out of his nose, nobody says fucking shit after that."*

Sistemas de comunicaciones analógicos y digitales

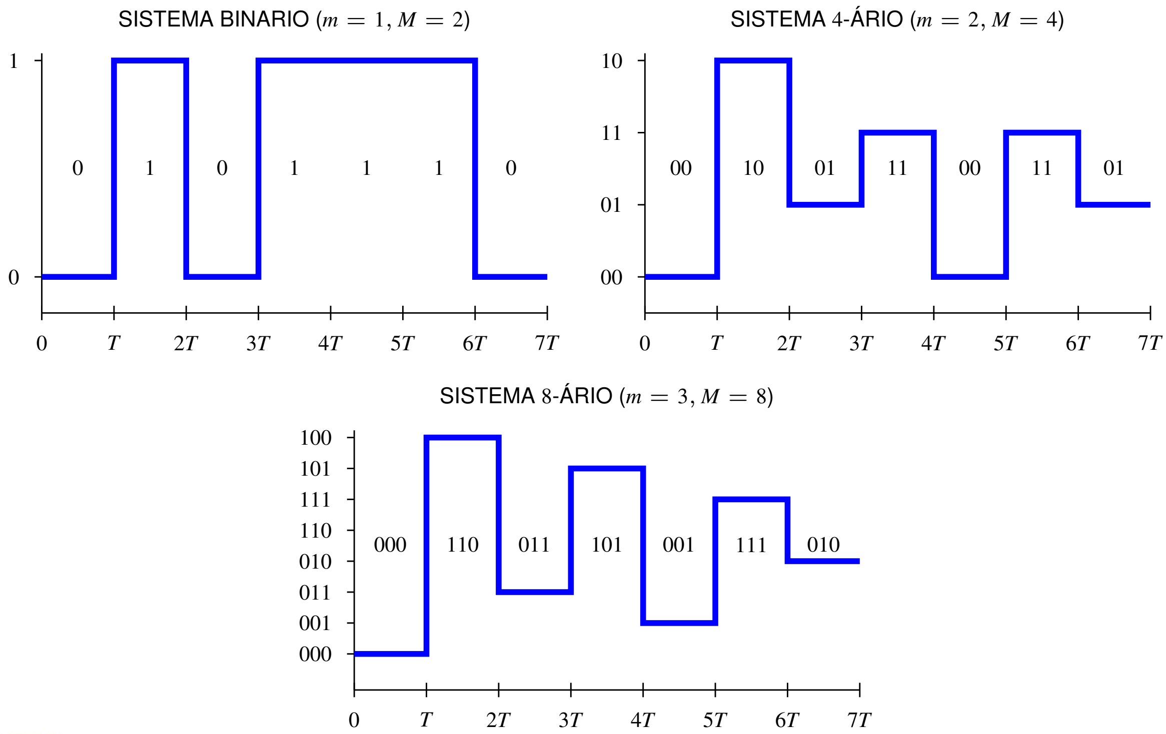
- Sistema de comunicaciones analógico
  - Diseñado para enviar la información en una forma de onda continua



- Sistema de comunicaciones digital
  - Diseñado para enviar la información en una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto finito (M posibles valores para cada símbolo)
    - ★ Ejemplo más común: Bits ($M = 2$): $\{0, 1\}$
      - Información: 0110001101110011010101110010011010...
  - Transmisión a una velocidad (tasa de símbolo) dada: R_s símbolos/s
    - ★ Se transmite un símbolo cada $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
  - Los símbolos han de convertirse en señales eléctricas para su transmisión (modulación digital)
    - ★ Cada símbolo se asocia a una forma de onda
    - ★ Caso más simple: formas de onda de $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
- Preponderancia de los sistemas de comunicaciones digitales

Modulación digital - Ejemplo más simples

- Un bloque de m bits (símbolo) se asocia a un nivel de tensión
  - Sistema M-ário (con $M = 2^m$ posibles símbolos)

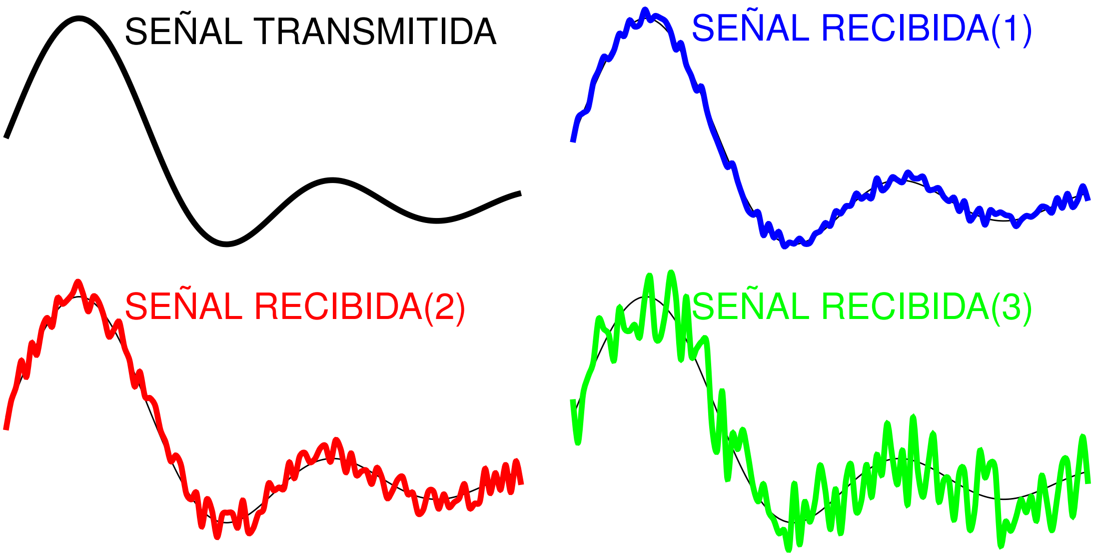


Ventajas de los sistemas digitales

- Capacidad de **regeneración**
- Existen técnicas de detección y corrección de errores
- Permite corregir la distorsión introducida por el canal (igualación)
  - Mucho más fácil que en sistemas analógicos
- La información se puede encriptar (proteger) fácilmente
- Permite utilizar CDM/CDMA (además de FDM/FDMA y TDM/TDMA) para multiplexación/acceso al medio
- Formato independiente del tipo de información (voz, datos, TV, etc.)
  - Tipo de información: tasa de transmisión (símbolos/s, bits/s)
- Los circuitos son, en general
  - Más fiables
  - De menor coste
  - Más flexibles (programables)

Distorsión en señales analógicas

- Durante la transmisión siempre existe una distorsión
  - La señal recibida es distinta a la transmitida
  - Diseño: minimizar la distorsión (máxima fidelidad)
- Retransmisión: la distorsión se acumula

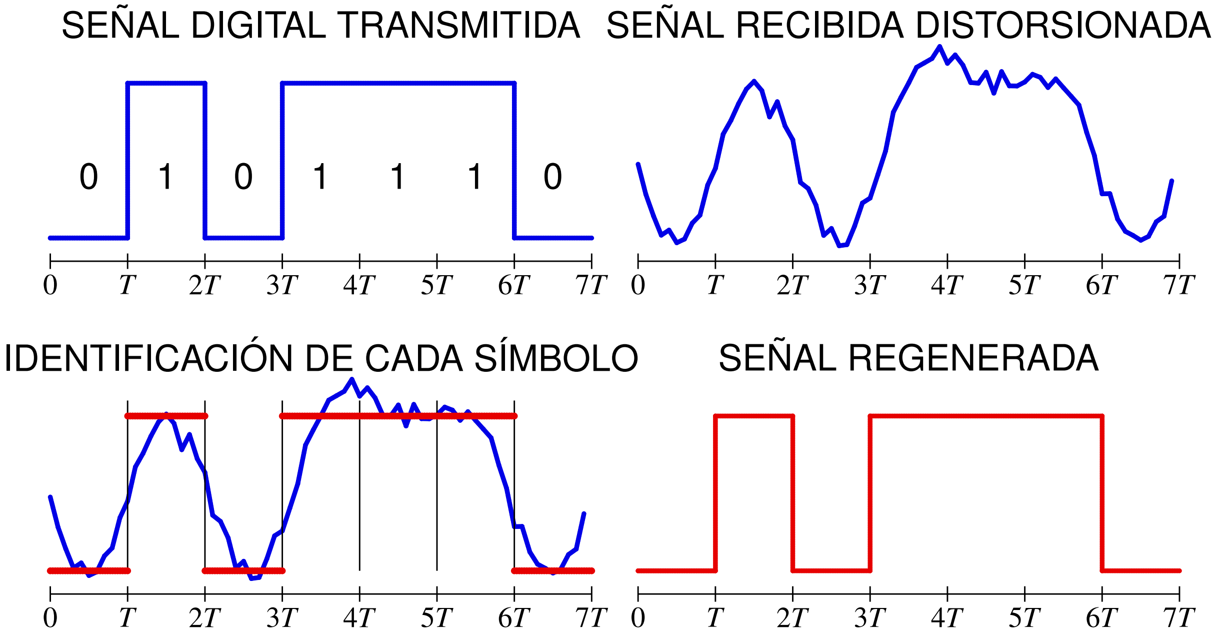


Regeneración digital

CODIFICACIÓN DE BITS - Sistema binario con pulsos rectangulares

$1 \equiv$ Nivel alto

$0 \equiv$ Nivel bajo

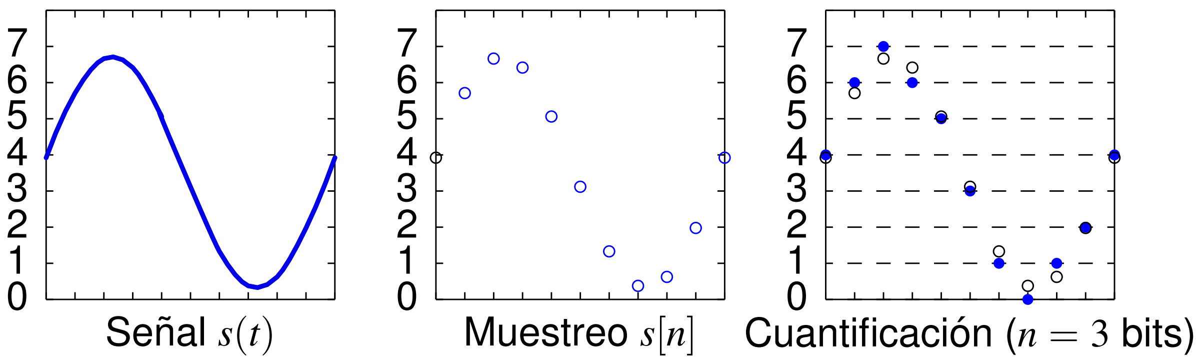


Desventajas de los sistemas digitales

- Necesidad de sincronismo
  - Identificación del intervalo de cada símbolo
- Mayor ancho de banda
- Muchas fuentes de información son de naturaleza analógica
  - Conversión A/D
    - Muestreo
    - Cuantificación $\rightarrow$ error de cuantificación
  - Conversión D/A
    - Interpolación
    - Filtrado paso bajo

Conversión Analógico Digital (A/D)

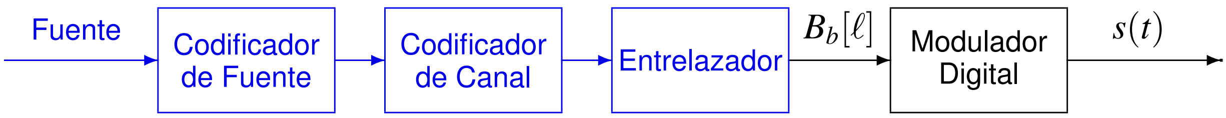
- Fuentes analógicas: amplitudes continuas, tiempo continuo
- Conversión analógico/digital:
  - Tiempo discreto: <u>Muestreo</u> a frecuencia f_s muestras/s
  - Amplitudes discretas: <u>Cuantificación</u> a n bits/muestra
    - Ruido de cuantificación: sólo hay 2^n niveles de cuantificación - Diferencia entre valor muestreado y valor cuantificado
    - Decrece a medida que se incrementa n



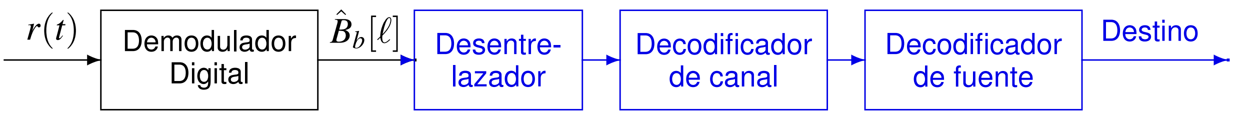
- Tasa binaria (bits/s): $R_b = f_s$ (muestras/s) $\times$ n (bits/muestra)

Transmisor/Receptor Digital - Bloques funcionales básicos

- Transmisor digital



  - Modulador digital: Transmisión de una secuencia digital de símbolos (generalmente bits, $B_b[\ell]$) a través de una canal analógico de comunicaciones (señal electromagnética $s(t)$)
- Receptor digital



  - Demodulador digital: Recuperación de la secuencia de símbolos (bits, $\hat{B}_b[\ell]$) a partir de la señal recibida través de una canal de comunicaciones, $r(t)$

Codificadores de fuente y de canal

- Codificador de fuente
  - Reduce la redundancia de la fuente (compresión)
  - Reducción de la tasa binaria a transmitir
  - Ejemplos: codificadores MPEG o DivX (video), MP3 u OGG (audio), ZIP o RAR (ficheros),...
- Codificador de canal
  - Detección y corrección de errores
  - Introducción de redundancia de forma controlada
  - Capacidad de detección/corrección en función de su complejidad
  - Ejemplo más sencillo: códigos de repetición
    - ★ Código de repetición de orden 1: $0 \rightarrow 00$ $1 \rightarrow 11$
      - Detecta 1 error sobre un bloque de dos bits
    - ★ Código de repetición de orden 2: $0 \rightarrow 000$ $1 \rightarrow 111$
      - Detecta 2 errores o corrige 1 error (corrección basada en decisión por mayoría) sobre un bloque de tres bits

Entrelazado (Interleaving)

- Protección frente a errores de ráfaga
  - En combinación con el codificador de canal
- Reordenación de bits
  - Objetivo: transformar errores de ráfaga en errores aislados
    - ★ El decodificador de canal puede corregir relativamente pocos errores por bloque
- Clases de entrelazadores
  - Entrelazadores bloque
  - Entrelazadores convolucionales

Entrelazado - Un ejemplo (entrelazador bloque)

Bits sin codificar

1 0 1 1 1 0

Código de Canal

Código de repetición (orden 2)

Bits codificados

111 000 111 111 111 000

Bits entrelazados

101 110 101 110 101 110

Transmisión

101 110 101 1 $\boxed{10\ 101\ 1}$ 10

Ráfaga de errores

Bits desentrelazados

11 $\boxed{1}$ 00 $\boxed{0}$ 11 $\boxed{1}$ 11 $\boxed{1}$ 1 $\boxed{1}$ 1 0 $\boxed{0}$ 0

Errores aislados

1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0

Entrelazador

$N_c \times N_b$

Entrelazador Bloque

Entrada de bits: por columna

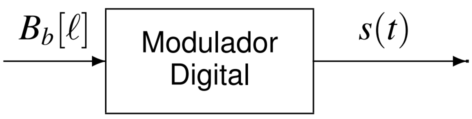
Salida de bits: por fila

1	1	1
0	0	0
1	1	1
1	1	1
1	1	1
0	0	0

Desentrelazador

$N_b \times N_c$

Modulador digital



- Transmisión de bits a una tasa binaria $R_b = \frac{1}{T_b}$ bits/s
  - Conversión en una señal eléctrica $s(t)$
- Transmisión de bits por bloques - Secuencia de símbolos
  - Segmentación de la secuencia $B_b[\ell]$ en bloques de m bits
  - Cada bloque de m bits es un <u>símbolo</u>
    - 1 símbolo $\equiv m$ bits
    - Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{N-1}$
  - Secuencia de símbolos $B[n]$
    - Tasa de símbolo $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)
    - Relación entre tasas R_b / R_s: $R_b = m \times R_s$ (o también $T = m \times T_b$)
    - Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{N-1}$
  - Transmisión de un símbolo (bloque de m bits) cada T seg.
- Conversión de secuencia de bits/símbolos a señal $s(t)$
  - Generación por tramos: "fragmentos" de T segundos (correspondientes a 1 símbolo)
    - <u>Intervalo de símbolo</u> para $B[n]$: intervalo $nT \leq t < (n+1)T$

Conversión símbolo / señal - Modelo más simple

- Estudiado en *Teoría de la Comunicación*
- Conversión símbolo / señal
  - Alfabeto de M posibles símbolos: $B \in \{b_0, b_1, \cdots, b_{M-1}\}$
  - Definición de M formas de onda de duración T segundos

$$\{s_0(t), s_1(t), \cdots, s_{M-1}(t)\}, \text{ definidas en } 0 \leq t < T$$

  - Asociación símbolo / forma de onda: $b_i \leftrightarrow s_i(t)$
  - Generación de la señal a transmitir
    - Si $B = b_i$, entonces $s(t) = s_i(t)$
- Transmisión del símbolo $B[n]$
  - Intervalo de símbolo: $nT \leq t < (n+1)T$
  - Valor de símbolo: $B[n] = b_j$
    - Se traslada la forma de onda asociada a b_j al intervalo

$$s(t) = s_j(t - nT), \text{ en } nT \leq t < (n+1)T$$

- Modelo de canal gausiano (simplificación)

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

$n(t)$: ruido térmico, blanco y gausiano

Diseño: selección de las M formas de onda

- Restricciones: energía, prestaciones, características del canal
- Considerar simultáneamente estas 3 restricciones es difícil en el dominio temporal continuo
- Representación discreta de las señales
  - Puntos en un espacio de Hilbert N-dimensional
    - ★ Coordenadas: vector N-dimensional (Codificador)

$$s_i(t) \rightarrow \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$$

    - ★ Base ortonormal: N señales ortonormales (Modulador)

$$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{N-1}(t)\}, \quad \mathcal{E}\{\phi_j(t)\} = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t)\ \phi_k^*(t)\ dt = 0, \text{ if } k \neq j$$

    - ★ Definición de señales en esta representación discreta

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j}\ \phi_j(t), \qquad 0 \leq t < T$$

Modelo básico de comunicación digital

- Conversión en dos pasos
  - Codificador: Convierte cada bloque de m bits (b_i) en un punto en el espacio N-dimensional ($\boldsymbol{a}_i$)
    - ★ Energía y prestaciones se pueden medir en la representación discreta

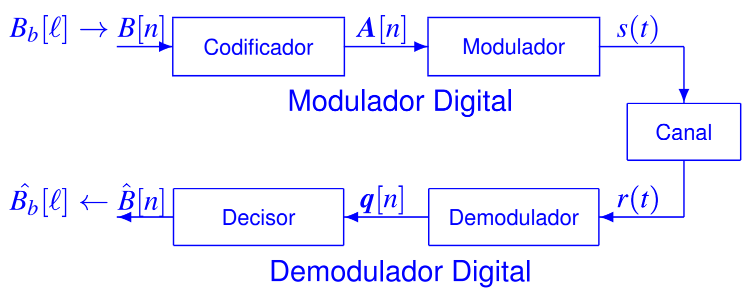
$$\mathcal{E}\{s_i(t)\} \equiv \mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_i\} = ||\boldsymbol{a}_i||^2$$

$$P_e \rightarrow d(s_i(t), s_k(t)) = \sqrt{\mathcal{E}\{s_i(t) - s_j(t)\}} \equiv d(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = ||\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_k||$$

  - Modulador: Genera la señal asociada a cada símbolo ($s_i(t)$) usando la base
    - ★ Adaptación al canal requiere la adaptación de cada elemento de la base

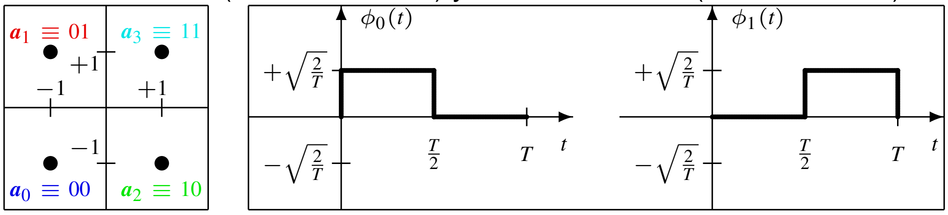
$$\text{Adaptación ideal}: \phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t), \ \forall j$$

- Modelo de comunicación digital básico



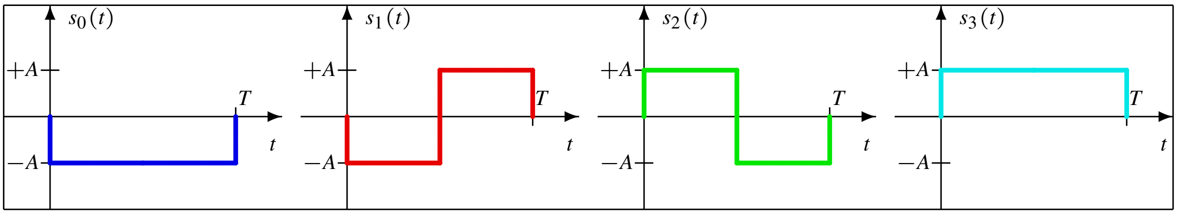
Generación de señales - Ejemplo A

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



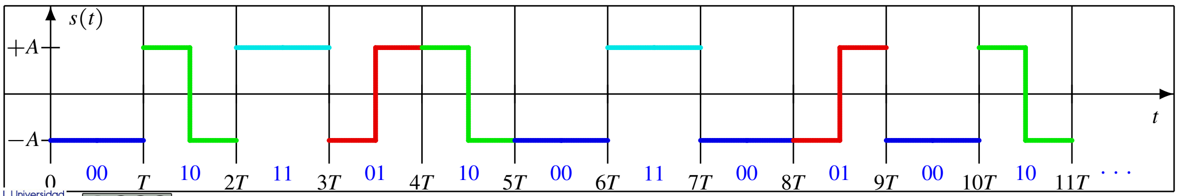
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t), s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$



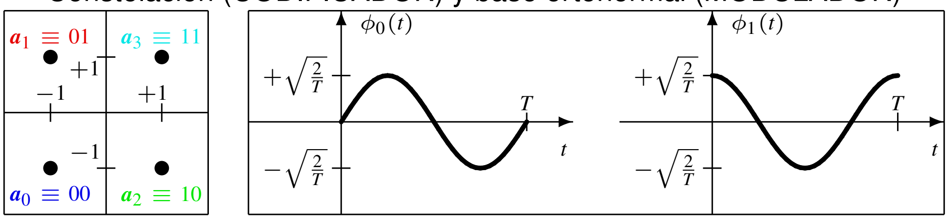
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00\ 10\ 11\ 01\ 10\ 00\ 11\ 00\ 01\ 00\ 10\ \cdots$$



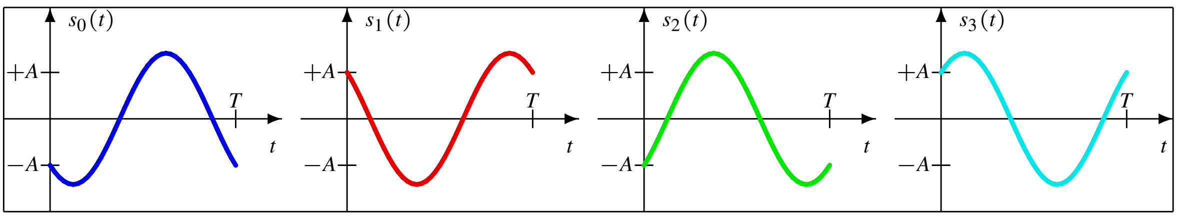
Generación de señales - Ejemplo B

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



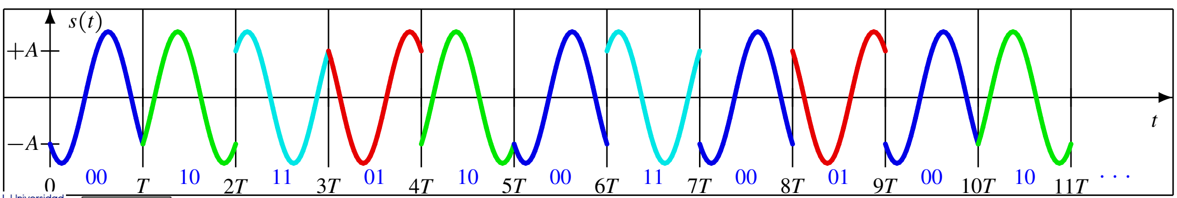
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t), s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$



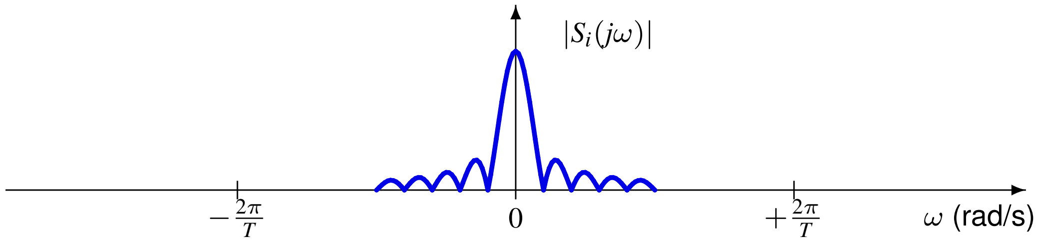
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00\ 10\ 11\ 01\ 10\ 00\ 11\ 00\ 01\ 00\ 10\ \cdots$$

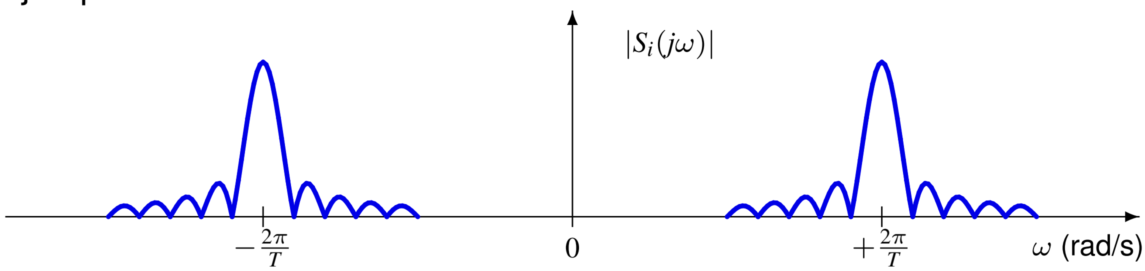


Diseño del modulador: características del canal

- Respuesta en frecuencia de los elementos de la base
- Ejemplo A



  - Señales apropiadas para transmisión en canales cuyo "*rango utilizable de frecuencias*" está en bajas frecuencias (canal paso bajo)
- Ejemplo B

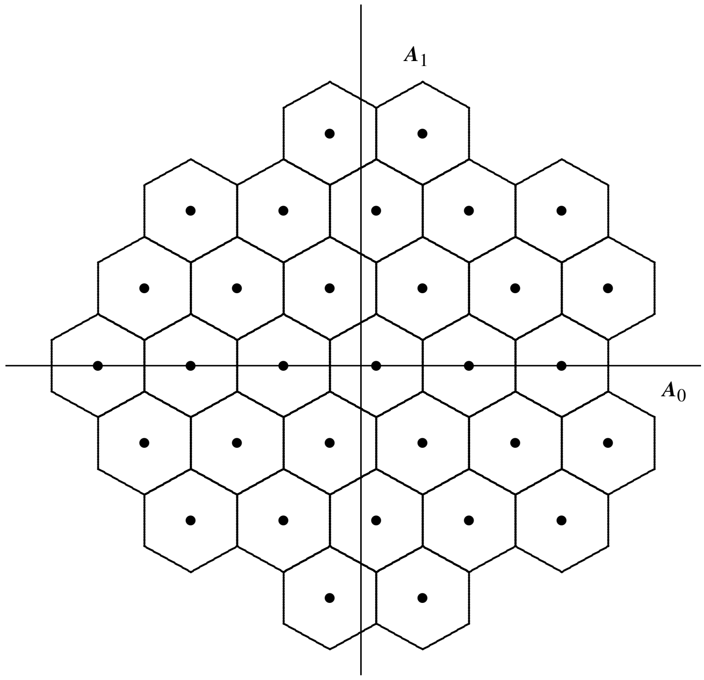


  - Señales apropiadas para transmisión en canales cuyo "*rango utilizable de frecuencias*" está en torno a una frecuencia central, en este caso $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s (canal paso banda)

Diseño del codificador: compromiso prestaciones / energía

- Diseño de la constelación: empaquetado de esferas
  - Óptimo en cuanto al compromiso prestaciones / energía:
    - P_e mínima para una E_s dada
  - 1D: Constelaciones simétricas equiespaciadas
  - 2D: Constelaciones hexagonales
  - Consideraciones prácticas
    - Facilidad de implementación del transmisor
    - Limitación de la energía de pico
    - Relación potencia media/potencia de pico
    - Facilidad de implementación del receptor
    - $\Rightarrow$ Constelaciones QAM, PSK, unipolares, ortogonales, $\cdots$
- Asignación binaria
  - M símbolos $\rightarrow m = \log_2 M$ bits/símbolo
  - Codificación de Gray (minimiza la BER)

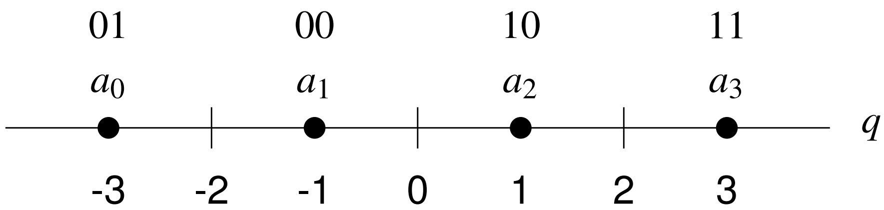
Constelaciones Hexagonales



Constelación Hexagonal de 32 símbolos

Asignación binaria: Codificación de Gray

- Asignación binaria
  - Asociar cada posible combinación de m bits a un punto de la constelación
- Minima BER para una P_e dada: Codificación de Gray
  - Codificar símbolos adyacentes (a mínima distancia) con una asignación binaria que difiera únicamente en un bit

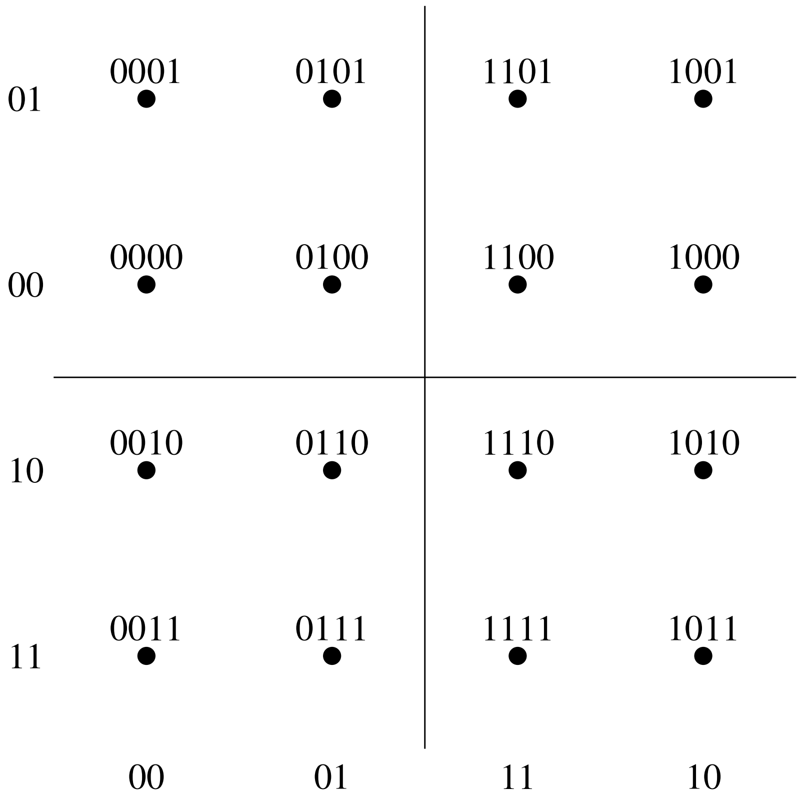


  - Para relaciones señal a ruido altas

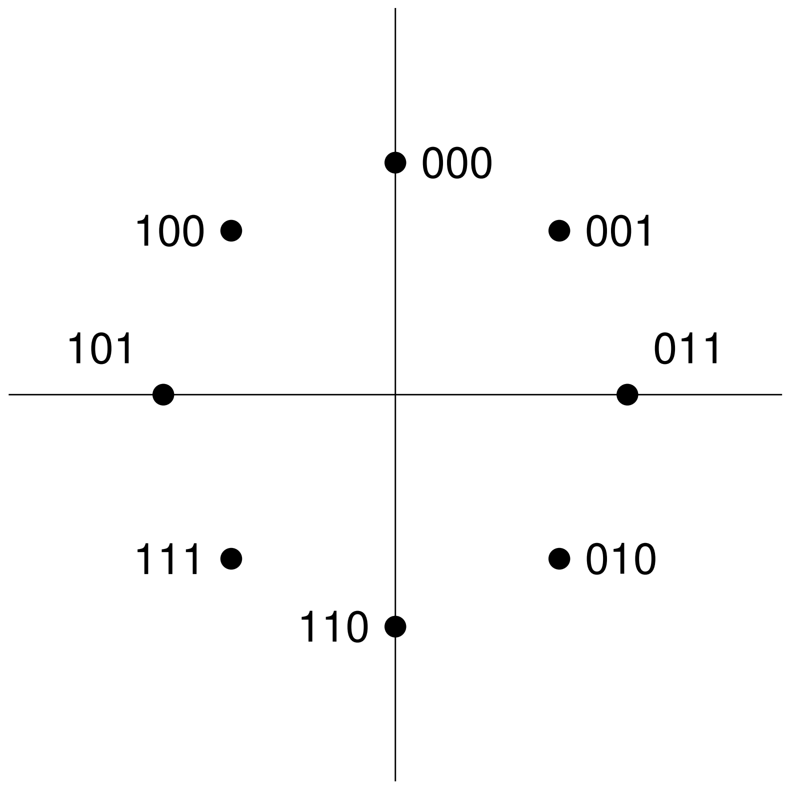
$$BER \approx \frac{1}{m} P_e$$

$m = \log_2(M)$: número de bits por símbolo

Codificación Gray QAM

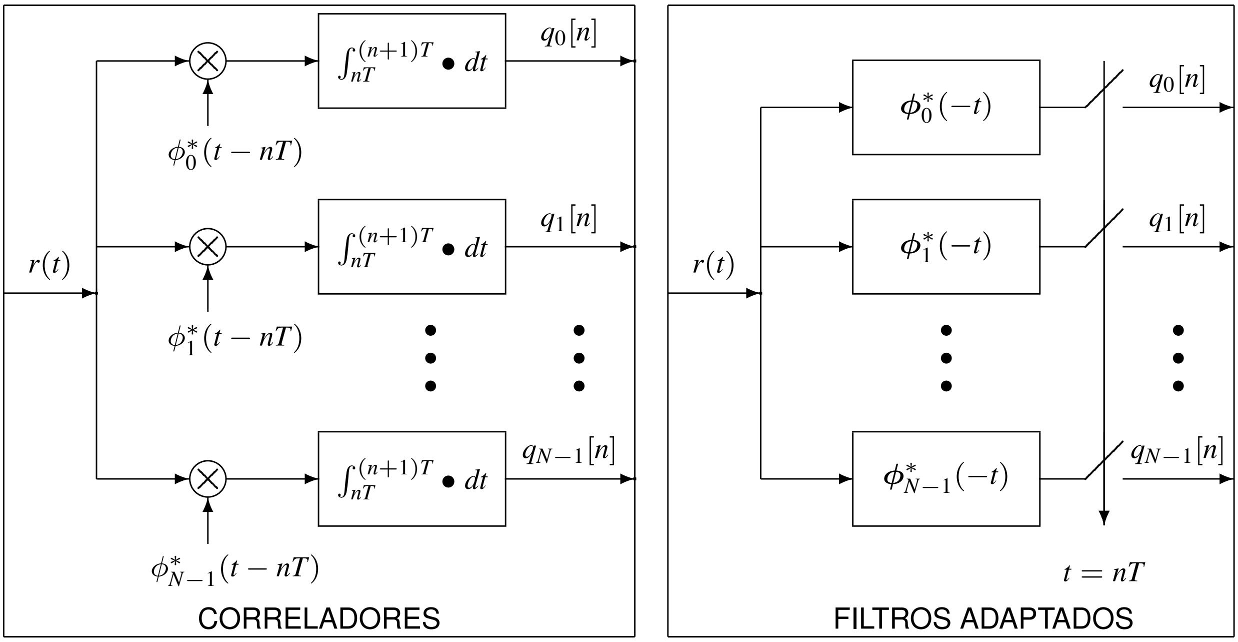


Codificación Gray PSK



Demodulador

- Representación en tiempo discreto de la señal recibida
  - Procesado por intervalos de símbolo: $nT \leq t < T \to \boldsymbol{q}[n]$



Diseño del decisor

- Diseño: Regiones de decisión - $\hat{B} = b_j$ si $\boldsymbol{q}_0 \in I_j$
- Minimizar la probabilidad de error de símbolo
  - Asignación para $\boldsymbol{q}_0$: región de decisión del símbolo que maximiza la probabilidad a posteriori $p_{B|\boldsymbol{q}}(b_j|\boldsymbol{q}_0)$
- Reglas de diseño: $\boldsymbol{q}_0 \in I_i$ si para todo $j \neq i$
  - Caso general: criterio *Maximum a posteriori* (MAP)

$$p_A(\boldsymbol{a}_i)\, f_{\boldsymbol{q}|A}(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{a}_i) > p_A(\boldsymbol{a}_j)\, f_{\boldsymbol{q}|A}(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{a}_j)$$

  - Símbolos equiprobables ($p_A(\boldsymbol{a}_i) = 1/M$): criterio de *maxima verosimilitud* (ML)

$$f_{\boldsymbol{q}|A}(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{a}_i) > f_{\boldsymbol{q}|A}(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{a}_j)$$

    Símbolos equiprobables ($p_A(\boldsymbol{a}_i) = 1/M$) y ruido gausiano: criterio de *mínima distancia euclídea*

$$d(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{a}_i) < d(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{a}_j)$$

- Regla de decisión depende de las probabilidades $p_A(\boldsymbol{a}_i)$ y distribuciones condicionales $f_{\boldsymbol{q}|A}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i)$

Distribuciones condicionales $f_{q|A}(q|a_i)$ en canales gausianos

- Modelo de canal gausiano

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Ruido $n(t)$ estacionario, blanco y gausiano, media nula y DEP $S_n(j\omega) = N_0/2$

- Observación en un canal gausiano

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}[n] + \boldsymbol{z}[n]$$

  - Ruido $z[n]$: N-dimensional, distribución gausiana de media nula y varianza $N_0/2$.

$$f_z(z) = \mathcal{N}^N\left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{||z||^2}{N_0}}$$

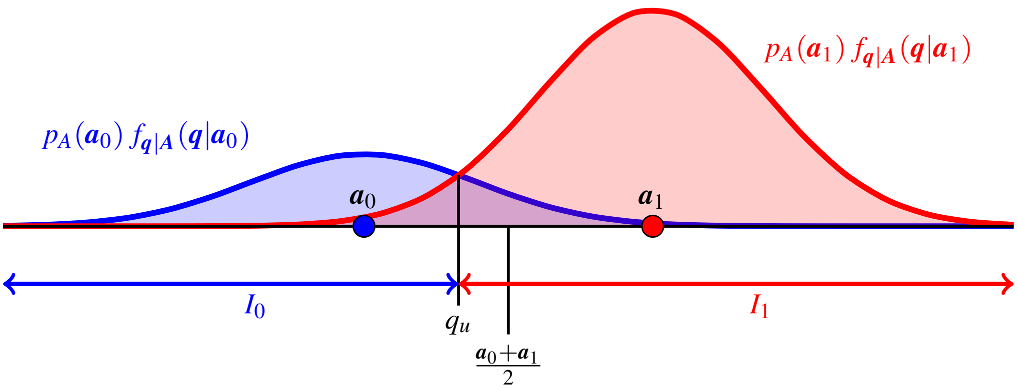
- Distribución condicional de la observación

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i) = \mathcal{N}^N\left(\boldsymbol{a}_i, \frac{N_0}{2}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{||\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}_i||^2}{N_0}}$$

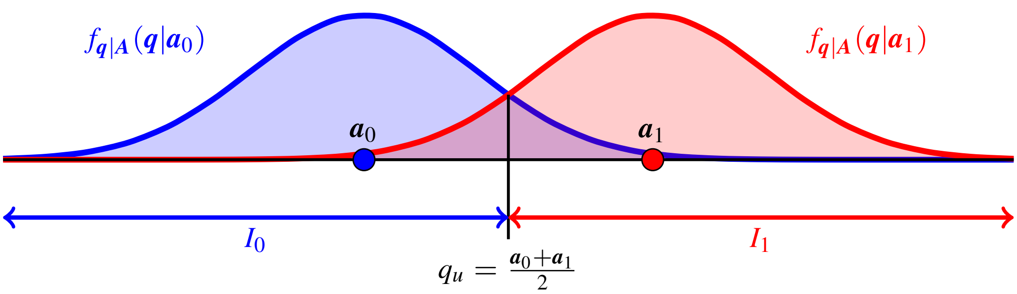
Gausiana N-dimensional centrada en el símbolo transmitido

Criterios MAP, ML y mínima distancia con ruido gausiano

Criterio MAP (con $p_A(\boldsymbol{a}_1) = 3 \times p_A(\boldsymbol{a}_0)$ en este caso)

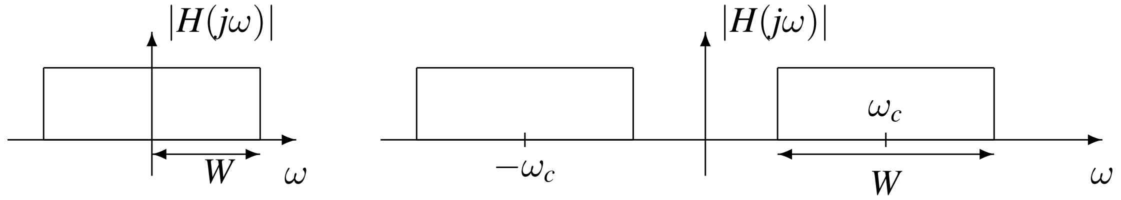


Criterios ML y mínima distancia son equivalentes bajo ruido gausiano



Características de los canales reales

- Limitación en el ancho de banda
  - El canal disponible normalmente tiene un ancho de banda utilizable limitado (B Hz, $W = 2\pi B$ rad./s)
    - ⋆ Canales en banda base
    - ⋆ Canales paso banda (frecuencia central ω_c rad./s)



  - Las señales transmitidas tienen que adecuarse a esta restricción en el ancho de banda disponible
- Introducción de distorsiones (canales no ideales)
  - Ruido (gausiano)
  - Distorsión lineal: modelo lineal e invariante: $h(t)$, $H(j\omega)$

$$\boldsymbol{q}[n] \neq \boldsymbol{A}[n] + \boldsymbol{z}[n]$$

  - Distorsión no lineal (no se considerará aquí): distorsión de intermodulación (IMD)

Principales objetivos de *Comunicaciones Digitales*

- Extender el modelo básico de comunicaciones digitales para considerar las restricciones realistas introducidas por el canal
  - Analizar los mecanismos necesarios para generar señales limitadas en banda (modulaciones digitales)
    - ⋆ En banda base
    - ⋆ En paso banda
  - Analizar el efecto de la distorsión lineal y los mecanismos disponibles para manejarlos en el receptor
    - ⋆ Receptor óptimo
    - ⋆ Receptores sub-óptimos (con menores requerimientos para su implementación)
- Analizar las técnicas que permiten controlar la probabilidad de error en el sistema
  - Técnicas de codificación de canal

Comunicaciones Digitales

Grado en Ingeniería de Sistemas de Comunicaciones
Grado en Ingeniería Telemática

Capítulo 0

Introducción

Parte II - Revisión de Antecedentes

Marcelino Lázaro

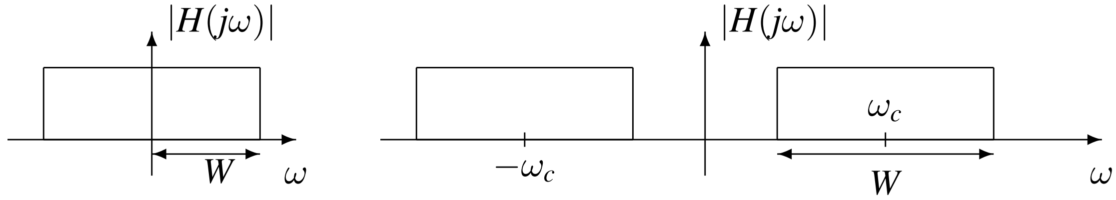
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Notación - Frecuencia y ancho de banda

- Frecuencia lineal / angular

$$f \text{ Hz (ciclos/s) } / \ \omega = 2\pi f \text{ rad/s}$$

- Ancho de banda de un sistema (o señal)
  - Rango de frecuencias positivas disponible (o con respuesta no nula)
  - Notación habitual: B Hz, $W = 2\pi B$ rad/s
    - Canales (señales) en banda base
    - Canales (señales) paso banda (frecuencia central ω_c rad./s)



Notación - Señales

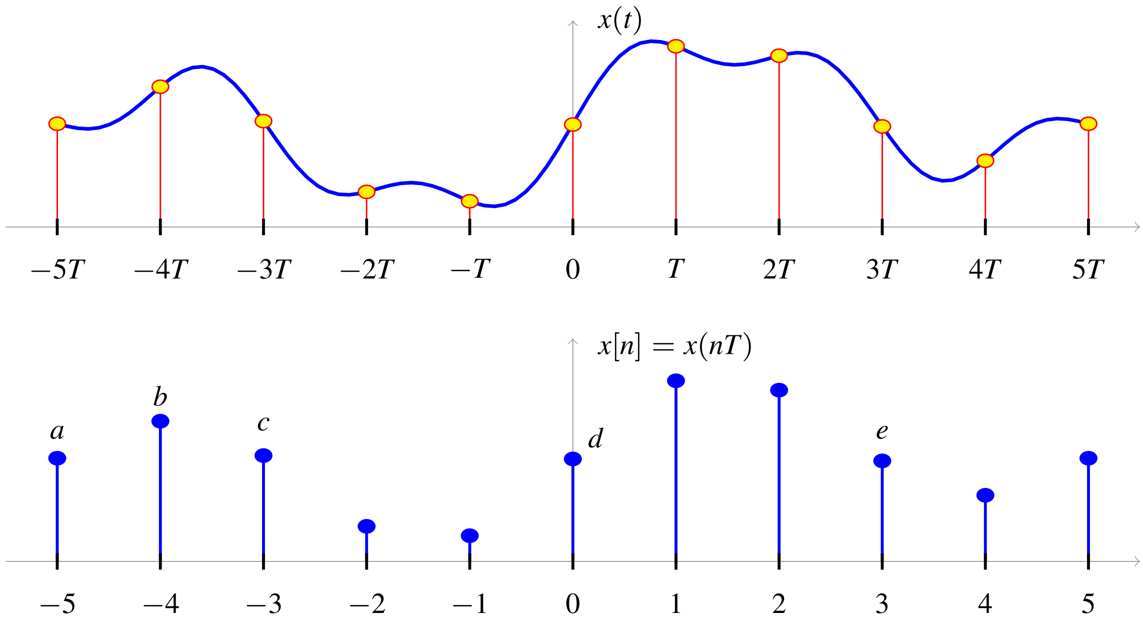
- Señales en tiempo continuo
  - Dominio temporal: $x(t)$
  - Dominio frecuencial
    - Transformada de Fourier (deterministas): $X(j\omega)$
    - Densidad espectral de potencia (aleatorias): $S_X(j\omega)$
- Señales en tiempo discreto
  - Dominio temporal: $x[n]$
  - Dominio frecuencial
    - Transformada de Fourier (deterministas): $X\left(e^{j\omega}\right)$
    - Densidad espectral de potencia (aleatorias): $S_X\left(e^{j\omega}\right)$
- Señales en tiempo discreto muestreando a $R_s = \frac{1}{T}$ una señal en tiempo continuo

$$x[n] = x(t)\Big|_{t=nT} = x(nT)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_k X\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) \qquad X(j\omega) = T\,X\left(e^{j\omega T}\right),\ |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

$$S_X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_k S_X\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) \qquad S_X(j\omega) = T\,S_X\left(e^{j\omega T}\right),\ |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

Muestreo y notación señales en tiempo discreto



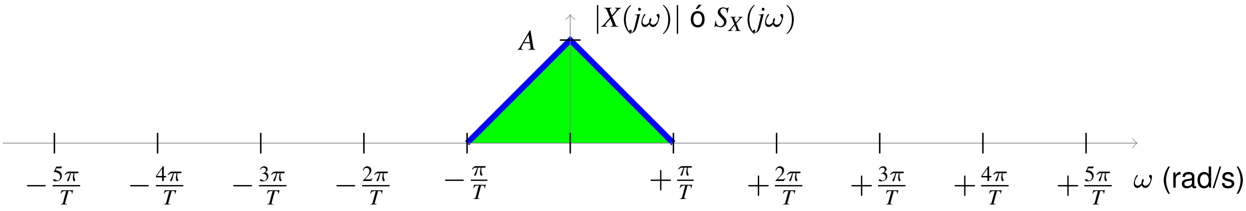
Notación utilizando la función $\delta[n]$

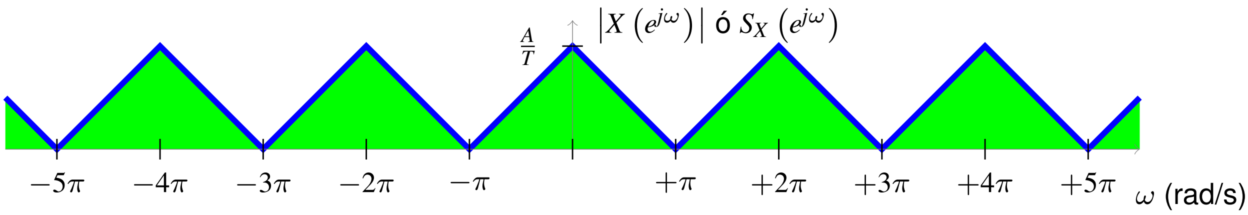
$$x[n] = \cdots + a\,\delta[n+5] + b\,\delta[n+4] + c\,\delta[n+3] + \cdots + d\,\delta[n] + \cdots + e\,\delta[n-3] + \cdots$$

Muestreo en el dominio frecuencial

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_k X\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) \qquad X(j\omega) = T\,X\left(e^{j\omega T}\right),\ |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

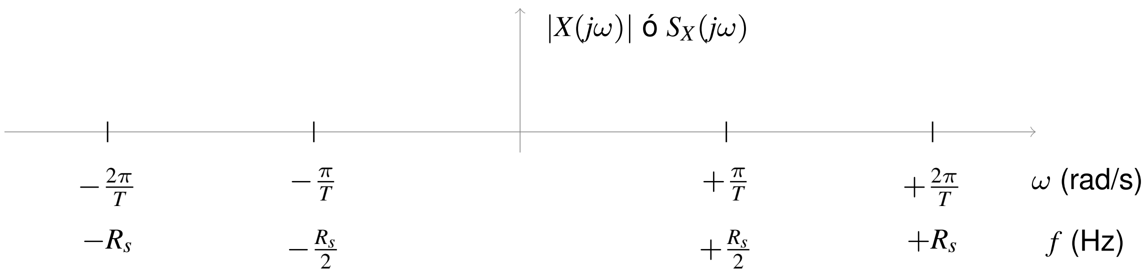
$$S_X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_k S_X\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) \qquad S_X(j\omega) = T\,S_X\left(e^{j\omega T}\right),\ |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

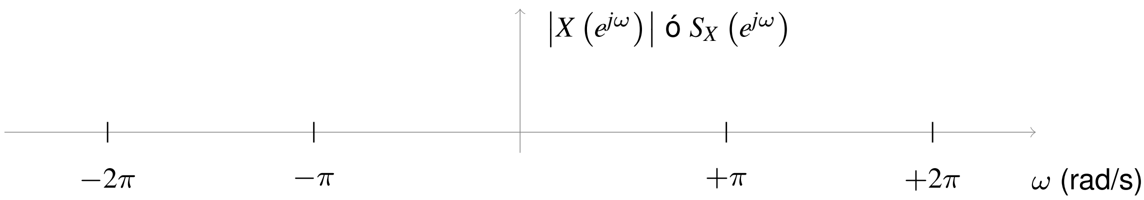




Representación frecuencial - Algunas frecuencias relevantes

- Transmisión de símbolos a $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)
  - Tasa de símbolo: R_s
  - Tiempo de símbolo: T
- En ocasiones se muestrearán señales a R_s (muestreo a tasa de símbolo o a tiempo de símbolo)
- Algunas frecuencias importantes





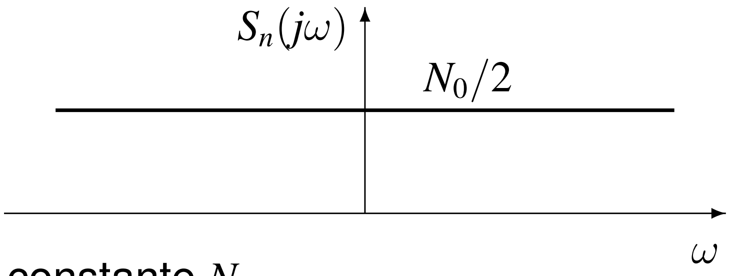
Modelo de ruido térmico

- Proceso aleatorio estacionario, ergódico $n(t)$ blanco y gausiano
  - Media nula $(m_n = 0)$
  - Función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$

  - Densidad espectral de potencia

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$



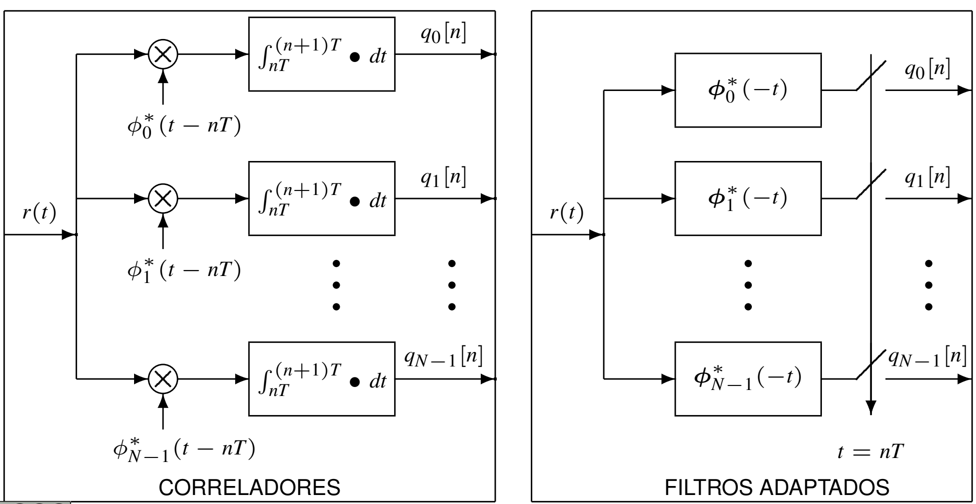
- Valor de la constante N_0

$$N_0 = k\,T^{a} \text{ Watt/Hz}$$

Demodulador

- Obtiene la representación en tiempo discreto de la señal recibida $r(t)$

$$\boldsymbol{q}[n] = \begin{bmatrix} q_0[n] \\ q_1[n] \\ \vdots \\ q_{N-1}[n] \end{bmatrix} \equiv r(t) \text{ en base ortonormal } \{\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{N-1}(t)\}$$



Ruido en tiempo discreto a la salida del demodulador

$$n(t) \longrightarrow \boxed{\text{Demodulador}} \xrightarrow{z[n]}$$

- El demodulador está normalizado ($\phi_k(t)$ de energía unidad)
- Distribución de cada componente de ruido (independientes)
  - Gausiana de media nula y varianza $\frac{N_0}{2}$

$$f_{z_k}(z_k) = \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

- Distribución condicional de la observación en el caso ideal

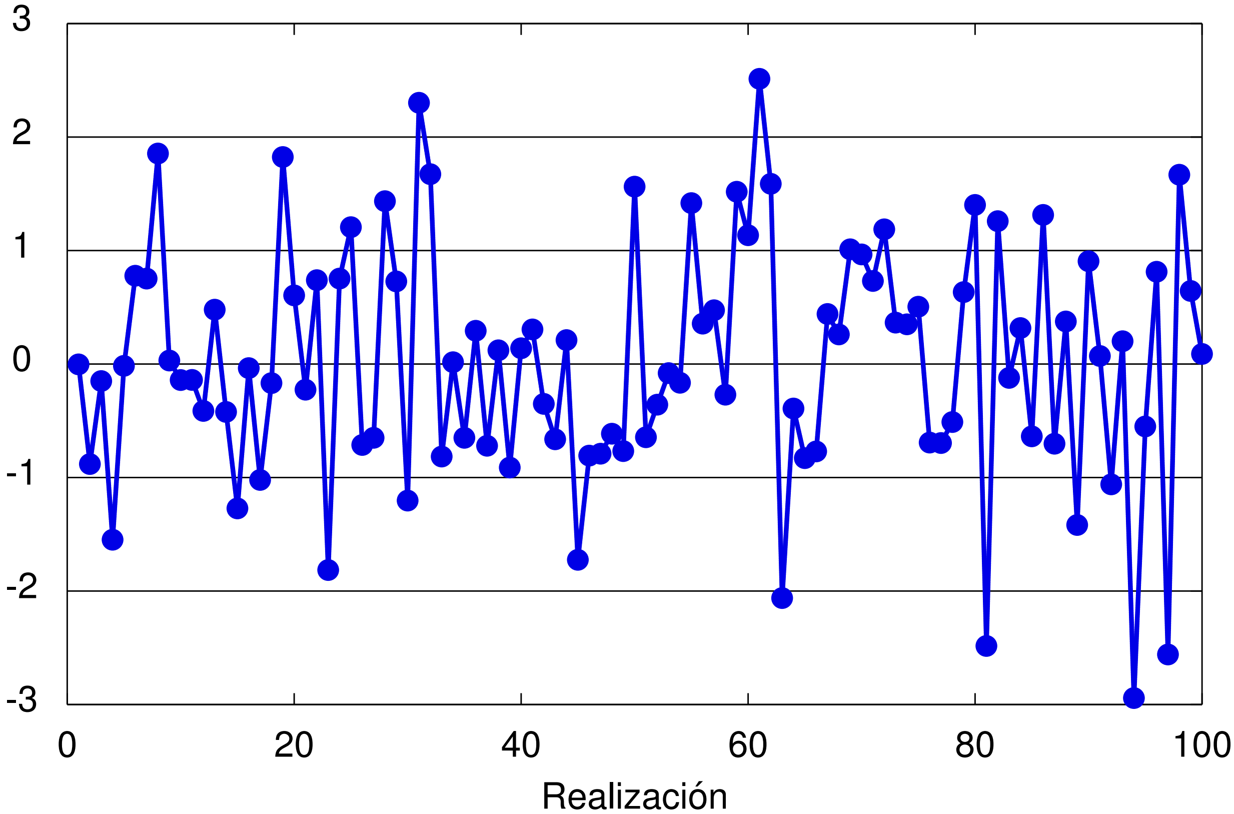
$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}[n] + \boldsymbol{z}[n]$$

  - Si $\boldsymbol{A}[n] = \boldsymbol{a}_i$, cada componente de $\boldsymbol{q}[n]$ es

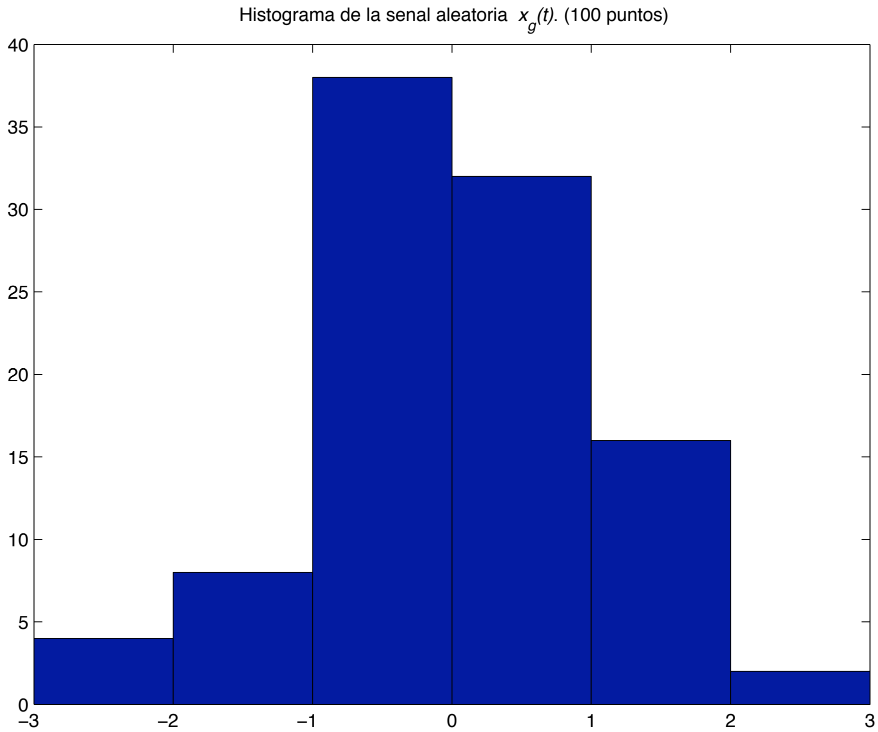
$$q_k = a_{i,k} + z_k$$

$$f_{q_k|\boldsymbol{A}}(q_k|\boldsymbol{a}_i) = \mathcal{N}\left(a_{i,k}, \frac{N_0}{2}\right)$$

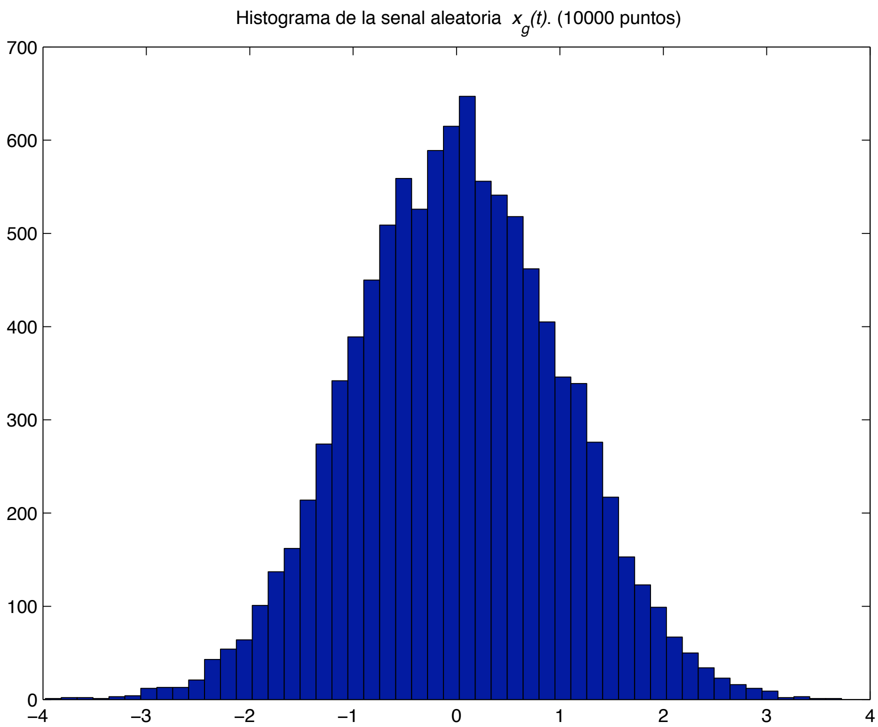
Realizaciones de una variable aleatoria gausiana



Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria gausiana



Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria gausiana



Cálculo de la probabilidad de error de símbolo

- Cuando se transmite el símbolo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i$
  - Distribución de la observación $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i)$
  - Probabilidad de error condicional

$$P_{e|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_i} \equiv P_{e|\boldsymbol{a}_i}$$

  Si se transmite el símbolo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i$
    - ★ Se produce un error cuando se decide $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{a}_i$
    - ★ Esto ocurre cuando al transmitir $\boldsymbol{a}_i$ la observación $\boldsymbol{q} \notin I_i$

$$P_{e|\boldsymbol{a}_i} = \int_{q \notin I_i} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|a_i)\, dq$$

- Probabilidad de error total
  - Se promedian las probabilidades de error condicionales

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i)\, P_{e|\boldsymbol{a}_i}$$

    - ★ Para símbolos equiprobables

$$p_A(\boldsymbol{a}_i) = \frac{1}{M} \rightarrow P_e = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} P_{e|\boldsymbol{a}_i}$$

Cálculo de la probabilidad de error de bit (BER)

- Se promedia la BER (*Bit Error Rate*) condicional para $\boldsymbol{a}_i$

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i)\, BER_{a_i}$$

- Cálculo de las BER condicionales

$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{M-1} P_{e|a_i\rightarrow a_j} \frac{m_{e|a_i\rightarrow a_j}}{m}$$

  - $P_{e|a_i\rightarrow a_j}$: probabilidad de transmitiendo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i$, decidir $\hat{A} = \boldsymbol{a}_j$

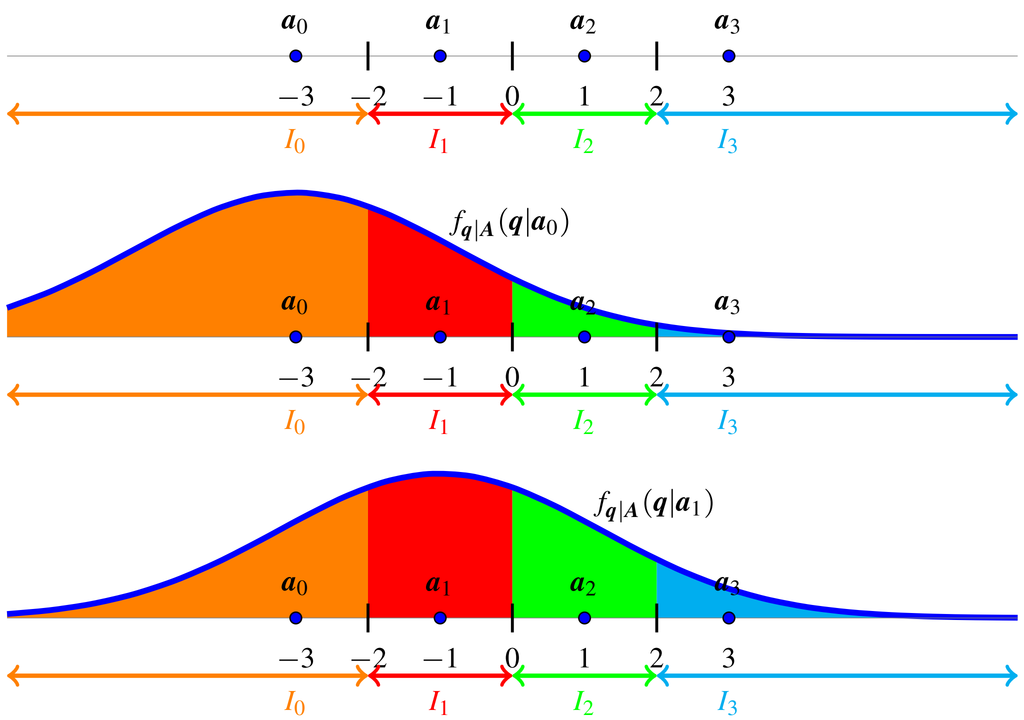
$$P_{e|a_i\rightarrow a_j} = \int_{\boldsymbol{q}_0 \in I_j} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{a}_i)\, d\boldsymbol{q}_0$$

  - $m_{e|a_i\rightarrow a_j}$: número de errores de bit que conlleva esa decisión
  - m: número de bits por símbolo de la constelación

Distribuciones condicionales y probabilidades de error

Ejemplo: constelación unidimensional de 4 símbolos equiprobables

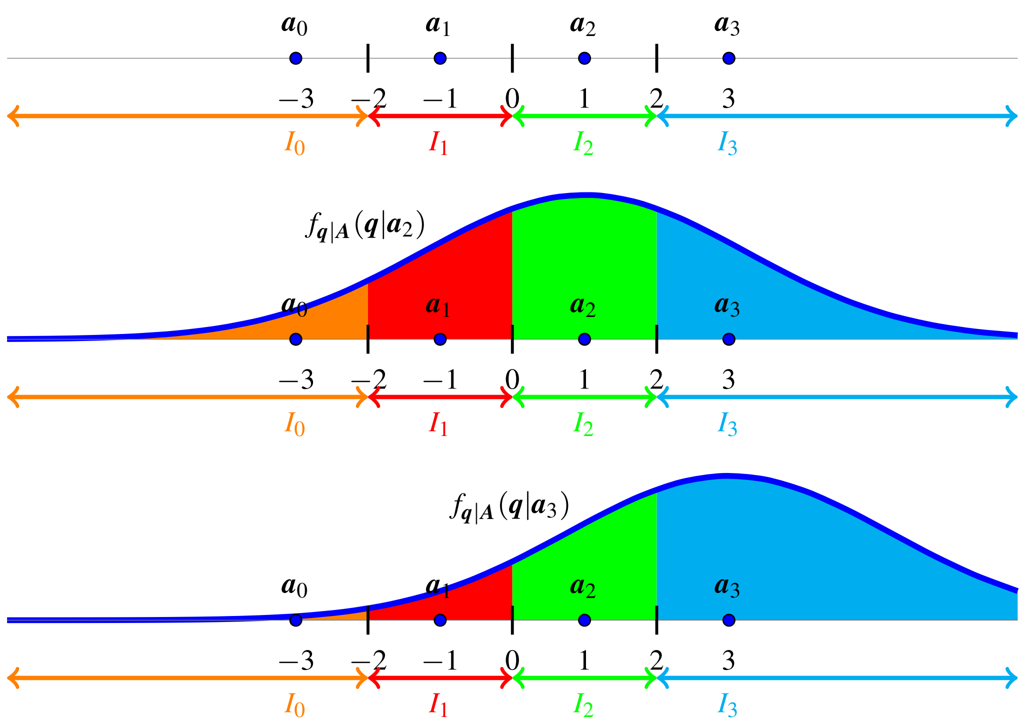
Caso ideal: $q[n] = A[n] + z[n]$ con $z[n] \sim \mathcal{N}(0, N_0/2) \Rightarrow f_{q|A}(q|a_i) = \mathcal{N}(a_i, N_0/2)$



Distribuciones condicionales y probabilidades de error (II)

Ejemplo: constelación unidimensional de 4 símbolos equiprobables

Caso ideal: $q[n] = A[n] + z[n]$ con $z[n] \sim \mathcal{N}(0, N_0/2) \Rightarrow f_{q|A}(q|a_i) = \mathcal{N}(a_i, N_0/2)$



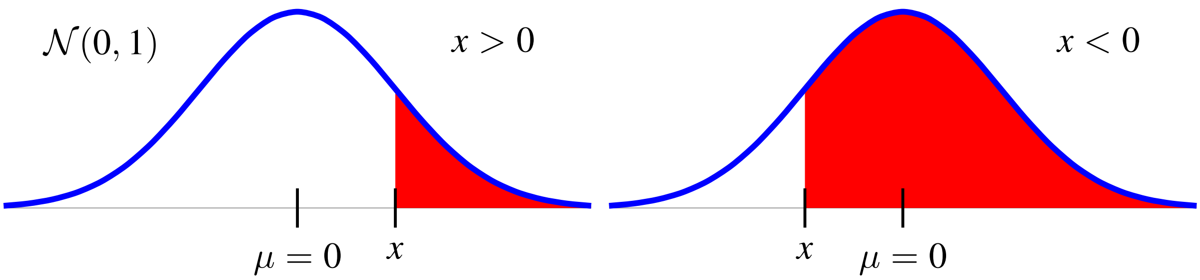
Función $Q(x)$

- Función tabulada calculada numéricamente relacionada con la integral de una distribución gausiana
- Definición: probabilidad de que una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza unidad tome valores mayores que su argumento

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow f_X(x) = \mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow Q(x) = P(X > x)$$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} f_X(z)\,dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

- Interpretación gráfica
  - Sólo se tabula para $x \geq 0$
  - Para $x < 0$, dada la simetría de $f_X(x)$: $Q(-x) = 1 - Q(x)$



Función $Q(x)$ - Propiedades

- Relación con la función de distribución de una v.a. gausiana (con $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

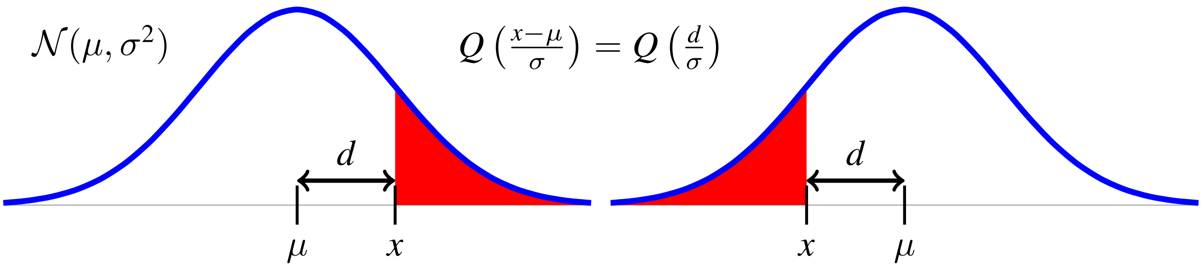
- Función $Q(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ para $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
- Algunas propiedades de la función $Q(x)$
  - $Q(-x) = 1 - Q(x)$
  - $Q(0) = \frac{1}{2}$
  - $Q(\infty) = 0$

Integrales sobre distribuciones gausianas $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

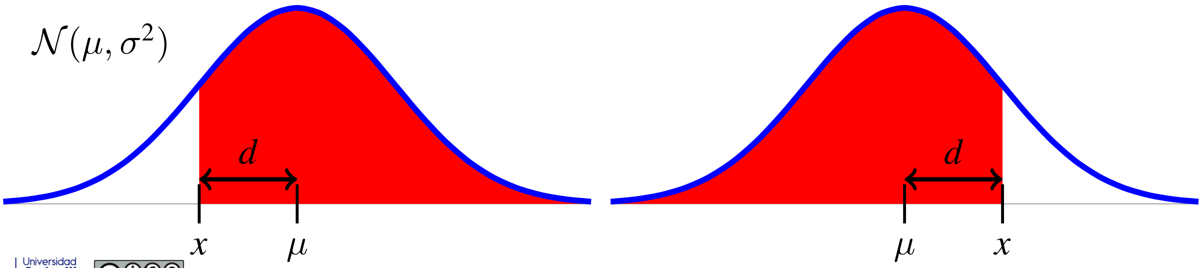
- Si la distribución gausiana tiene media μ y varianza σ^2

$$P(X>x)=Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Interpretación gráfica (considerando definición y simetría)

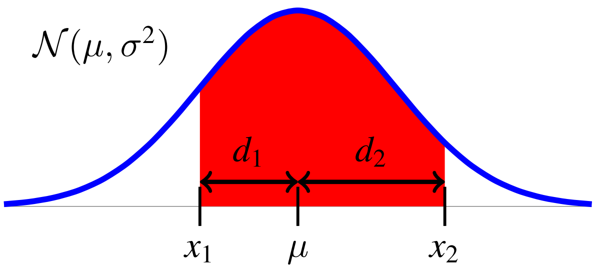


$$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=Q\left(-\frac{d}{\sigma}\right)=1-Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

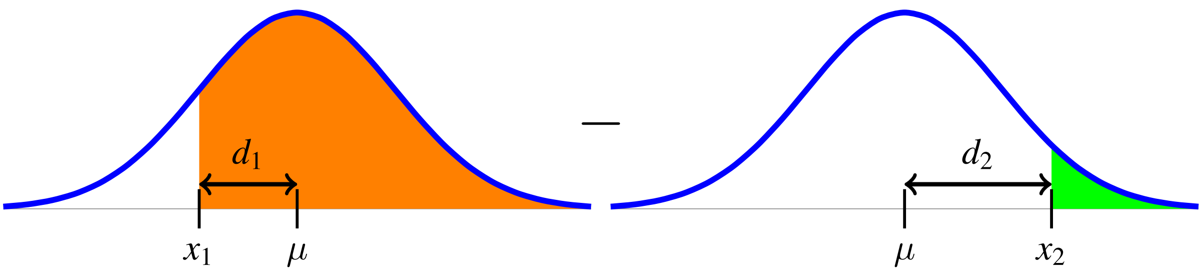


Integrales sobre $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ en intervalos

- En general se pueden escribir como sumas o diferencias de diferentes términos involucrando integrales desde un punto a $\pm\infty$, que ya hemos visto como se obtienen utilizando la función $Q(x)$
- Un ejemplo ilustrativo



$$\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)=\int_{x_1}^{\infty}\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)-\int_{x_2}^{\infty}\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)=\left[1-Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)\right]-\left[Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)\right]$$



Función de ambigüedad temporal (autocorrelación temporal)

- Definición para una señal $x(t)$

$$r_x(t) = x(t) * x^*(-t)$$

Convolución de la señal con su señal adaptada, que en frecuencia se convierte en

$$R_x(j\omega) = |X(j\omega)|^2$$

- Propiedades
  - Función simétrica con el máximo en cero
  - Permite calcular la energía de $x(t)$

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = r_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(j\omega)\ d\omega$$

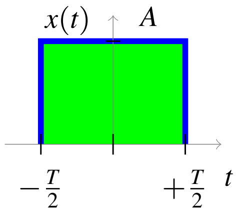
Esta propiedad es evidente teniendo en cuenta la definición de energía (relación de Parseval)

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\ d\omega$$

  - Función invariante a la traslación de $x(t)$

$$y(t) = x(t - t_0) \rightarrow r_y(t) = r_x(t)$$

Ejemplo



$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt = A^2T$$