uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Comunicaciones Digitales

Grado en Ingeniería de Sistemas de Comunicaciones
Grado en Ingeniería Telemática

Capítulo 1

Modulaciones lineales

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

Teoría de la Comunicación - Modelo básico

- Modulación lineal en un espacio de señales N-dimensional

$$s(t) = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n]\ \phi_j(t - nT)$$

  - La información se transporta linealmente
    - En la amplitud de un conjunto de N señales ortonormales $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
  - Codificador: $\boldsymbol{A}[n]$
    - Constelación en un espacio de dimensión N
    - Diseñado considerando energía (E_s) y prestaciones (P_e, BER)
      - E_s: energía media por símbolo ($E_s = E[|A[n]|^2]$)
      - P_e: probabilidad de error de símbolo
      - BER: tasa de error binaria
  - Modulador: $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
    - Diseñado considerando las características del canal
    - Ideal: la única distorsión que aparece en la transmisión es la adición de ruido (blanco y gausiano)

Modulación PAM en banda base

- Modulación unidimensional: $N = 1$

$$s(t) = \sum_n A[n]\ g(t - nT)$$

PAM (*Pulse Amplitude Modulation*), ASK (*Amplitude Shift Keying*)

- La secuencia $A[n]$ es la secuencia de símbolos
  - El alfabeto se denomina constelación (representación 1-D)
  - Conversión de bits a símbolos: codificador
    - Constelaciones M-árias (M-PAM)

$$m = \log_2 M \text{ bits/símbolo}$$

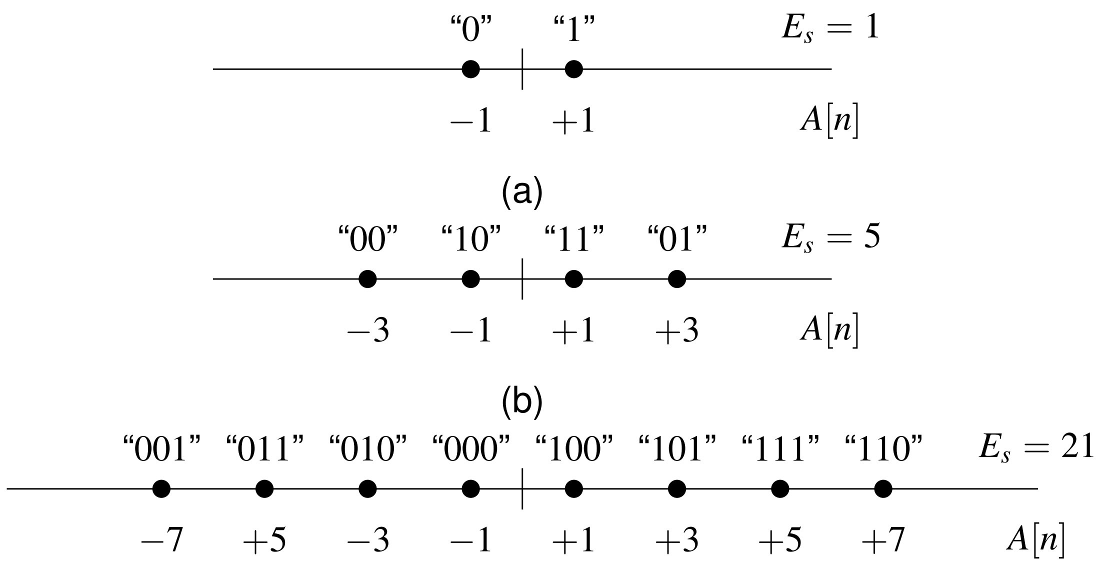
    - Asignación binaria: codificación de Gray
    - Niveles normalizados:

$$A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}, \qquad E_s = E[|A[n]|^2] = \frac{M^2-1}{3}$$

- Señal $g(t)$ (base ortonormal de dimensión 1)
  - Recibe habitualmente dos nombres:
    - Filtro transmisor
    - Pulso conformador (aunque no sea necesariamente un pulso)
  - Normalización: energía unidad ($\mathcal{E}\{g(t)\} = 1$)

Ejemplos de constelaciones M-PAM

- Niveles normalizados: $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}$
- Asignación binaria con codificación de Gray
- Ejemplos: 2-PAM (a), 4-PAM (b), 8-PAM (c)



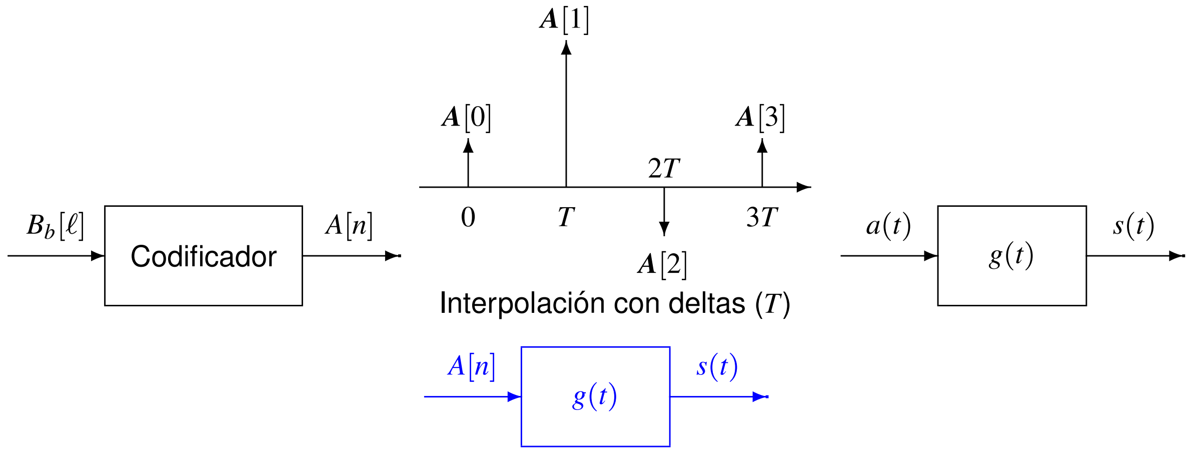
(a) (b) (c)

Codificador: Tasa de símbolo vs. tasa binaria

- Duración de símbolo (o período de símbolo): T
  - Se transmite un símbolo de la secuencia $A[n]$ cada T segundos
- Constelaciones M-árias transmiten $m = \log_2 M$ bits por símbolo
  - Asignación binaria: codificación de Gray
- Hay dos tasas de transmisión (velocidades) en un sistema digital
  - Tasa de símbolo (para la secuencia de símbolos $A[n]$)
$$R_s = \frac{1}{T} \text{ baudios (símbolos/s)}$$
  - Tasa binaria (para la secuencia de bits $B_b[\ell]$)
$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s}$$
- Relaciones entre ambas tasas de transmisión
$$R_b = m \times R_s \qquad R_s = \frac{R_b}{m}$$
$$T = m \times T_b \qquad T_b = \frac{T}{m}$$

Modulación PAM como un proceso de filtrado

- Señal de símbolos: impulsos con amplitudes $A[n]$
$$a(t) = \sum_n A[n]\ \delta(t - nT)$$
- Generación de la señal PAM
$$s(t) = \sum_n A[n]\ g(t - nT) = a(t) * g(t)$$



Representación simplificada equivalente

Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base
$$s(t) = \sum_n A[n]\ g(t - nT)$$
- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de variables aleatorias (proceso aleatorio estacionario)
  - Media $m_A[n] = E[A[n]] = m_A$
  - Función de autocorrelación
    $R_A[n+k, n] = E[A[n+k]\ A^*[n]] = R_A[k]$
  - Energía media por símbolo $E_s = E[|A[n]|^2]$
  - La densidad espectral de potencia es
$$S_A(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\{R_A[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k]\ e^{-j\omega k}$$
- Sea $g(t)$ cualquier señal determinista con transformada de Fourier $G(j\omega)$

Revisión - Cálculo de la densidad espectral de potencia

- Densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio $X(t)$

$$S_X(j\omega) \stackrel{def}{=} E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{|X^{[T]}(j\omega)|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X^{[T]}(j\omega)|^2]}{T}$$

Interpretación: promedio de la respuesta en frecuencia del proceso (truncado) en módulo al cuadrado

- Teorema de Wiener-Khinchin
Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo $\mathcal{A}$, de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left|\int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau,t)\, dt\right| < \infty,$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{\langle R_X(t+\tau,t)\rangle\right\}$$

$$\langle R_X(t+\tau,t)\rangle \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau,t)\, dt$$

Corolarios Teorema de Wiener-Khinchin

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{R_X(\tau)\right\}$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple que

$$\left|\int_0^{T_0} R_X(t+\tau,t) dt\right| < \infty,$$

entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{\widetilde{R}_X(\tau)\right\},$$

donde

$$\widetilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} R_X(t+\tau,t)\, dt,$$

y T_0 es el período del proceso cicloestacionario.

Media y función de autocorrelación de una PAM banda base

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n]\, g(t-nT)$$

$$m_S(t) = E\left[\sum_n A[n] g(t-nT)\right] = \sum_n \underbrace{E[A[n]]}_{m_A[n]} g(t-nT) = m_A \sum_n g(t-nT)$$

$$\begin{aligned} R_S(t+\tau,t) &= E[s(t+\tau)\, s^*(t)] \\ &= E\left[\left(\sum_k A[k]\, g(t+\tau-kT)\right)\left(\sum_j A^*[j]\, g^*(t-jT)\right)\right] \\ &= \sum_k \sum_j \underbrace{E[A[k]\, A^*[j]]}_{R_A[k-j]}\; g(t+\tau-kT)\; g^*(t-jT) \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j]\; g(t+\tau-kT)\; g^*(t-jT) \end{aligned}$$

Cicloestacionariedad

$$\begin{aligned} m_S(t+T) &= m_A \sum_n g(t+T-nT) = m_A \sum_n g(t-(n-1)T) \\ &\overset{n'=n-1}{=} m_A \sum_{n'} g(t-n'T) = m_S(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R_S(t+\tau+T, t+T) = \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j]\; g(t+\tau+T-kT) g^*(t+T-jT) \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j]\; g(t+\tau-(k-1)T) g^*(t-(j-1)T) \\ &\overset{k'=k-1,\, j'=j-1}{=} \sum_{k'} \sum_{j'} R_A[(k'+1)-(j'+1)]\; g(t+\tau-k'T) g^*(t-j'T) \\ &= \sum_{k'} \sum_{j'} R_A[k'-j']\; g(t+\tau-k'T) g^*(t-j'T+\tau) = R_S(t+\tau,t) \end{aligned}$$

Promedio temporal de la autocorrelación

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T R_S(t+\tau,t)\ dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k \sum_j R_A[k-j]\ g(t+\tau-kT)g^*(t-jT)\ dt \\
&\stackrel{m=k-j}{=} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m]\int_0^T g(t+\tau-kT)g^*(t-(k-m)T)\ dt \\
&\stackrel{u=t+\tau-kT}{=} \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\tau-kT}^{\tau-(k-1)T} g(u)g^*(u-\tau+mT)\ du \\
&= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m]\int_{-\infty}^{\infty} g(u)g^*(-(\tau-mT-u))\ du \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k]\ r_g(\tau-kT)
\end{aligned}$$

$$r_g(t) = g(t) * g^*(-t)$$

Densidad Espectral de Potencia (DEP)

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k]\ r_g(\tau-kT) \\
&= \frac{1}{T}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k]\ \delta(\tau-kT)\right) * r_g(\tau) \\
&= \frac{1}{T}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k]\ \delta(\tau-kT)\right) * g(\tau) * g^*(-\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_S(j\omega) &= \mathcal{TF}\left\{\tilde{R}_S(\tau)\right\} \\
&= \frac{1}{T}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A[k]\ e^{-j\omega kT}\right)\ G(j\omega)\ G^*(j\omega) \\
&= \frac{1}{T}\ S_A(e^{j\omega T})\ |G(j\omega)|^2
\end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia - Análisis

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T}\, S_A(e^{j\omega T})\, |G(j\omega)|^2$$

- Tres contribuciones:
  - Factor de escala constante dado por la tasa de símbolo: $\frac{1}{T} = R_s$ baudios
  - Componente determinista dada por $g(t)$: $|G(j\omega)|^2$
  - Componente estadística (estocástica) dada por $A[n]$: $S_A(e^{j\omega})$
    - Evaluada en ωT, i.e. $S_A(e^{j\omega T})$
- Para secuencias $A[n]$ blancas (caso más frecuente)

$$R_A[n] = E_s\, \delta[n] \quad \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \quad S_A(e^{j\omega}) = E_s = E\left[|A[n]|^2\right]$$

$$S_s(j\omega) = \frac{E_s}{T}\, |G(j\omega)|^2$$

  - $g(t)$: Pulso conformador (determina la forma del espectro)

Potencia de una modulación PAM en banda base

- La potencia puede obtenerse integrando $S_s(j\omega)$

$$P_S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega)\, d\omega$$

- Para secuencias de símbolo $A[n]$ blancas

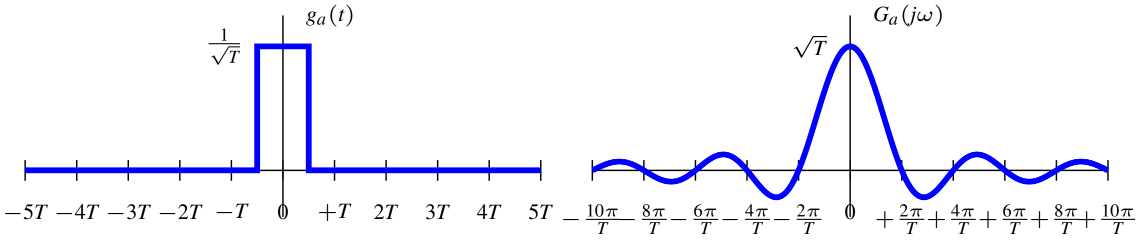
$$P_S = \frac{E_s}{T}\, \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2\, d\omega}_{\mathcal{E}\{g(t)\}}$$

  - Si $g(t)$ está normalizada, aplicando la relación de Parseval

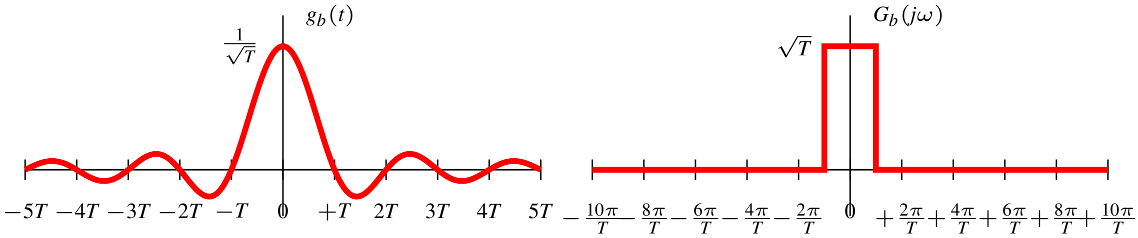
$$P_S = \frac{E_s}{T} = E_s \times R_s \text{ Watts}$$

Ejemplo de pulsos

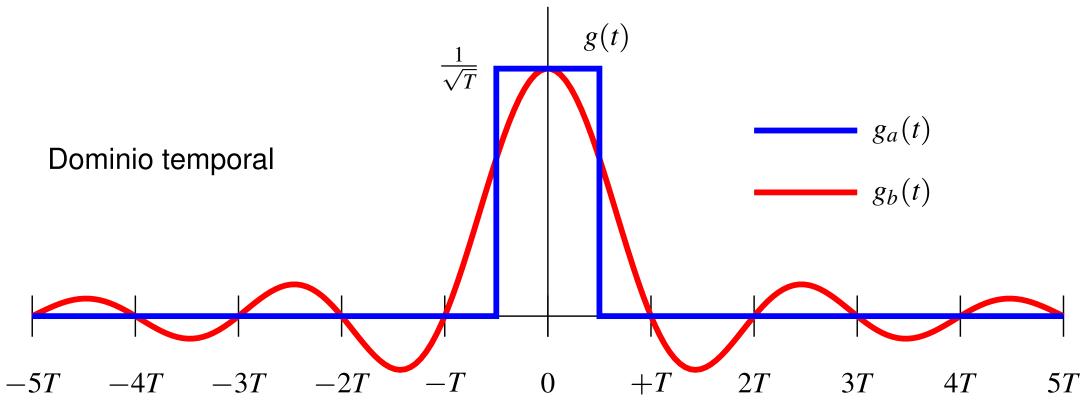
$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad G_a(j\omega) = \sqrt{T}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

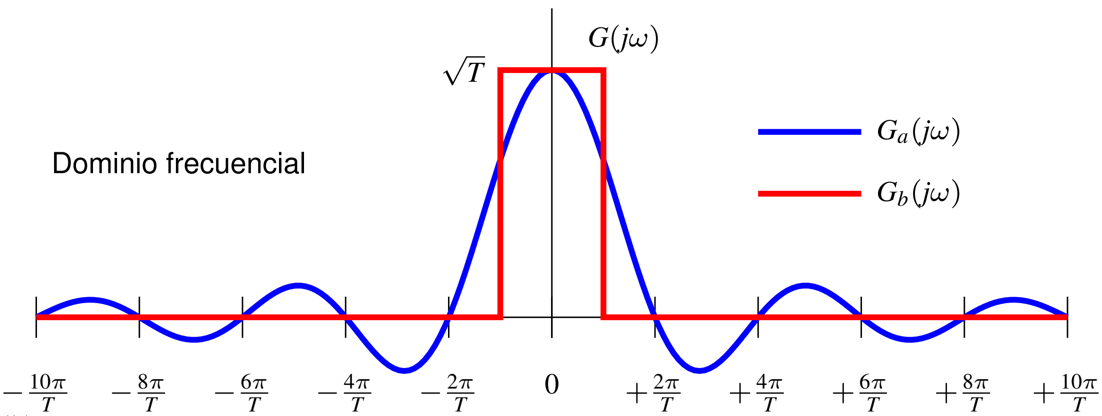


$$g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad G_b(j\omega) = \sqrt{T}\,\Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



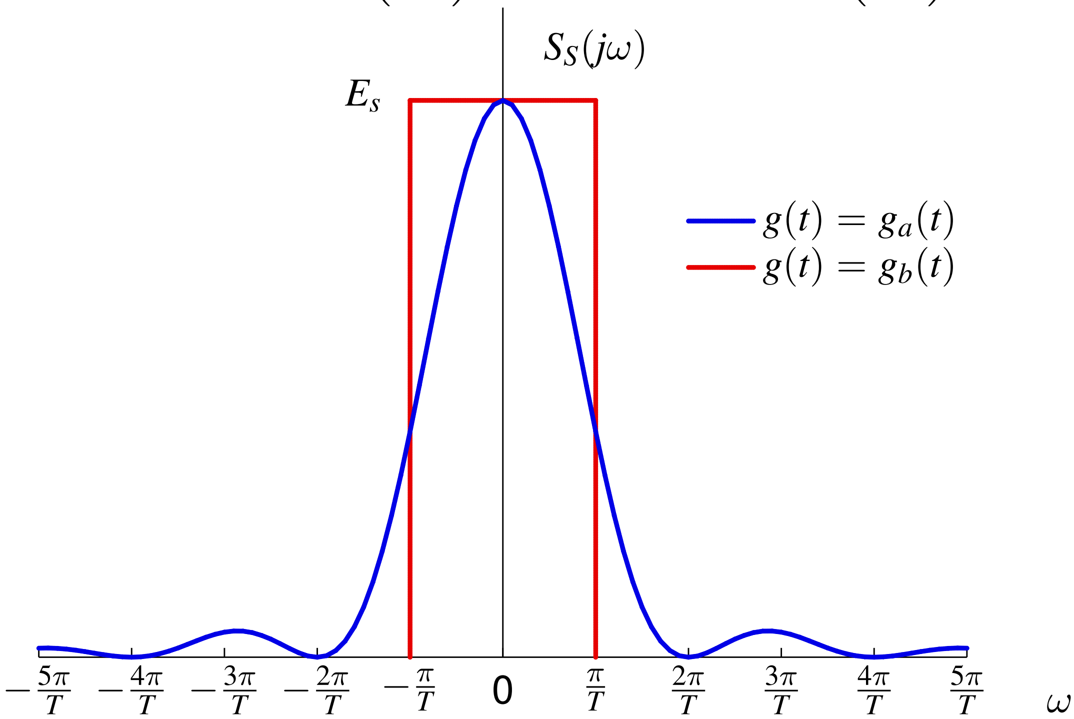
Ejemplo de pulsos (II)





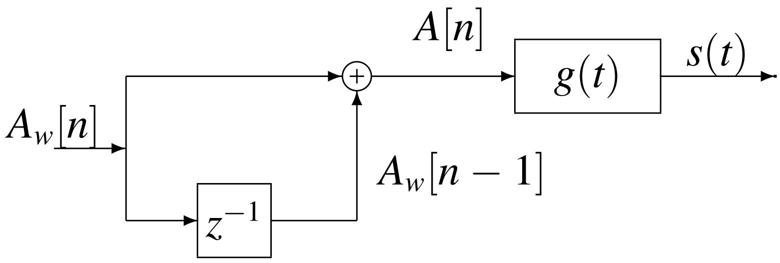
Ejemplos de $S_S(j\omega)$: secuencia $A[n]$ blanca

$$G_a(j\omega) = \sqrt{T}\ \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \qquad G_b(j\omega) = \sqrt{T}\ \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



Ejemplos de $S_S(j\omega)$: secuencia $A[n]$ coloreada

- La forma de la D.E.P. se puede modificar también introduciendo correlación en la secuencia transmitida



- Secuencia blanca $A_w[n]$: M-PAM
  - $A_w[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm(M-1)\}$
  - Energía media por símbolo: $E_s = E\left[|A[n]|^2\right] = \frac{M^2-1}{3}$
- Secuencia coloreada $A[n]$:

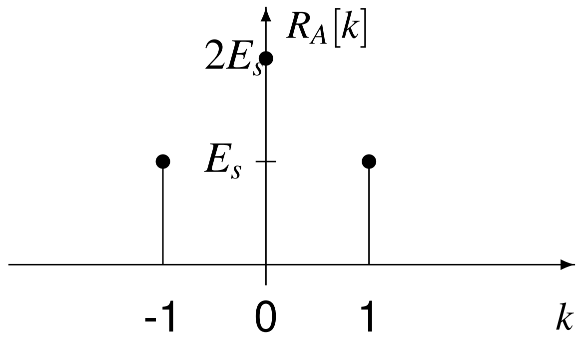
$$A[n] = A_w[n] + A_w[n-1]$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n]\ g(t-nT)$$

Función de autocorrelación de $A[n]$

- Autocorrelación de $A_w[n]$: $R_{A_w}[k] = E_s\ \delta[k]$
- Autocorrelación de $A[n]$

$$\begin{aligned}
R_A[k] =& E\left[A[n+k]\ A^*[n]\right]\\
=& E\left[(A_w[n+k] + A_w[n+k-1])\ \ (A_w[n] + A_w[n-1])\right]\\
=& E\left[A_w[n+k]\ A_w[n]\right] + E\left[A_w[n+k]\ A_w[n-1]\right]\\
& + E\left[A_w[n+k-1]\ A_w[n]\right] + E\left[A_w[n+k-1]\ A_w[n-1]\right]\\
=& R_{A_w}[k] + R_{A_w}[k+1] + R_{A_w}[k-1] + R_{A_w}[k]\\
=& 2R_{A_w}[k] + R_{A_w}[k+1] + R_{A_w}[k-1]\\
=& E_s(2\delta[k] + \delta[k+1] + \delta[k-1])
\end{aligned}$$



Densidad espectral de potencia

- Densidad espectral de la secuencia $A[n]$

$$\begin{aligned}
S_A\left(e^{j\omega}\right) =& \mathcal{TF}\left\{R_A[k]\right\} = \sum_k R_A[k]\ e^{-j\omega k}\\
=& E_s\left(2\ e^{j0} + e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)\\
=& 2E_s\ \ [1+\cos(\omega)]
\end{aligned}$$

- Densidad espectral de la señal PAM en banda base $s(t)$

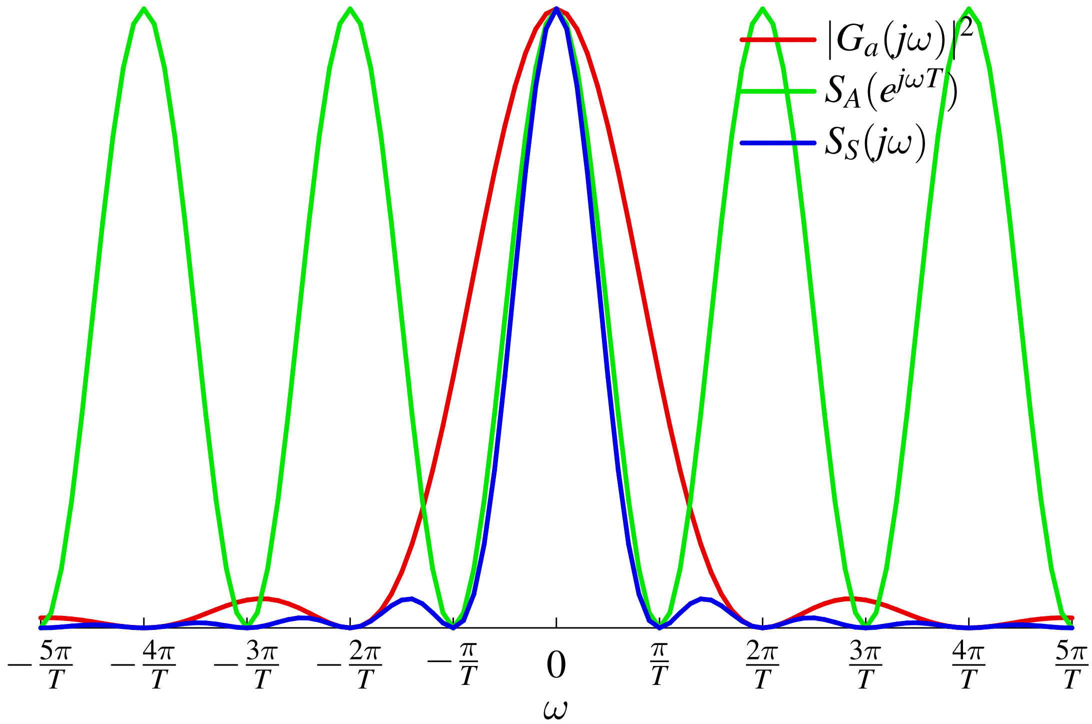
  Este sistema transmite la secuencia de datos coloreada $A[n]$

$$S_S(j\omega) = \frac{1}{T}\ S_A(e^{j\omega T})\ |G(j\omega)|^2$$

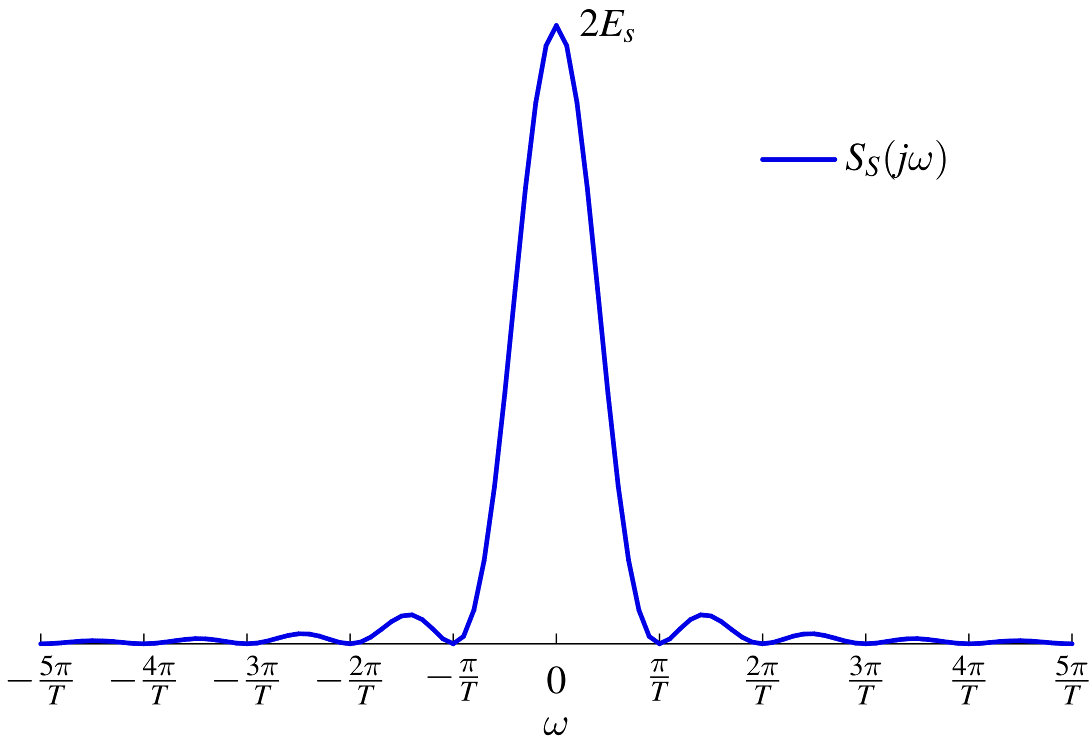
Sustituyendo la expresión obtenida para $S_A\left(e^{j\omega}\right)$, evaluada en ωT, se tiene la expresión de la densidad espectral para esta señal

$$S_S(j\omega) = \frac{2E_s}{T}\ [1+\cos(\omega T)]\ \ |G(j\omega)|^2$$

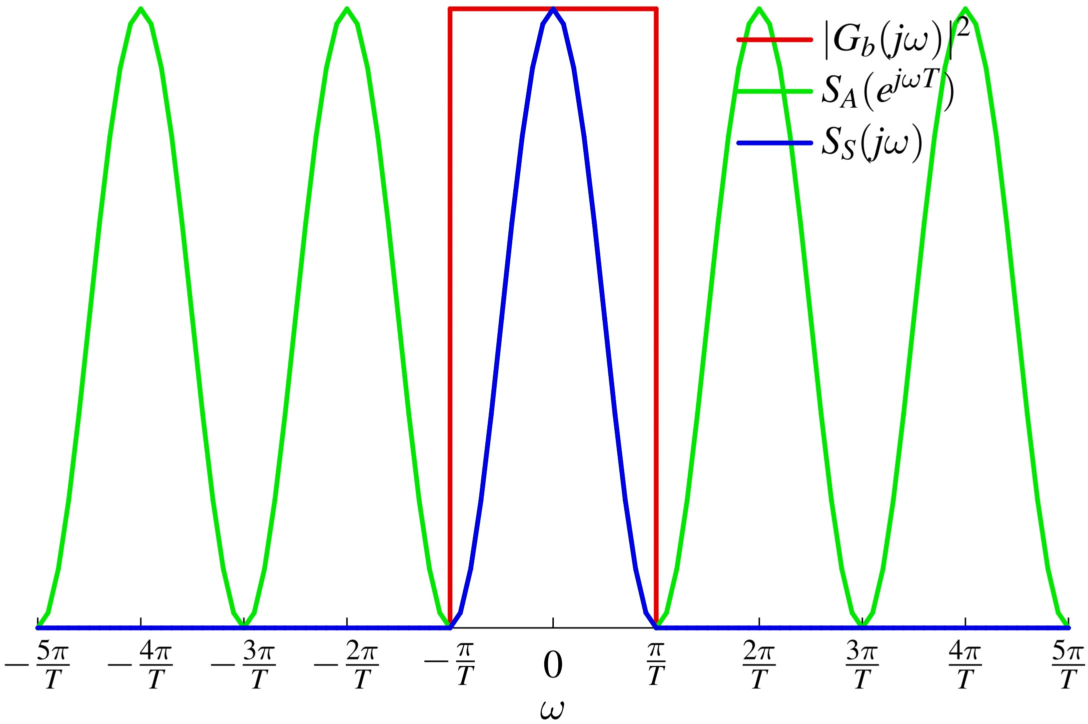
Densidad espectral de potencia con $g_a(t)$



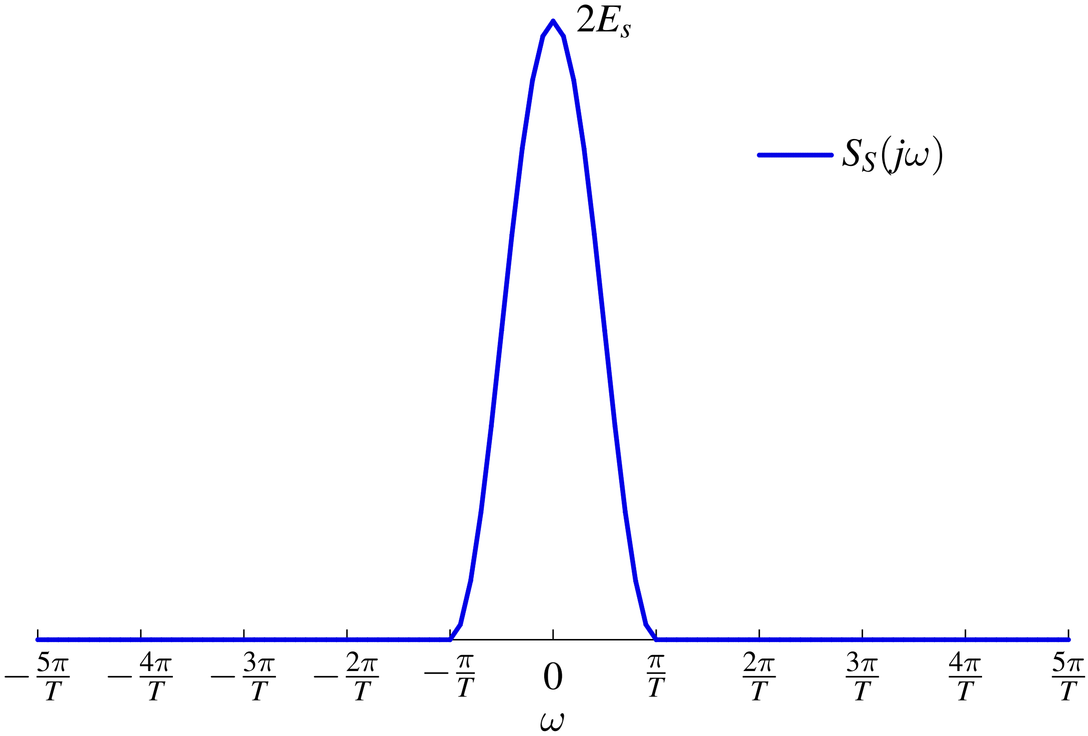
Densidad espectral de potencia con $g_a(t)$



Densidad espectral de potencia con $g_b(t)$



Densidad espectral de potencia con $g_b(t)$



Selección de las formas de onda para $g(t)$

- Selección para identificar la secuencia $A[n]$ muestreando $s(t)$
  - **(a)** Pulsos con duración limitada al período de símbolo T
    - ⋆ No hay solapamiento entre pulsos desplazados nT segundos

$$\text{Ejemplo : } g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

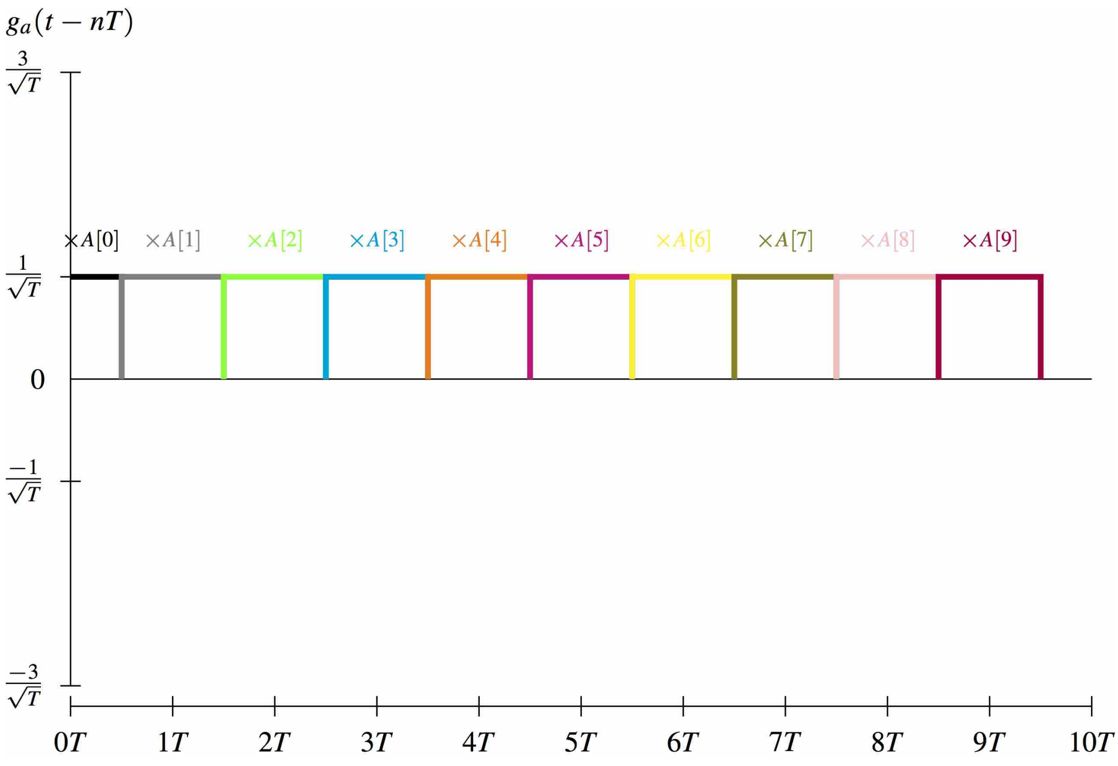
    - ⋆ El símbolo $A[n]$ determinas la amplitud de la señal en su intervalo de símbolo asociado
    - ⋆ Problema: ancho de banda infinito
  - **(b)** Pulsos con una duración infinita: ancho de banda finito
    - ⋆ Solapamiento: interferencia no destructiva en algún punto cada T segundos

$$g(nT) = 0,\ \forall n \neq 0;\ \text{Ejemplo : } g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

    - ⋆ El símbolo $A[n]$ determina la amplitud de la señal en el punto no destructivos asociado en su intervalo

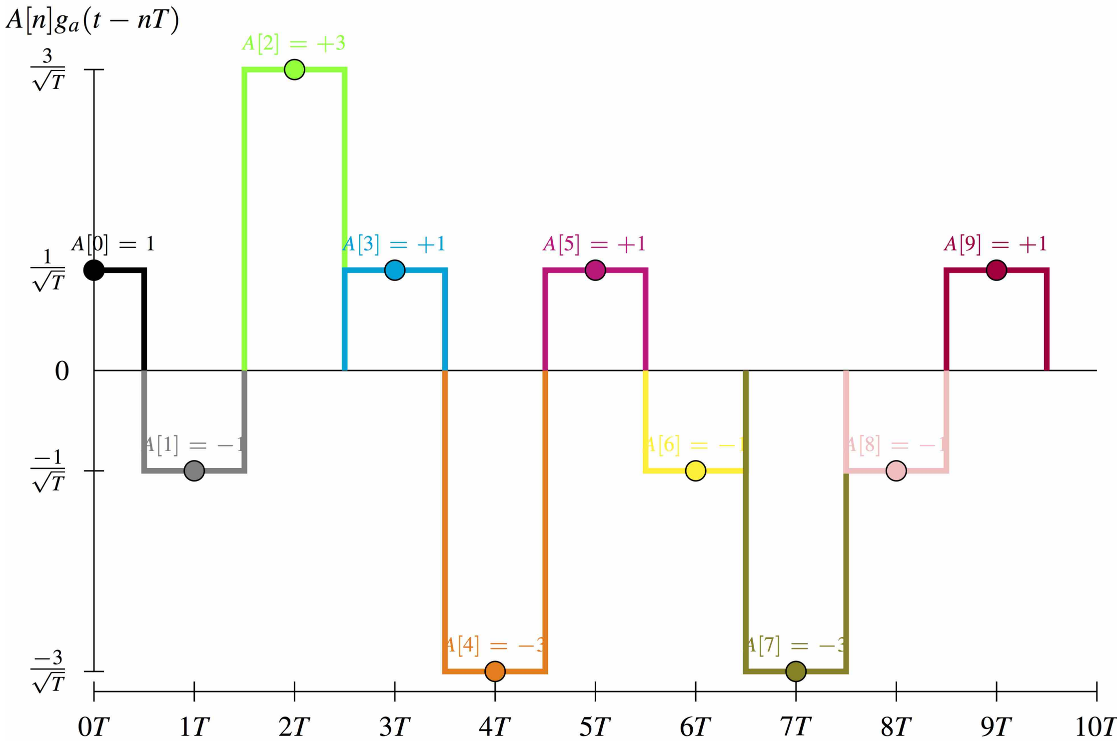
Pulso rectangular : pulsos retardados nT ($n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-3	$+1$	-1	-3	-1	$+1$



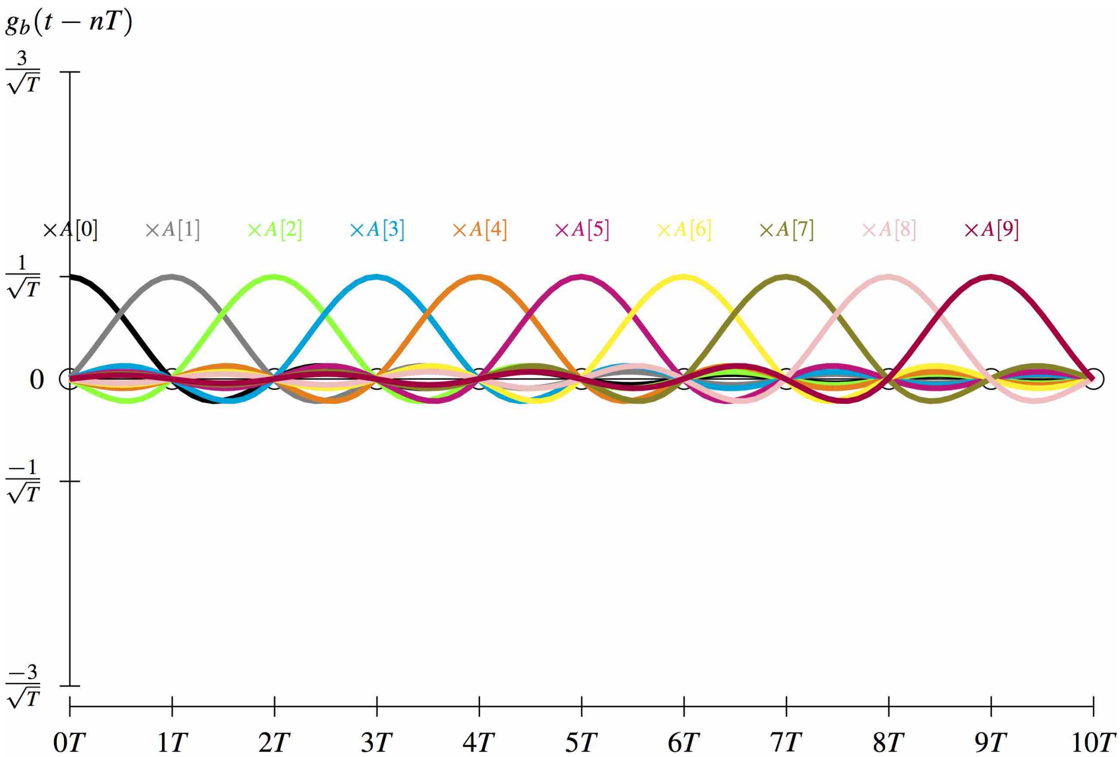
Pulso rectangular - Contribución de cada símbolo

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-3	$+1$	-1	-3	-1	$+1$



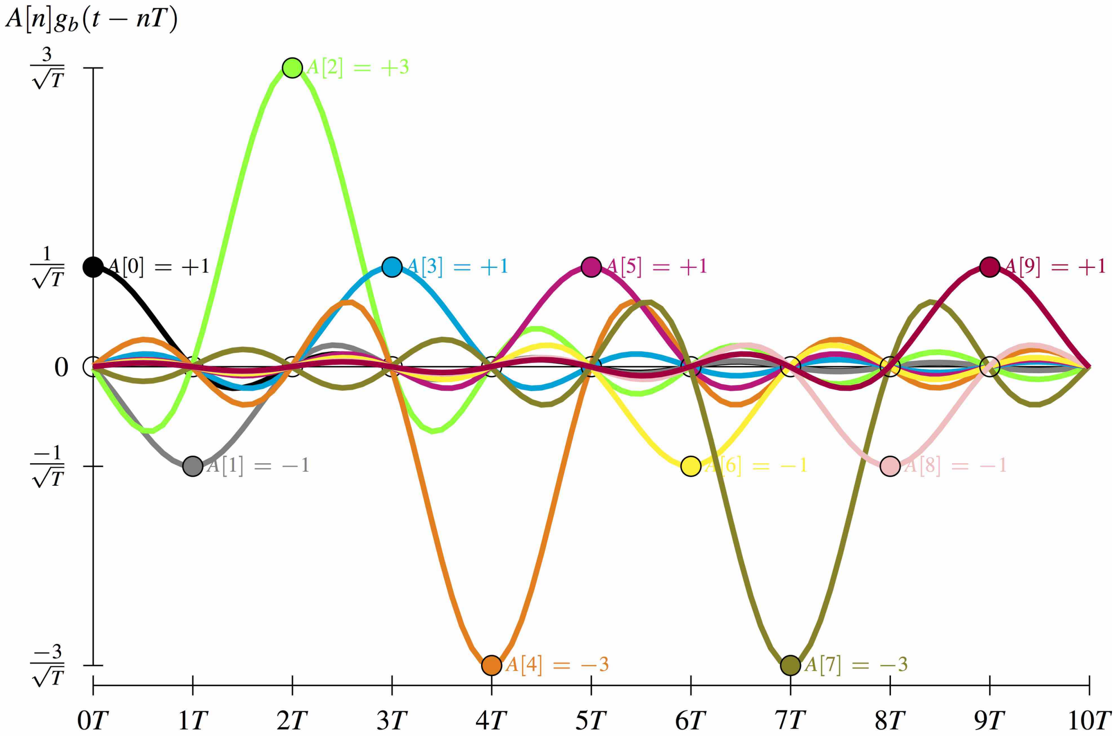
Pulso sinc : pulsos retardados nT ($n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-3	$+1$	-1	-3	-1	$+1$



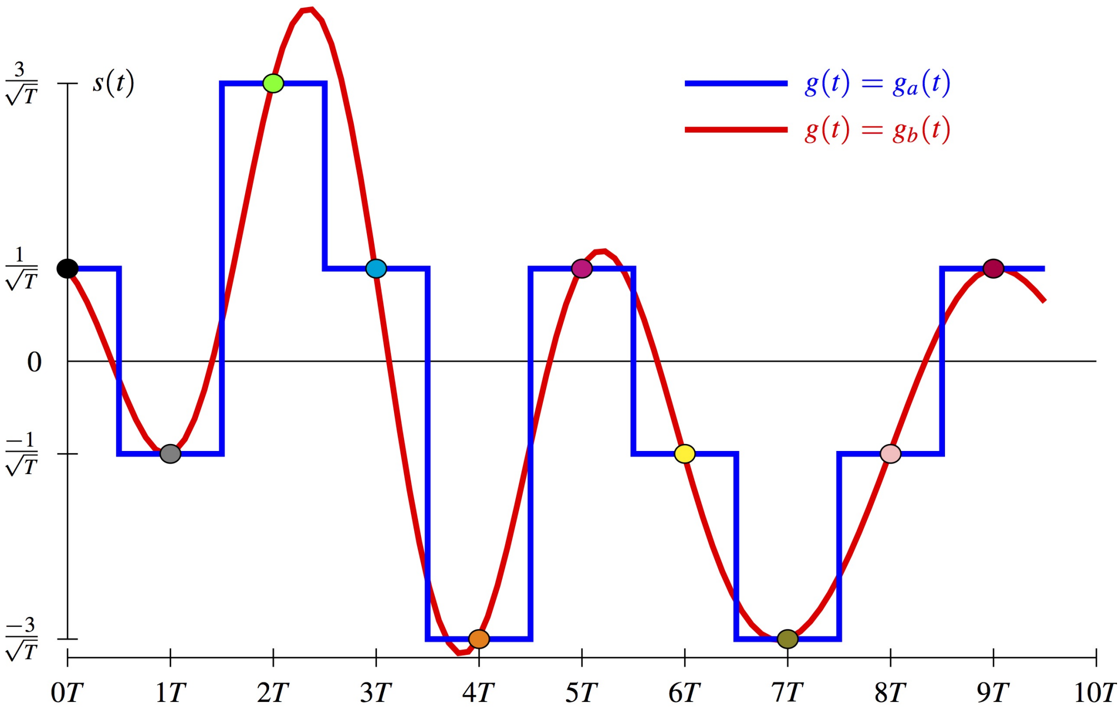
Pulso sinc : Contribución de cada símbolo

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-3	$+1$	-1	-3	-1	$+1$



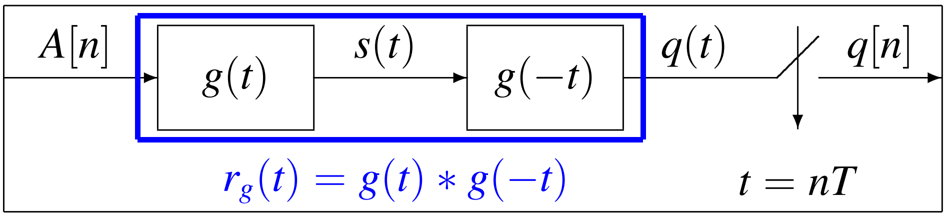
Señal modulada PAM $s(t)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-3	$+1$	-1	-3	-1	$+1$



Recuperación de $A[n]$ a partir de $s(t)$ con un filtro adaptado

- Recuperación de $A[n]$ en un escenario ideal
  - No hay ninguna distorsión sobre la señal $s(t)$
  - Se aplica un filtro adaptado sobre $s(t)$
  - Se recupera $A[n]$ muestreando $q(t)$ (salida del filtro)

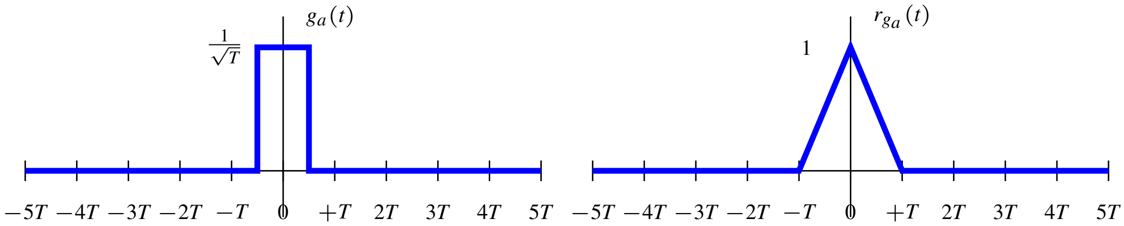


$$s(t) = \sum_n A[n]\, g(t - nT) \qquad q(t) = \sum_n A[n]\, r_g(t - nT)$$

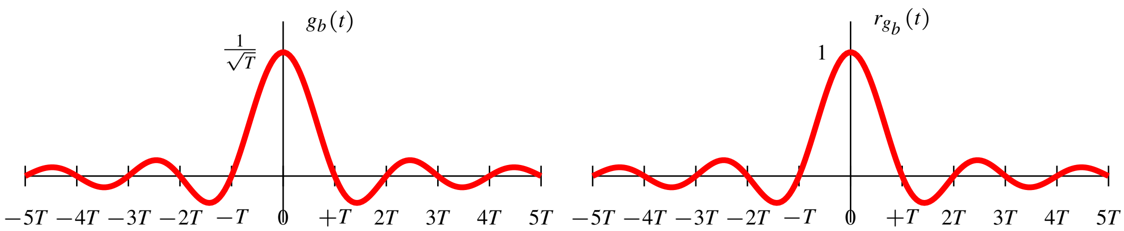
- Condiciones para los pulsos de tipo (a)
  - La misma, aplicable sobre $g(t)$ o sobre $r_g(t)$
    - ★ Si se aplica sobre $g(t)$, $r_g(t)$ tiene soporte en $(-T, +T)$ y $r_g(\pm T) = 0$, lo que también permite recuperar $A[n]$
- Condiciones para los pulsos del tipo (b)
  - La condición de pasos por cero periódicos se traslada a $r_g(t)$

Forma de $r_g(t)$ para los pulsos de ejemplo

$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \leftrightarrow \quad r_{g_a}(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

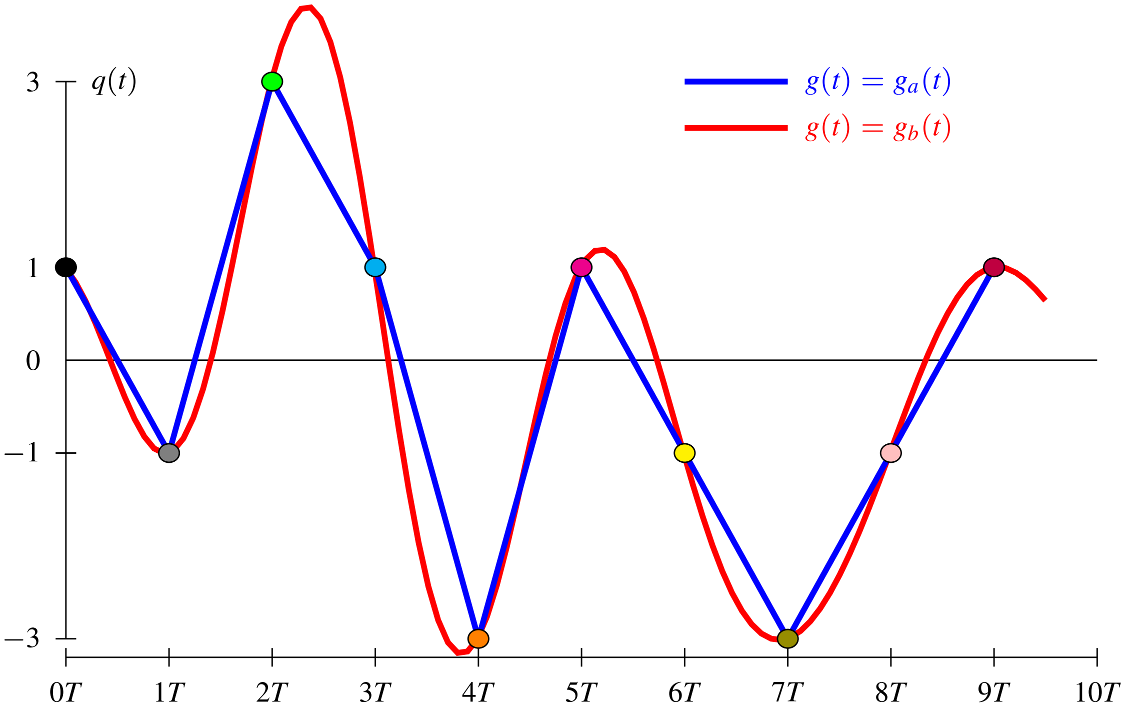


$$g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \leftrightarrow \quad r_{g_b}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$



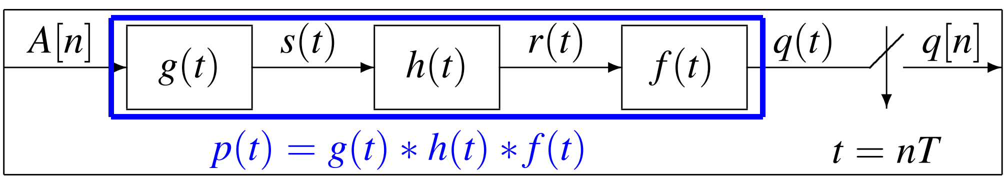
Señal recibida $q(t)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[n]$	$+1$	-1	$+3$	$+1$	-3	$+1$	-1	-3	-1	$+1$



Recuperación de $A[n]$ transmitiendo por un canal (sin ruido)

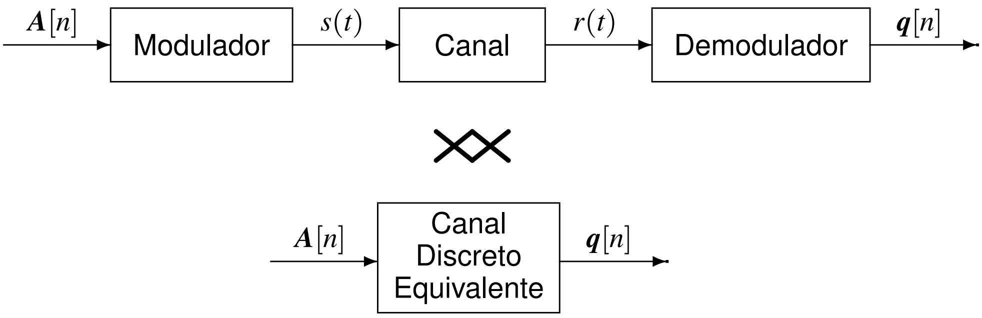
- Recuperación de $A[n]$ transmitiendo por un canal
  - Por simplicidad, se asume que no hay ruido
  - A la salida del canal se aplica un filtro receptor $f(t)$
    - Opción habitual: $f(t) = g(-t)$ (filtro adaptado al transmisor)



$$s(t) = \sum_n A[n]\, g(t - nT) \qquad q(t) = \sum_n A[n]\, p(t - nT)$$

- Ahora las condiciones deben evaluarse sobre $p(t)$
  - Duración limitada a T segundos
  - Pasos cíclicos por cero cada T segundos
- Diseño para cumplir las condiciones
  - Transmisor $g(t)$ y receptor $f(t)$ pueden diseñarse
  - El canal $h(t)$ viene dado, no es un parámetro de diseño

Canal discreto equivalente

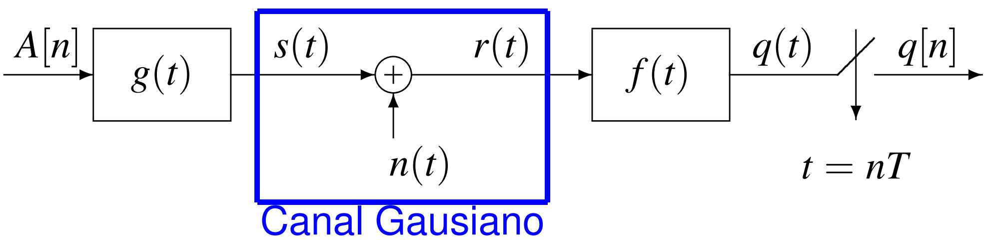


- Proporciona la expresión en tiempo discreto de las observaciones a la salida del demodulador $\boldsymbol{q}[n]$ en función de la secuencia transmitida $\boldsymbol{A}[n]$
  - En sistemas ideales: $\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{A}[n] + \boldsymbol{z}[n]$
    Si $z[n]$ es gausiano, las distribuciones condicionales (dado $\boldsymbol{A}[n] = \boldsymbol{a}_i$)

$$f_{\boldsymbol{q}[n]|\boldsymbol{A}[n]}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i) = \frac{1}{(\pi N_o)^{N/2}} e^{-\frac{||\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}_i||^2}{N_0}}$$

- A continuación se obtendrá dichas expresiones para dos canales
  - Canal gausiano
  - Canal lineal

Transmisión de señales PAM sobre canales gausianos



- Modelo de canal gausiano
  - La única distorsión durante la transmsión es la suma de ruido

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

$n(t)$: proceso aleatorio estacionario, blanco y gausiano, media nula y $S_n(j\omega) = N_0/2$

- Filtro receptor $f(t)$
  - Configuración habitual: filtro adaptado al transmisor

$$f(t) = g^*(-t) = g(-t), \text{ ya que } g(t) \text{ esi real}$$

- Señal filtrada antes del muestreador

$$q(t) = s(t) * f(t) + n(t) * f(t)$$

Canal discreto equivalente para canal gausiano

- Señal antes del muestreo

$$q(t) = \underbrace{\left(\overbrace{\sum_k A[k]\, g(t-kT)}^{s(t)} \right) * f(t)}_{\text{salida sin ruido } o(t)} + \underbrace{n(t) * f(t)}_{\text{ruido filtrado } z(t)}$$

$$o(t) = \sum_k A[k] \left(g(t-kT) * f(t) \right) = \sum_k A[k]\, p(t-kT)$$

- $p(t) = g(t) * f(t)$: respuesta conjunta transmisor-receptor
  - Esta respuesta conjunta detemina la salida sin ruido en el receptor
- Observación discreta a la salida del demodulador

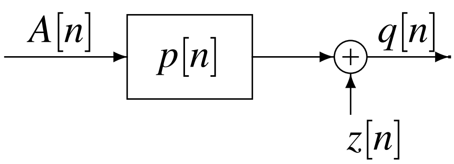
$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = q(nT) = \sum_k A[k]\, p\left((n-k)T\right) + z(nT)$$

Canal discreto equivalente para canal gausiano (II)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)\big|_{t=nT}$$

$$q[n] = \sum_k A[k]\, p[n-k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$



- Definición de la respuesta conjunta $p(t)$ (o $P(j\omega)$)

$$p(t) = g(t) * f(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega)\, F(j\omega)$$

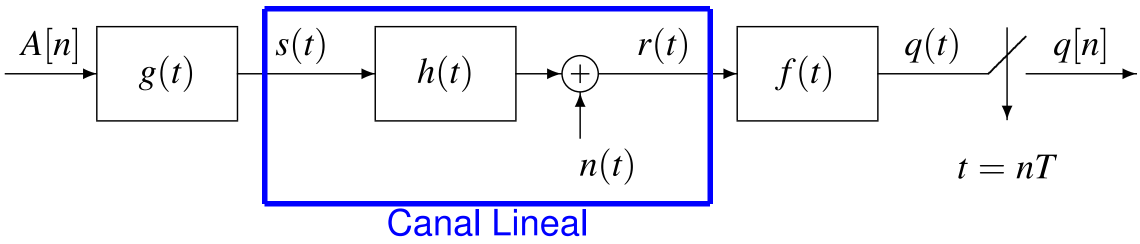
  - Utilizando filtros adaptados:

$$f(t) = g(-t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad F(j\omega) = G^*(j\omega)$$

$$p(t) = g(t) * g(-t) = r_g(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega)\, G^*(j\omega) = |G(j\omega)|^2$$

$r_g(t)$: función de autocorrelación continua de $g(t)$ (o función de ambigüedad temporal de $g(t)$)

Transmisión de señales PAM a través de canales lineales



- Modelo de canal lineal
  - La señal PAM $s(t)$ sufre distorsión lineal durante la transmisión
  - También se añade ruido blanco y gausiano

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

$h(t)$: respuesta al impulso del sistema que modela la distorsión lineal

$n(t)$: proceso estacionario, blanco, gausiano, con media nula y $S_n(j\omega) = N_0/2$

- Filtro receptor $f(t)$
  - Configuración habitual: filtro adaptado $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$
- Señal filtrada a la entrada del muestreador

$$q(t) = r(t) * f(t) = s(t) * h(t) * f(t) + n(t) * f(t)$$

Canal discreto equivalente para canal lineal

- Señal antes del muestreo

$$\begin{aligned} q(t) &= \left(\sum_k A[k]\, g(t-kT)\right) * h(t) * f(t) + n(t) * f(t) \\ &= \sum_k A[k] \left(g(t-kT) * h(t) * f(t)\right) + n(t) * f(t) \\ &= \sum_k A[k]\, p(t-kT) + z(t) \end{aligned}$$

- $p(t) = g(t) * h(t) * f(t)$: respuesta conjunta transmisor-canal-receptor
  - Si se usa un filtro adaptado en el receptor

$$p(t) = g(t) * h(t) * g^*(-t) = r_g(t) * h(t)$$

- Observación discreta a la salida del demodulador

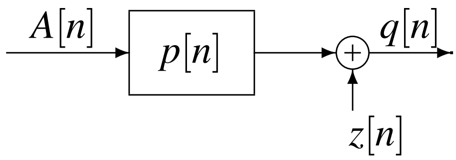
$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = q(nT) = \sum_k A[k]\, p\left((n-k)T\right) + z(nT)$$

Canal discreto equivalente para canal lineal (II)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)\big|_{t=nT}$$

$$q[n] = \sum_k A[k]\; p[n-k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$



- Mismo model que para canal gausiano pero con una nueva definición para la respuesta conjunta $p(t)$
  - Ahora la definición incluye el efecto de $h(t)$

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega)\; H(j\omega)\; F(j\omega)$$

  - Utilizando filtros adaptados: $f(t) = g(-t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(j\omega) = G^*(j\omega)$

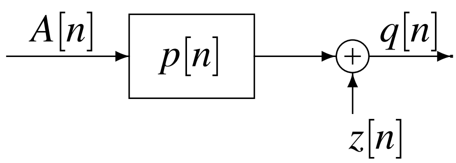
$$p(t) = r_g(t) * h(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2\; H(j\omega)$$

Interferencia intersimbólica (ISI)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)\big|_{t=nT} \qquad q[n] = o[n] + z[n]$$

Salida sin ruido $o[n] = \sum_k A[k]\; p[n-k] = A[n] * p[n]$



- Ideal

$$p[n] = \delta[n] \rightarrow o[n] = A[n]$$

- Real: Interferencia entre símbolos (ISI)

$$o[n] = A[n] * p[n] = \sum_k A[k]\; p[n-k] = \underbrace{A[n]}_{Ideal}\; \underbrace{p[0]}_{escalado} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k]\; p[n-k]}_{ISI}$$

Interferencia intersimbólica - Análisis

- Interferencia entre símbolos para el canal discreto $p[n]$

$$o[n] = \underbrace{\underbrace{A[n]}_{Ideal} \quad \underbrace{p[0]}_{escalado}}_{deseado} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k\neq n}} A[k]\,p[n-k]}_{interferencia\ (ISI)}$$

  - Efecto de la interferencia entre símbolos

$$\text{ISI} = \sum_{\substack{k \\ k\neq n}} A[k]\,p[n-k]$$

Contribución en el instante discreto n de símbolos anteriores y posteriores

$$o[n] = \underbrace{\cdots + A[n-2]\,p[2] + A[n-1]\,p[1]}_{ISI\ precursora} + \underbrace{A[n]\,p[0]}_{cursor} + \underbrace{A[n+1]\,p[-1] + A[n+2]\,p[-2] + \cdots}_{ISI\ postcursora}$$

ISI - Efecto : Constelación extendida

- ISI produce una constelación extendida en el receptor

Valores de la salida discreta sin ruido $o[n] = A[n] * p[n]$

- Ejemplo: modulación 2-PAM ($A[n] \in \{\pm 1\}$)

Canal A

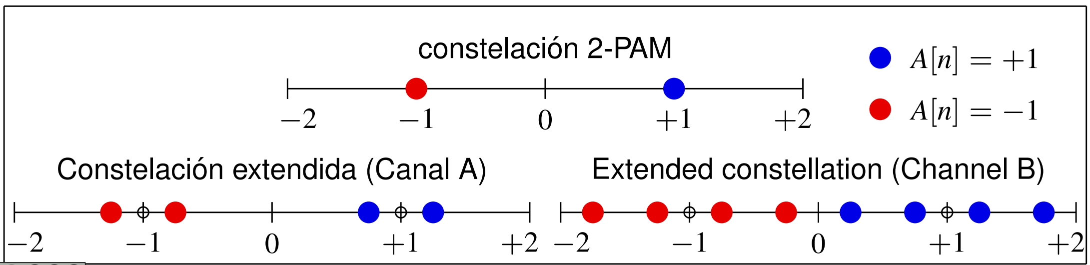
$$p[n] = \delta[n] + \tfrac{1}{4}\delta[n-1]$$
$$o[n] = A[n] + \tfrac{1}{4}A[n-1]$$

Canal B

$$p[n] = \delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1] + \tfrac{1}{4}\delta[n-2]$$
$$o[n] = A[n] + \tfrac{1}{2}A[n-1] + \tfrac{1}{4}A[n-2]$$

$A[n]$	$A[n-1]$	$o[n]$
$+1$	$+1$	$+\frac{5}{4}$
$+1$	-1	$+\frac{3}{4}$
-1	$+1$	$-\frac{3}{4}$
-1	-1	$-\frac{5}{4}$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
$+1$	$+1$	$+1$	$+\frac{7}{4}$
$+1$	$+1$	-1	$+\frac{5}{4}$
$+1$	-1	$+1$	$+\frac{3}{4}$
$+1$	-1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	$+1$	$+1$	$-\frac{1}{4}$
-1	$+1$	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	-1	$+1$	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$



ISI : respuesta conjunta transmisor-canal-receptor $p(t)$

- La respuesta $p(t)$ determina el comportamiento de la ISI
  - La salida sin ruido depende del valor de $p[n]$, obtenida muestreando la respuesta conjunta transmisor-canal-receptor $p(t)$
- Definición de respuesta conjunta transmisor-canal-receptor
  - Canal gausiano
$$p(t) = g(t) * f(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega)\ F(j\omega)$$
  - Canal lineal
$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega)\ H(j\omega)\ F(j\omega)$$
- Receptor habitual: filtro adaptado $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$
  - Canal gausiano
$$p(t) = r_g(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2$$
  - Canal lineal
$$p(t) = r_g(t) * h(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2\ H(j\omega)$$

Algunas propiedades de la función de ambigüedad temporal

- Definición para señales deterministas de energía $x(t)$
$$r_x(t) = x(t) * x^*(-t)$$
Informalmente: mide la similitud entre una función y ella misma con un retardo t
- Expresión en el dominio frecuencial
$$R_x(j\omega) = \mathcal{TF}\{r_x(t)\} = \mathcal{TF}\{x(t)\} \times \mathcal{TF}\{x^*(-t)\}$$
$$= X(j\omega) \times X^*(j\omega) = |X(j\omega)|^2$$
- Valor máximo en $t = 0$: $|r_x(0)| \geq |r_x(t)|$
- Energía de la señal

Parseval: $\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$

Usando la función de autocorrelación continua (func. ambigüedad temporal)
$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(j\omega)\, d\omega \rightarrow \boxed{\mathcal{E}\{x(t)\} = r_x(0)}$$

Criterio de Nyquist para la ausencia de ISI

- Condición para evitar la ISI expresada en tiempo discreto

$$p[n] = p(t)\Big|_{t=nT} = \delta[n] \qquad \underbrace{(\times C)}_{escala/ganancia}$$

- Condición equivalente en el dominio frecuencial

$$P\left(e^{j\omega}\right) = 1 \quad (\times C)$$

- Condiciones equivalentes expresadas en tiempo continuo

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta(t) \quad (\times C)$$

$$P(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1 \quad (\times C)$$

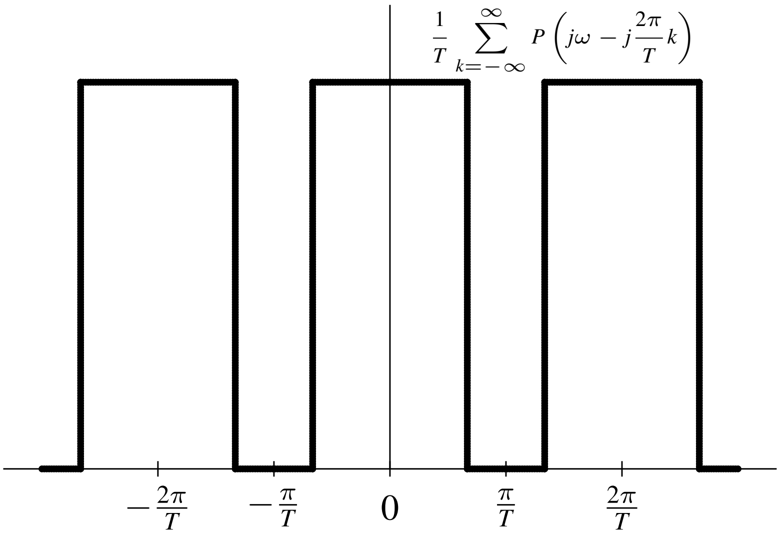
$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1 \quad (\times C)$$

Réplicas de $P(j\omega)$ desplazadas múltiplos de $\frac{2\pi}{T}$ suman una constante

Aplicación: pulsos limitados en banda

- Ejemplo utilizando un ancho de banda $W < \frac{\pi}{T}$ rad/s (o $B < \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2}$ Hz)
  - Elección más simple para $P(j\omega)$: pulso rectangular

$$P(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W = 2\pi B \\ 0 & |\omega| > W = 2\pi B \end{cases}$$



  - Imposible satisfacer el criterio de Nyquist para $W < \frac{\pi}{T}$ rad/s

Aplicación: pulsos limitados en banda (II)

- Criterio de Nyquist para ISI usando estos pulsos:

$$W = n \times \frac{\pi}{T} = n \times \pi\, R_s \text{ rad/s} \quad \left(B = n \times \frac{R_s}{2} \text{ Hz}\right)$$

- En el dominio temporal los pulsos son

$$p(t) = \text{sinc}\left(n \times \frac{t}{T}\right)$$

- Compromiso ancho de banda / tasa de transmisión: $p(t)$ óptimo
  - Mínimo ancho de banda sin ISI a tasa $R_s = \frac{1}{T}$ baudios

$$W_{min} = \frac{\pi}{T} = \pi\, R_s \text{ rad/s} \quad \left(B_{min} = \frac{R_s}{2} \text{ Hz}\right)$$

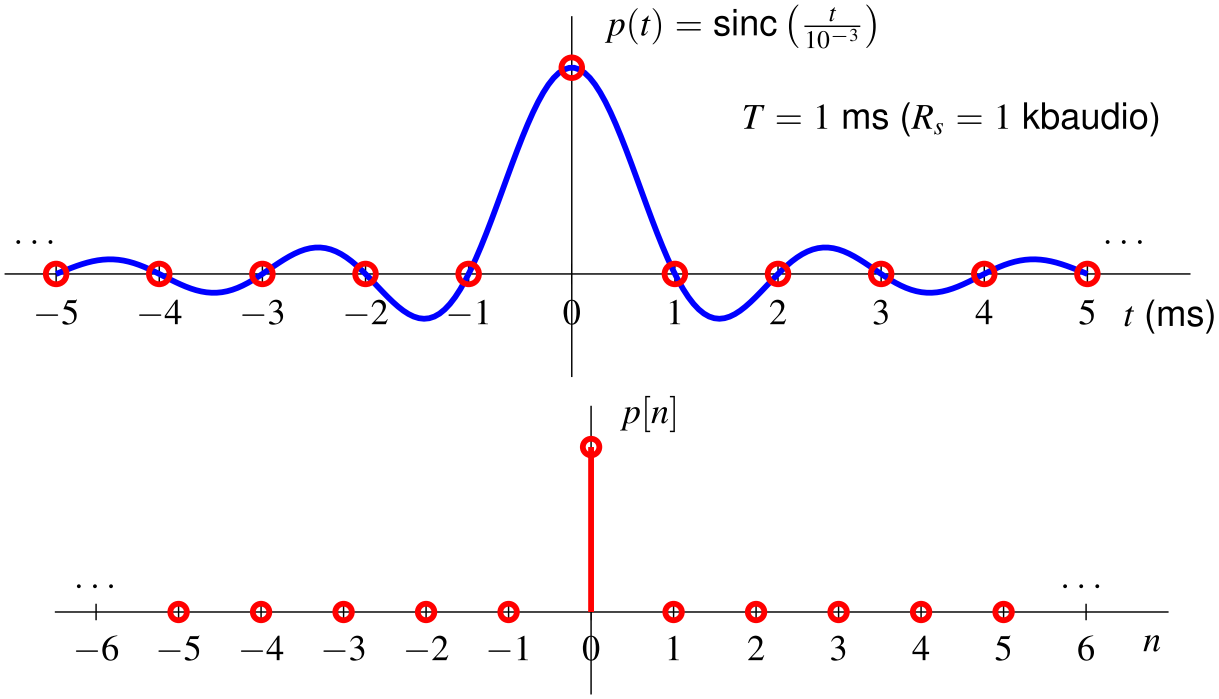
  - Máxima tasa sin ISI sobre un ancho de banda W rad/s (B Hz)

$$R_s\Big|_{max} = \frac{W}{\pi} = 2 \times B \text{ baudios (símbolos/s)}$$

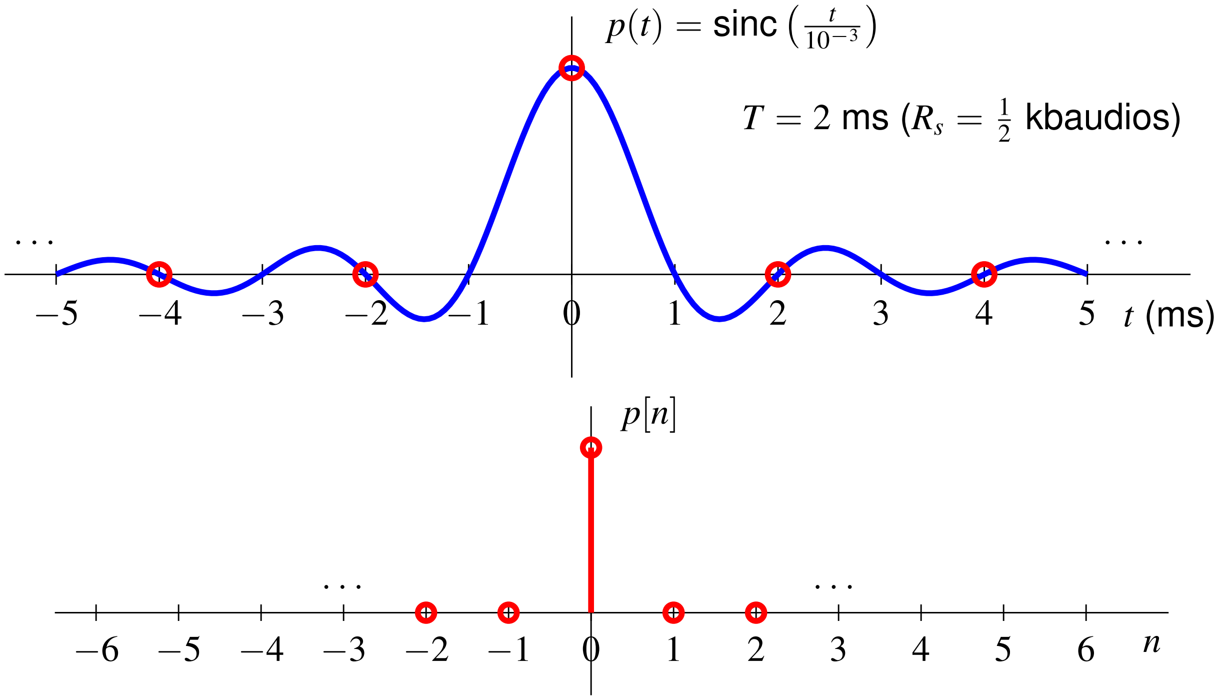
  - Respuesta conjunta óptima

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = T\, \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

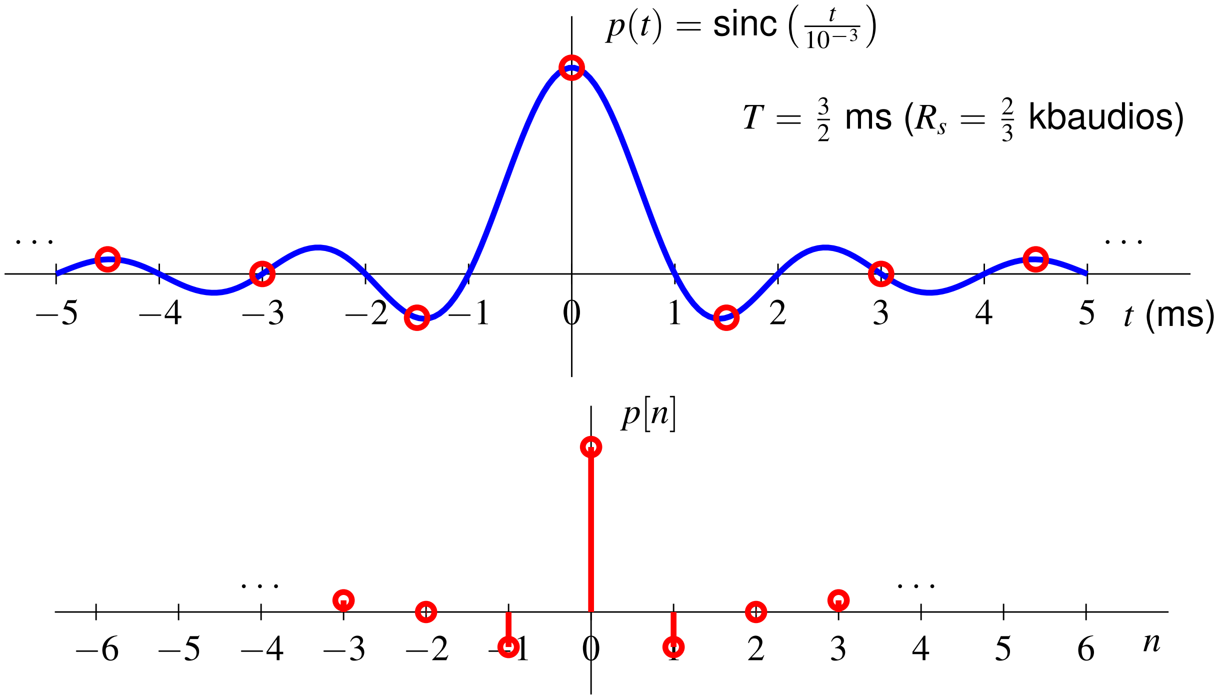
Ejemplo: $p(t)$



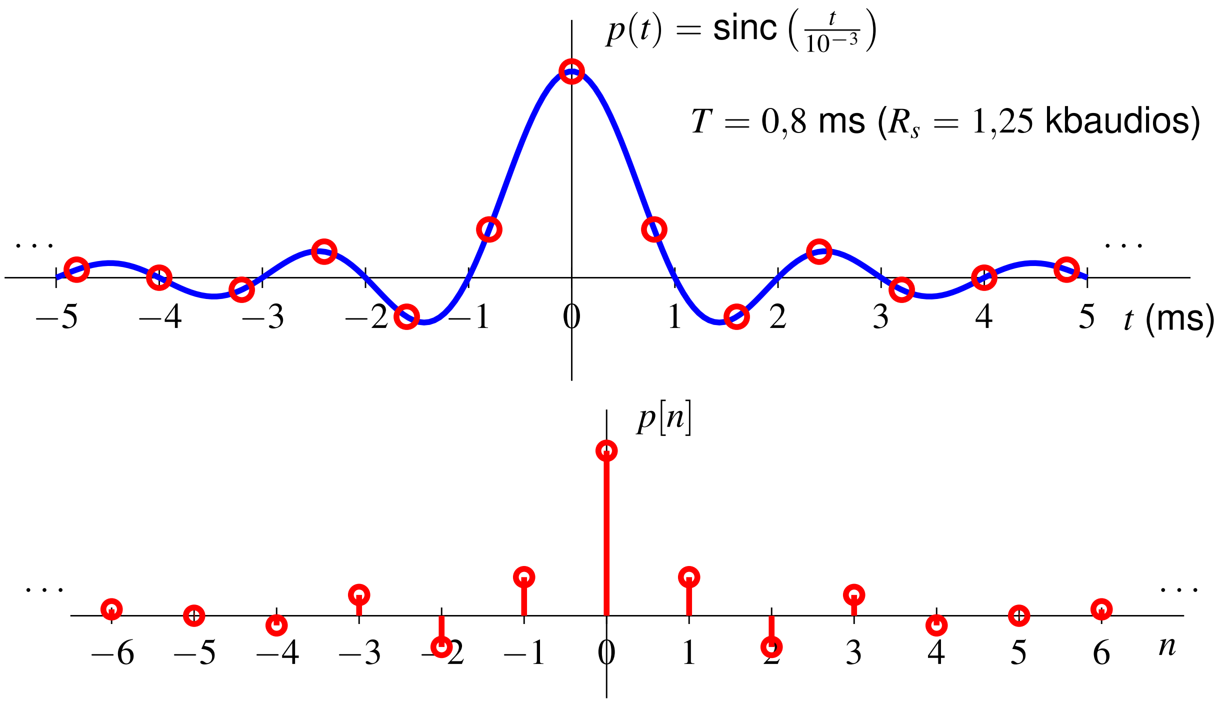
Ejemplo: $p(t)$



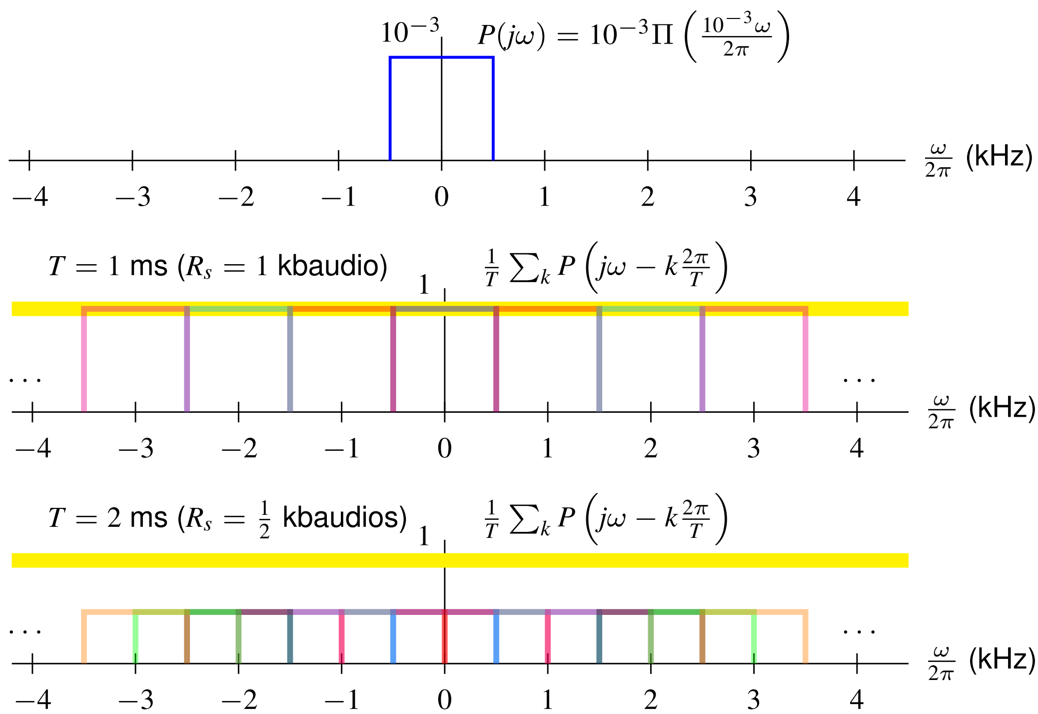
Ejemplo: $p(t)$



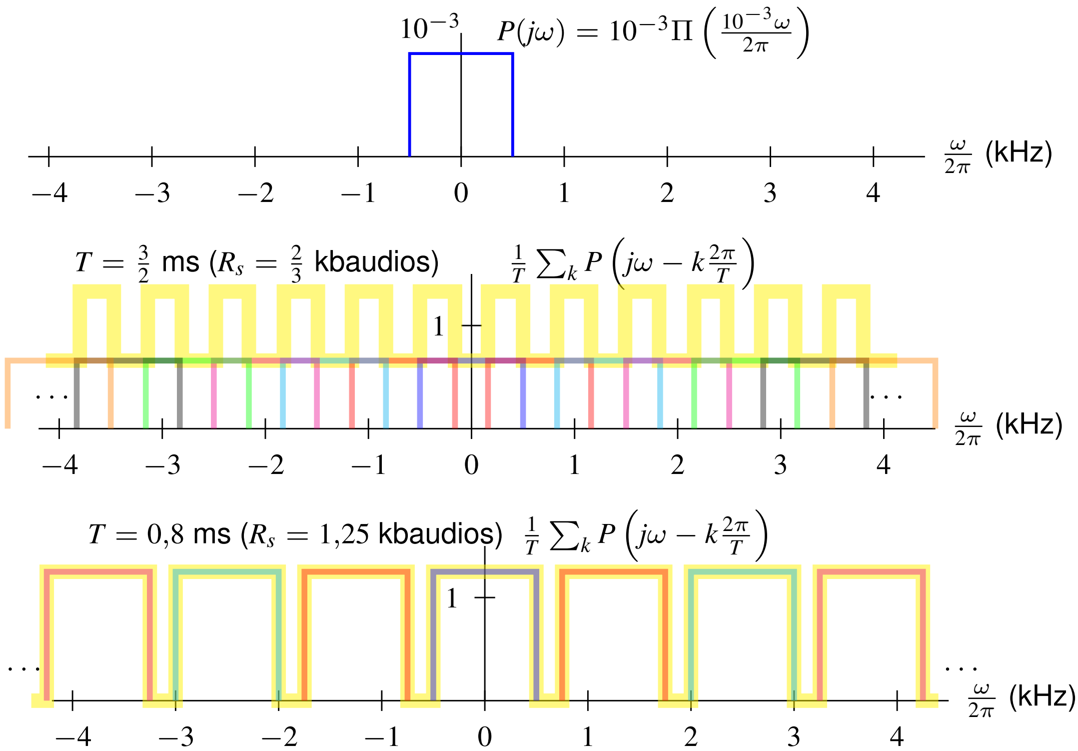
Ejemplo: $p(t)$



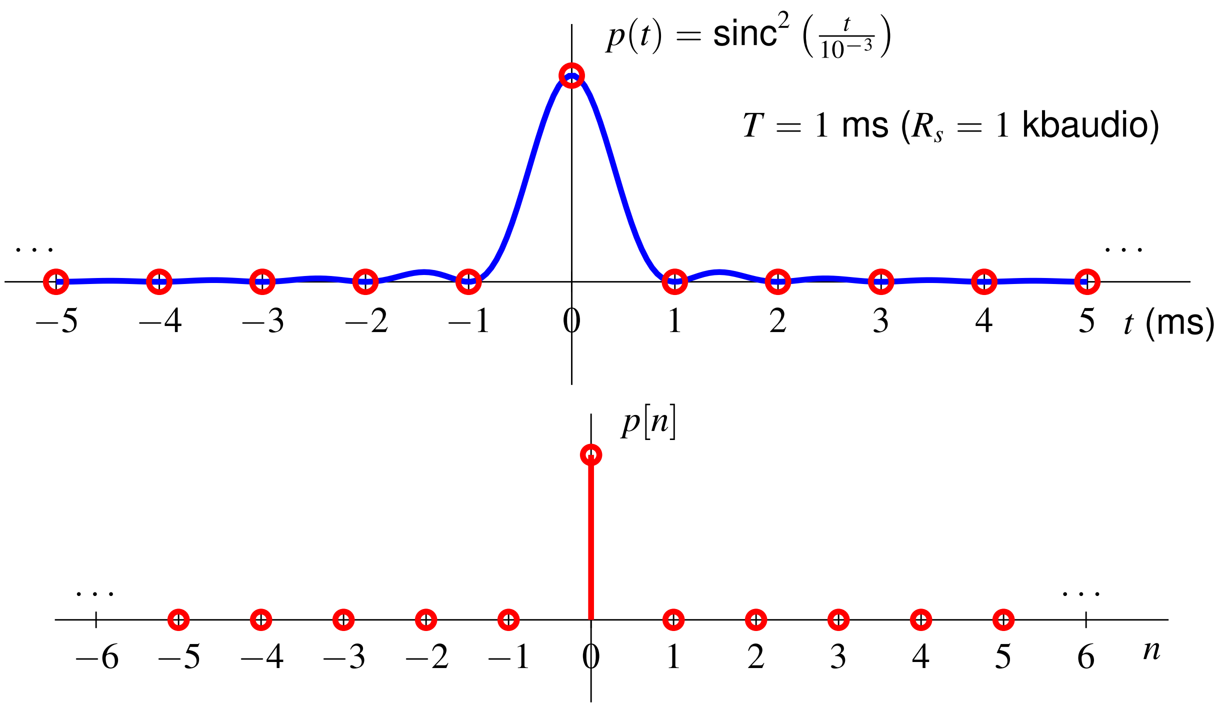
Ejemplo: $P(j\omega)$



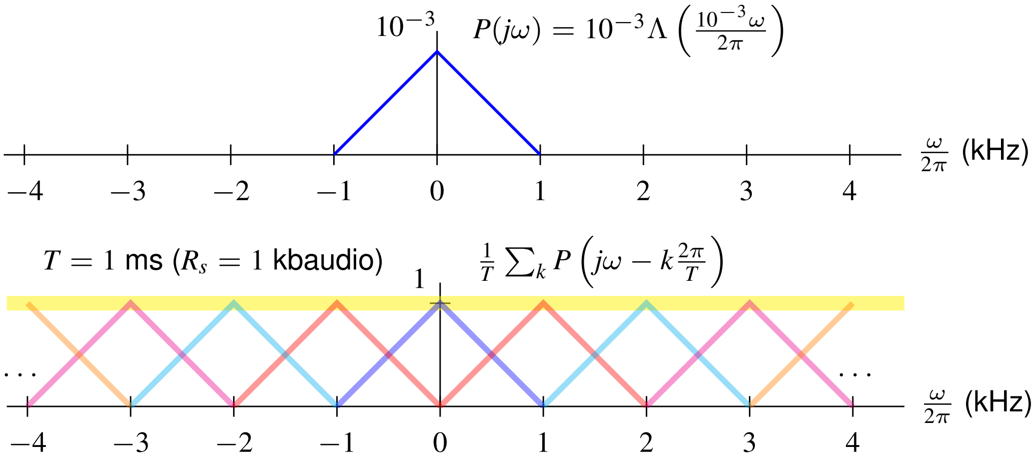
Ejemplo: $P(j\omega)$



Ejemplo: $p(t)$



Ejemplo: $P(j\omega)$



Pulsos en coseno alzado

- Familia de pulsos con un parámetro: factor de caída (*roll-off*) α
  - Rango de valores del factor de caída: $\alpha \in [0, 1]$
  - Caso particular: un coseno alzado con $\alpha = 0$ es una función sinc
- Expresión del pulso

$$h_{RC}^{\alpha,T}(t) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T}\right)\left(\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}\right)$$

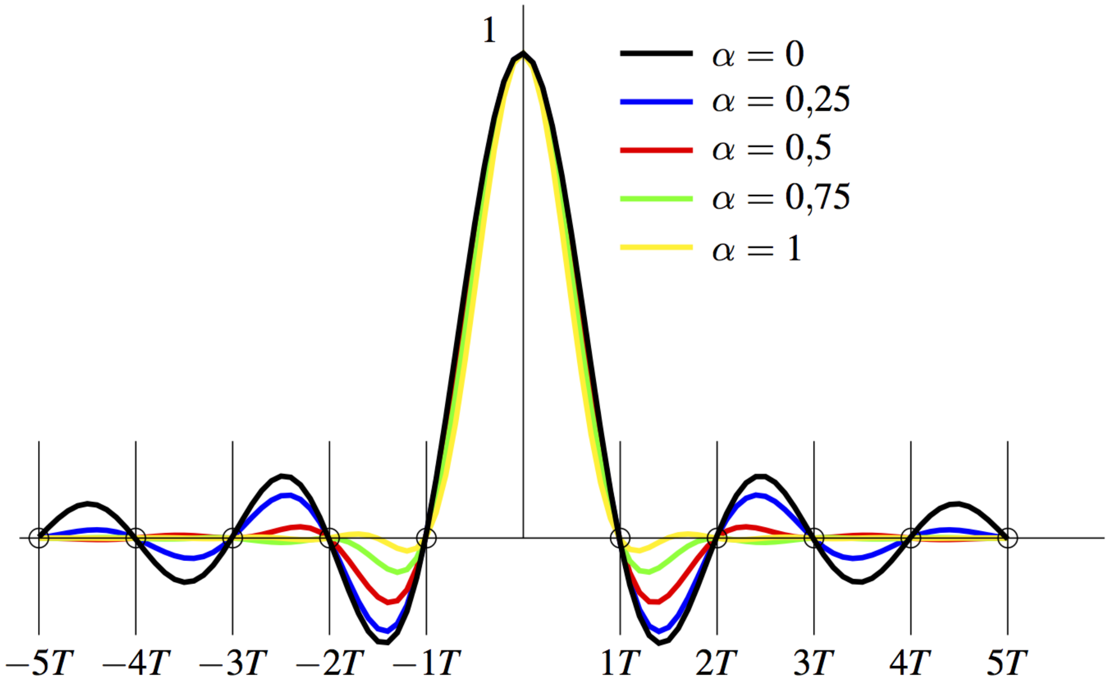
- Transformada de Fourier

$$H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| < (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \\ \frac{T}{2}\left[1-\operatorname{sen}\left(\frac{T}{2\alpha}\left(|\omega|-\frac{\pi}{T}\right)\right)\right] & (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq (1+\alpha)\frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > (1+\alpha)\frac{\pi}{T} \end{cases}$$

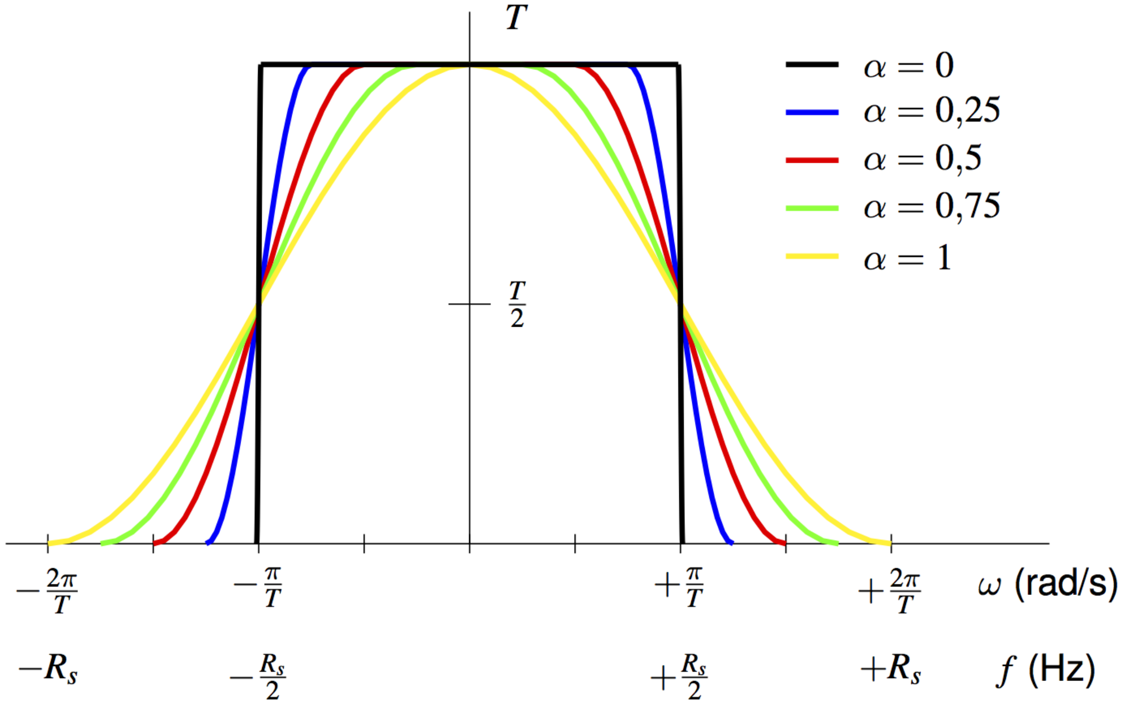
- Ancho de banda: depende del factor de caída

$$W = (1+\alpha)\times\frac{\pi}{T} \text{ rad/s}, \;\; B = (1+\alpha)\times\frac{R_s}{2} \text{ Hz}$$

Pulsos en coseno alzado $h_{RC}^{\alpha,T}(t)$



Cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$



Pulsos en raíz de coseno alzado

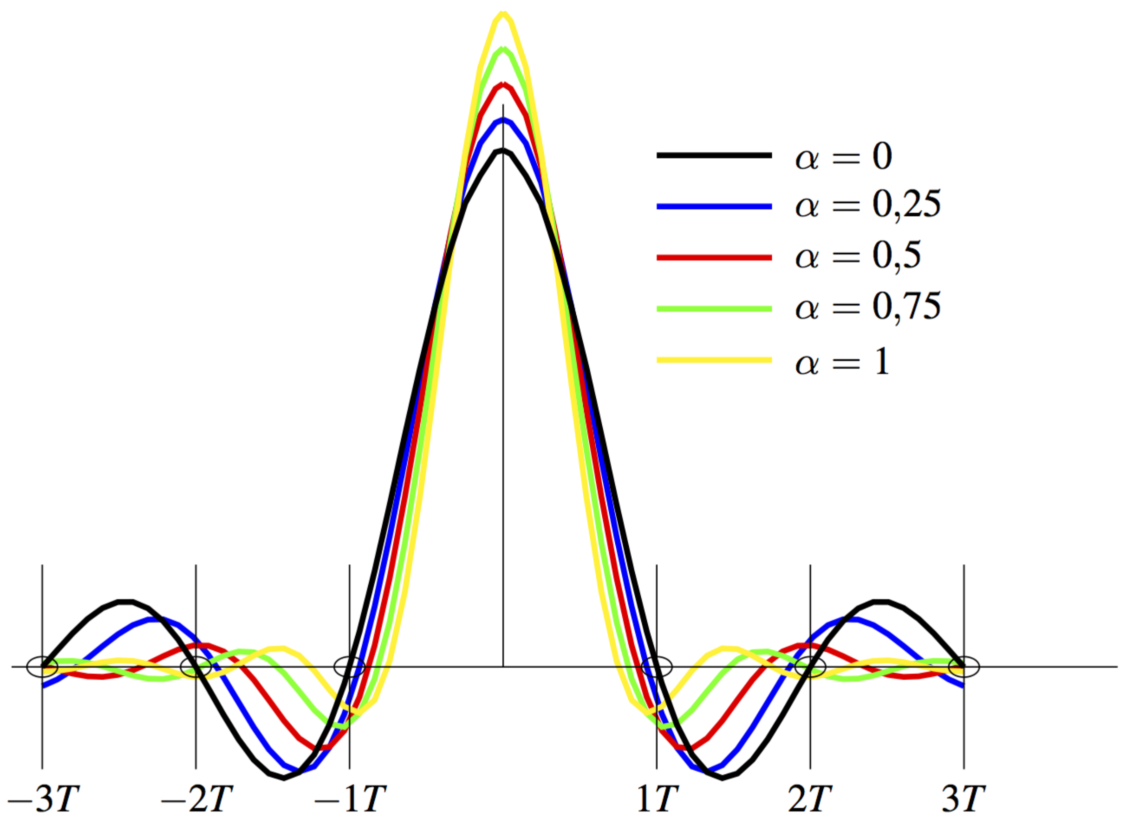
- Pulsos cuya convolución es un coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) * h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t) \qquad H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)\, H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$$

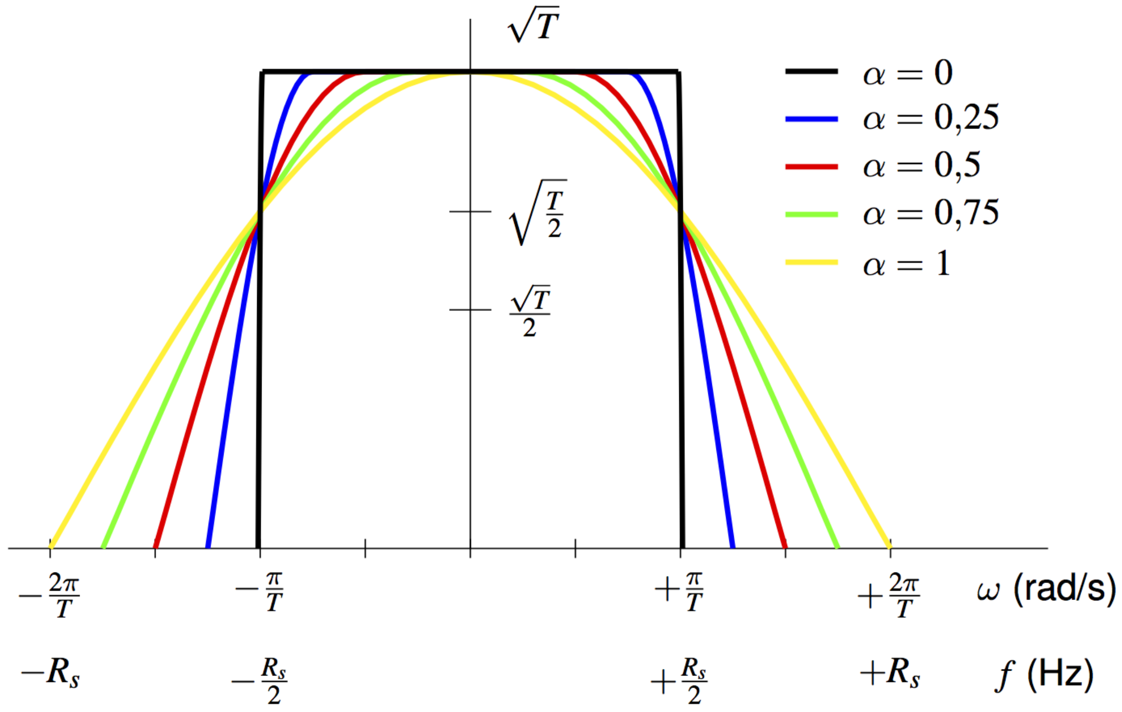
- Procedimiento general para obtener $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$
  1. Se parte de la respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$
  2. Se hace $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = \sqrt{H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)}$
  3. $h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)\right\}$
- Pulsos en raíz de coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left((1+\alpha)\dfrac{\pi t}{T}\right) + T\dfrac{\operatorname{sen}\left((1-\alpha)\dfrac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1-\left(\dfrac{4\alpha t}{T}\right)^2}$$

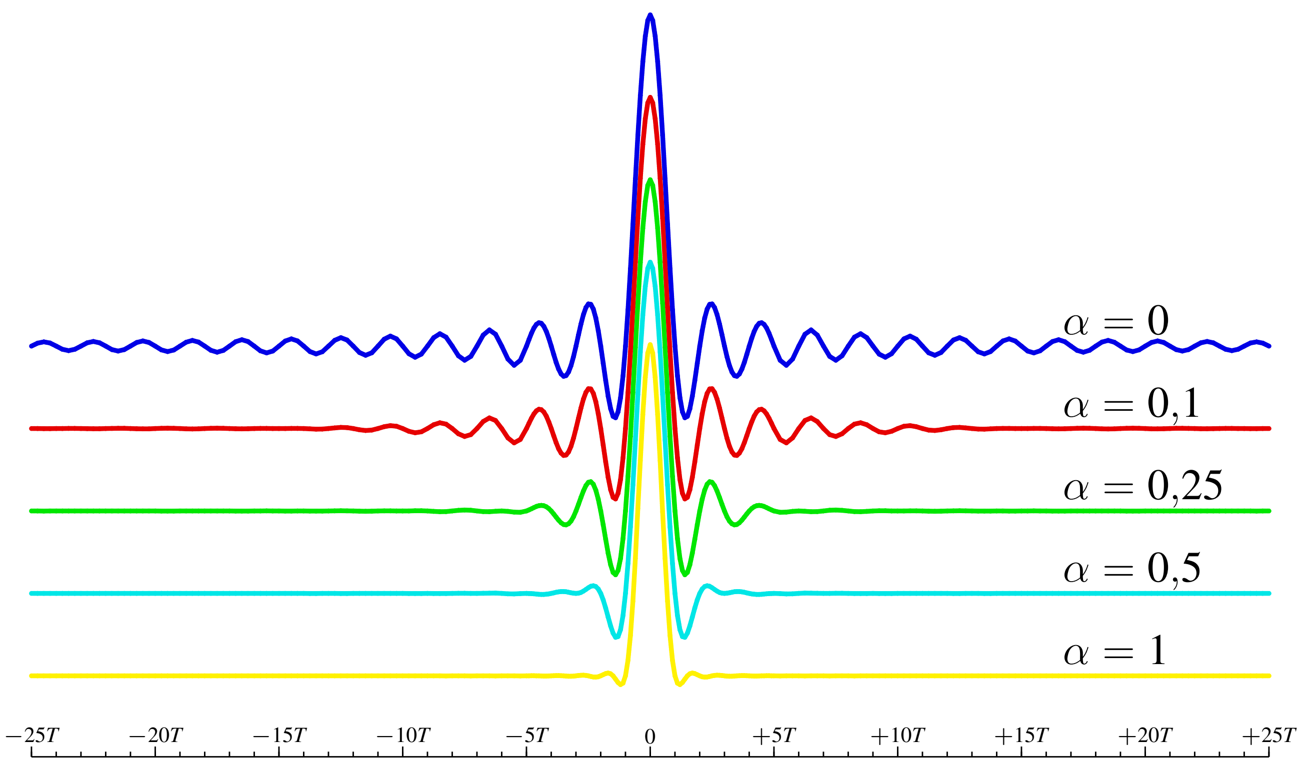
Pulsos en raíz cuadrada de coseno alzado $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$



Raíz de cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$

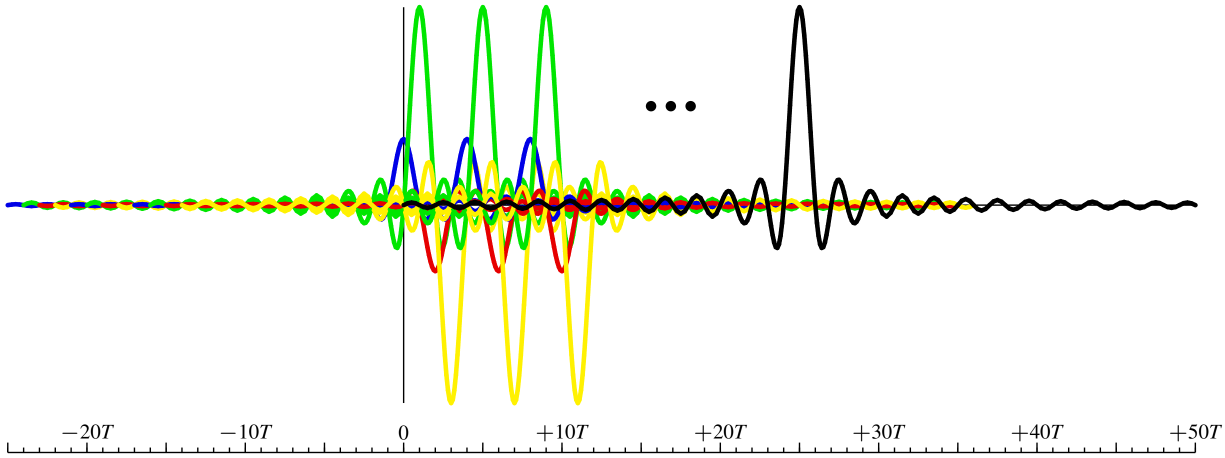


Cosenos alzados - caida de los lóbulos secundarios



Cosenos alzados - retardo de implementacion

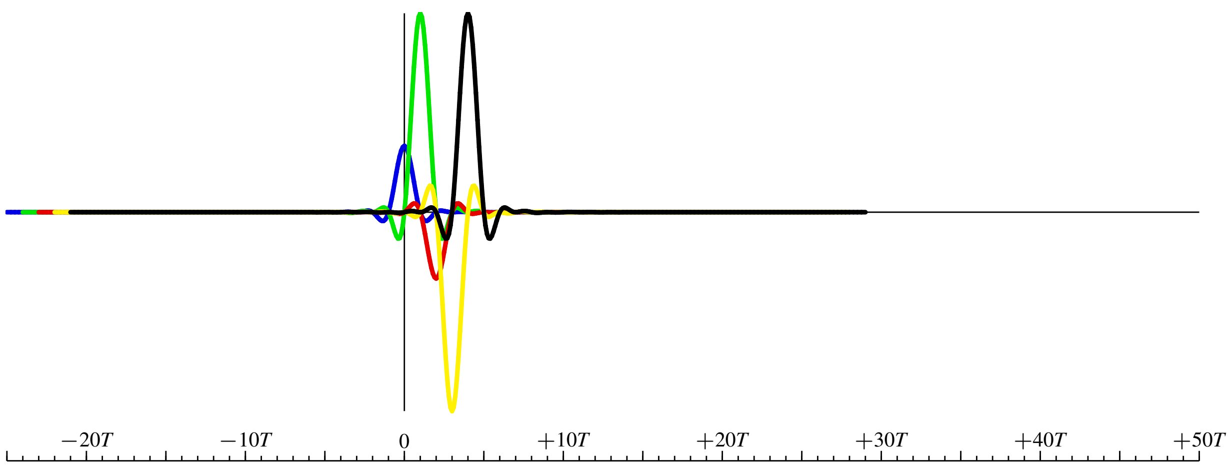
- Un coseno alzado tiene un número de lóbulos secundarios "*relevantes*" (depende de α)
  - Se pueden despreciar los lóbulos no relevantes para facilitar la implementación (truncar)
- La obtención de la forma de onda requiere un retardo (formas no causales)
  - El retardo está relacionado con el número de lóbulos que se han considerado relevantes
  - Menor retardo para valores más altos de α (mayor requerimiento de ancho de banda)
- Ejemplo: generación de una señal 4-PAM con $\alpha = 0$
  - En el ejemplo, 25 lóbulos se consideran relevantes (y 25 lóbulos se dibujan)
  - Se precisa un retardo de $25 \times T$ para computar la suma
  - La señal negra (debida a $A[25]$) es la última con contribución relevante en el primer intervalo de símbolo



Cosenos alzados - retardo de implementación (II)

- Retardos más bajos pueden obtenerse utilizando factores de caída más altos
  - El precio a pagar es un mayor ancho de banda
- Ejemplo: generation of a 4-PAM waveform with $\alpha = 0{,}5$
  - En el ejemplo, 4 lóbulos se consideran relevantes
  - Se precisa un retardo de $4 \times T$ para computar la suma
  - La señal negra (debida a $A[4]$) es la última con contribución relevante en el primer intervalo de símbolo
  - El retardo ha bajado de $25 \times T$ a $4 \times T$ en este ejemplo (más de 6 veces)
  - El ancho de banda de ha incrementado un 50 %

    NOTA: el número de lóbulos "*relevantes*" depende de la precisión requerida, esto es sólo un ejemplo (las cifras no deben tomarse como una referencia precisa)



Revisión: espectro de señales en tiempo continuos/discreto

- Señal continua $x(t)$ y discretizada $x[n]$ muestreando cada T seg.

$$x[n] = x(t)\big|_{t=nT} = x(nT)$$

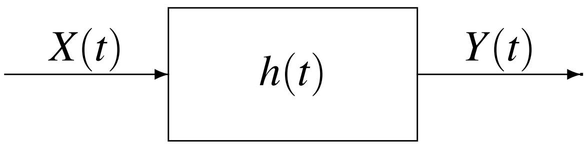
- Notación habitual
  - $X(j\omega)$: espectro (Transformada de Fourier) de $x(t)$
  - $X\left(e^{j\omega}\right)$: espectro de $x[n]$
- Relación entre ambas transformadas
  - Paso de tiempo continuo a tiempo discreto

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_k X\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

  - Paso de tiempo discreto a tiempo continuo

$$X(j\omega) = T\, X\left(e^{j\omega T}\right),\ |\omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

Revisión: procesos aleatorios y sistemas lineales



Teorema: $X(t)$ es estacionario, con media m_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. El proceso pasa por un sistema lineal e invariante con respuesta $h(t)$. Entonces, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios*, con

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

Además

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

Revisión: expresiones en el dominio frecuencial

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \, H(0)$$

- Densidad espectral del proceso de salida

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) \; |H(j\omega)|^2$$

- Dendidades espectrales cruzadas

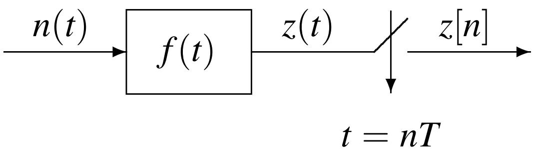
$$S_{XY}(j\omega) \stackrel{def}{=} \mathcal{TF}\left\{R_{XY}(\tau)\right\}$$

$$S_{XY}(j\omega) = S_X(j\omega) \; H^*(j\omega)$$

$$S_{YX}(j\omega) = S_{XY}^*(j\omega) = S_X(j\omega) \; H(j\omega)$$

Propiedades del ruido en el receptor

- Ruido $n(t)$ pasa por el filtro receptor $f(t)$



- Análisis en el dominio frecuencial
  - DEP del ruido filtrado $z(t)$

$$S_z(j\omega) = S_n(j\omega) \; |F^*(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \; |F(j\omega)|^2$$

    - ★ Ruido coloreado (respuesta DEP no constante)
  - DEP del ruido en tiempo discreto (muestreado) $z[n]$

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2} \; \frac{1}{T} \sum_k \underbrace{\left| F\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right)\right|^2}_{R_f\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right)}$$

    - ★ El ruido discreto puede ser blanco !!!!

Condición: $\frac{1}{T} \sum_k R_f\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right) = \text{constant}$

Condiciones para que el ruido $z[n]$ sea blanco

- El ruido en tiempo discreto $z[n]$ es blanco si

$$\frac{1}{T}\sum_k R_f\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) = C \text{ lo que equivale a } R_f(e^{j\omega}) = C$$

  - Condición equivalente en el dominio temporal

$$r_f[n] = r_f(t)\big|_{t=nT} = C\,\delta[n], \text{ lo que implica } C = r_f(0) = \mathcal{E}\{f(t)\}$$

- Condición para que $z[n]$ sea blanco
  - $z[n]$ es blanco si la función de ambigüedad temporal del filtro receptor $r_f(t)$ (o $R_f(j\omega)$) satisface las mismas condiciones que $p(t)$ debe satisfacer para eliminar la ISI (criterio de Nyquist)
- NOTA:
  - La condición para que $z[n]$ sea blanco depende únicamente del filtro receptor $f(t)$!!!
- Densidad espectral de potencia de $z[n]$ cuando es blanco

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2}\times\mathcal{E}\{f(t)\} \rightarrow \text{si } f(t) \text{ es normalizado } S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2}$$

Potencia de ruido y relación señal a ruido (SNR)

- Si se cumple el criterio de Nyquist para la ISI (ISI=0)

$$q[n] = A[n] + z[n]$$

- En este caso, la relación señal a ruido en $q[n]$ es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{E\left[|A[n]|^2\right]}{E\left[|z[n]|^2\right]} = \frac{E_s}{\sigma_z^2}$$

- σ_z^2 es la potencia (varianza) de la secuencia de ruido $z[n]$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega})\,d\omega$$

  - Si el ruido $z[n]$ es blanco, con DEP $S_z(e^{j\omega}) = N_0/2$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{N_0}{2}\times\mathcal{E}\{f(t)\}\,d\omega = \frac{N_0}{2}\times\mathcal{E}\{f(t)\} = \frac{N_0}{2}\times r_f(0)$$

    - ★ Para un filtro receptor normalizado: $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2}$

Consecuencias del criterio de Nyquist para canales gausianos

- Se asume que se usa un filtro adaptado en el receptor

  $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$ ya que $g(t)$ es una función real

- Condición para evitar la ISI
  - Respuesta conjuta $p(t) = g(t) * f(t)$ cumple el criterio de Nyquist
    - ★ Utilizando filtros adaptados $p(t) = r_g(t)$
- Condición para que el ruido $z[n]$ sea blanco
  - Función de ambigüedad temporal del filtro receptor, $r_f(t)$, cumple las condiciones del criterio de Nyquist
    - ★ Utilizando filtros adaptados $r_f(t) = r_g(t) = p(t)$
- Conclusión: ambas condiciones son equivalentes
  - Transmitiendo sobre un canal gausiano utilizando filtros adaptados, si se evita la ISI el ruido muestreado $z[n]$ es blanco

Eliminación de ISI en un canal lineal con filtros adaptados

- La respuesta $p[n]$ (o $P(j\omega)$) debe cumplir el criterio de Nyquist
  - La definición de $p(t)$ incluye ahora el efecto del canal lineal $h(t)$
- Diseño de $p(t)|P(j\omega)$ cumplir Nyquist a tiempo de símbolo T
- Diseño utilizando filtros adaptados
  Respuesta del filtro transmisor en el dominio frecuencial
  - $P(j\omega) = H(j\omega)\ |G(j\omega)|^2$
  - Por tanto

$$G(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{P(j\omega)}{H(j\omega)}}, & \text{if } H(j\omega) \neq 0 \\ 0, & \text{in other case} \end{cases}$$

  Si el filtro receptor está adaptado al transmisor, esta elección para el filtro transmisor elimina la ISI
  - $P(j\omega)$ es una opción de diseño
    - ★ Habitualmente, se selecciona un coseno alzado

$$P(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$$

Inconvenientes de esta opción de diseño

- La respuesta del canal, $H(j\omega)$, debe ser conocida
  - Puede ser difícil conocerla
  - El canal puede ser variante en la práctica
- La secuencia de ruido en tiempo discreto, $z[n]$, no es blanca

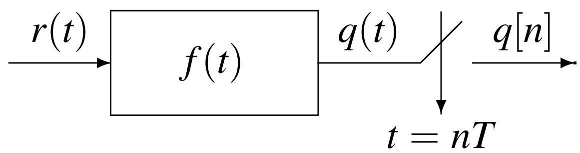
$$S_z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{T}\sum_k \underbrace{\left|F\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}k\right)\right|^2}_{\left|G\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}k\right)\right|^2} = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{T}\sum_k \left|\frac{P\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}k\right)}{H\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}k\right)}\right|$$

NOTA: Para filtros adaptados $F(j\omega) = G^*(j\omega)$, lo que significa $|F(j\omega)| = |G(j\omega)|$

  - Detector símbolo a símbolo sin memoria no es óptimo
  - Toda la secuencia $q[n]$ debe ser utilizada para estimar el símbolo en un instante discreto determinado n_0, $A[n_0]$
  - El ruido puede ser amplificado
    - ⋆ Canales con una atenuación severa en alguna(s) frecuencia(s) de la banda
  - Conclusión:
    - ⋆ Usando filtros adaptados, en general no es posible evitar la ISI y al mismo tiempo tener ruido blanco

Utilizando un filtro receptor genérico

- Receptor genérico, no necesariamente un filtro adaptado



- Definición de la respuesta conjunta $p(t)$

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t),\ \ P(j\omega) = G(j\omega)\ H(j\omega)\ F(j\omega)$$

- Canal discreto equivalente a tasa de símbolo$p[n]$

$$p[n] = p(nT) = \left(g(t) * h(t) * f(t)\right)\Big|_{t=nT}$$

- Ruido filtrado

$$z(t) = n(t) * f(t),\ \ z[n] = z(nT)$$

  - Densidad espectral de potencia del ruido discreto $z[n]$

$$S_z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{N_0}{2} \times \frac{1}{T}\sum_k \left|F\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}k\right)\right|^2$$

Criterios para el diseño de $f(t)$

- Eliminación de ISI + ruido blanco (precodificación)
  - Selección de $P(j\omega)$ cumpliendo Nyquist
  - Selección de $F(j\omega)$ con $R_f(j\omega) = |F(j\omega)|^2$ cumpliendo Nyquist
  - Entonces, el filtro transmisor viene dado por

$$G(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{H(j\omega)\ F(j\omega)}$$

    - ⋆ Con frecuencia presenta problemas de implementación

- Filtro adaptado a la respuesta conjunta transmisor-canal

$$f(t) = g_h(-t),\ \text{con } g_h(t) = g(t) * h(t)$$

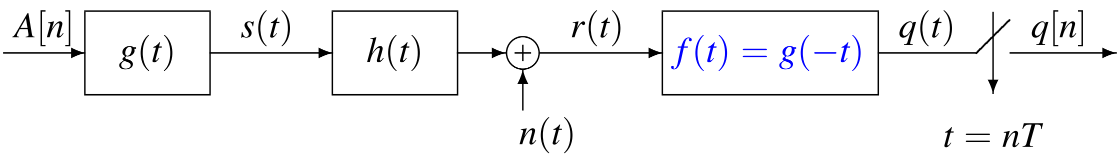
  - Maximiza la relación señal a ruido
  - No elimina la ISI y el ruido $z[n]$ no es blanco

- Minización del error cuadrático medio: maximizar

$$\frac{E\left[|A[n]\ p[0]|^2\right]}{E\left[\left|\sum_{\substack{k\\k\neq n}} A[k]\ p[n-k] + z[n]\right|^2\right]}$$

Configuración habitual para canales lineales

- Receptor es un filtro adaptado al transmisor $f(t) = g(-t)$ con $r_f(t) = r_g(t)$ cumpliendo Nyquist



  - Opción habitual: filtros en raíz de coseno alzado

$$g(t) = h_{RRC}^{\alpha,T}(t) \quad \rightarrow \quad f(t) = h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$$

$$g(t) * f(t) = r_g(t) = r_f(t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t)$$

- Consecuencias:
  - Esto asegura que el ruido en tiempo discreto $z[n]$ es blanco
  - Existe ISI en el sistema (respuesta conjunta $p(t)$ no cumple Nyquist)
    - ⋆ Los receptores puede diseñarse específicamente para tratar con la ISI (como se verá en el Capítulo 4)

Revisión - Cálculo de la probabilidad de error de símbolo (P_e)

- Definición
$$P_e = P(\hat{A}[n] \neq A[n])$$
- Cálculo - Promedio de las probabilidades de error condicionales para cada símbolo
$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i)\; P_{e|a_i}$$
- Calculo de las probabilidades de error condicionales
$$P_{e|\boldsymbol{a}_i} = \int_{q \notin I_i} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|a_i)\; dq$$

Se integra la distribución condicional de la observación para el símbolo $\boldsymbol{a}_i$ fuera de la región de decisión del símbolo, I_i

Revisión - Cálculo de la probabilidad de error de bit (BER)

- BER: *Bit Error Rate*
- Se promedia la BER condicional para $\boldsymbol{a}_i$
$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i)\; BER_{a_i}$$
- Cálculo de las BER condicionales
$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{M-1} P_{e|a_i \to a_j}\; \frac{m_{e|a_i\to a_j}}{m}$$
  - $P_{e|a_i\to a_j}$: probabilidad de transmitiendo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i$, decidir $\hat{A} = \boldsymbol{a}_j$
$$P_{e|a_i\to a_j} = \int_{\boldsymbol{q}_0 \in I_j} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{a}_i)\; d\boldsymbol{q}_0$$
  - $m_{e|a_i\to a_j}$: número de errores de bit que conlleva esa decisión
  - m: número de bits por símbolo de la constelación

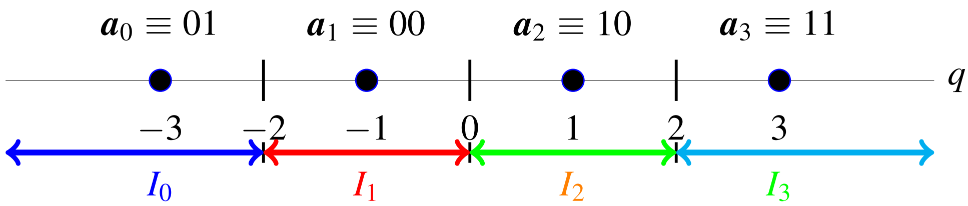
Ejemplo - Espacio 1-D M-ário

- Ejemplo:
  - $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(\boldsymbol{a}_i) = \frac{1}{4}$
  - Constelación: $\boldsymbol{a}_0 = -3,\ \boldsymbol{a}_1 = -1,\ \boldsymbol{a}_2 = +1,\ \boldsymbol{a}_3 = +3$
  - Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2,\ q_{u2} = 0,\ q_{u3} = +2$

$$I_0 = (-\infty, -2],\ I_1 = (-2, 0],\ I_2 = (0, +2],\ I_3 = (+2, +\infty)$$

  - Asignación binaria

$$\boldsymbol{a}_0 \equiv 01,\ \boldsymbol{a}_1 \equiv 00,\ \boldsymbol{a}_2 \equiv 10,\ \boldsymbol{a}_3 \equiv 11$$



- Sin ISI ($p[n] = \delta[n]$), $z[n]$ blanco y gausiano con $\sigma_z^2 = N_0/2$

$$q[n] = A[n] + z[n]$$

Caso estudiado en "Teoría de la Comunicación"

Ejemplo - Espacio 1-D M-ário (II)

- Probabilidad de error de símbolo

$$P_e = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} P_{e|\boldsymbol{a}_i} = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

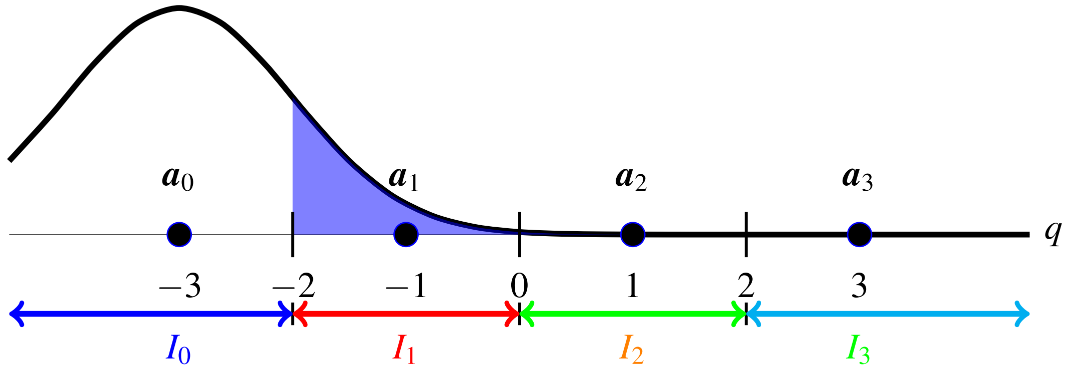
- Probabilidad de error de bit (BER)

$$BER = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} BER_{\boldsymbol{a}_i}$$

$$= \frac{3}{4} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4} Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$

- Cálculos detallados a continuación

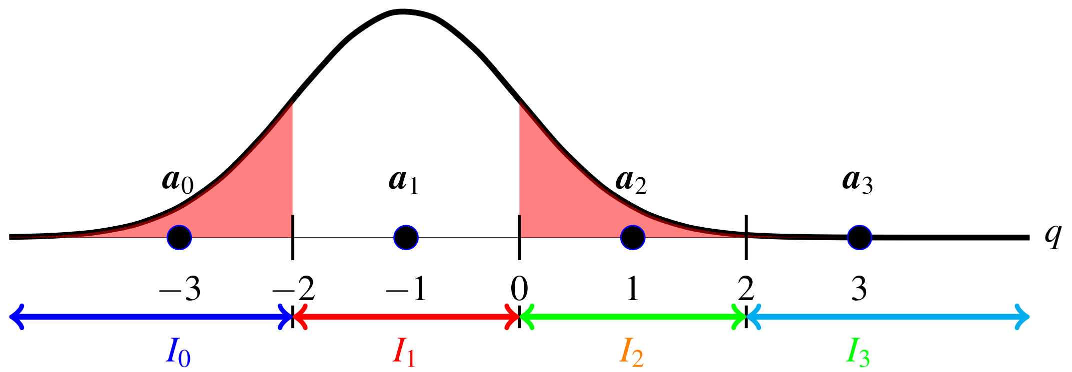
Cálculo $P_{e|\boldsymbol{a}_0}$



- Distribución $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_0)$
  - Gausiana de media $\boldsymbol{a}_0 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
  - Integrar $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_0)$ fuera de I_0

$$P_{e|\boldsymbol{a}_0} = \int_{q \notin I_0} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|a_0)\, dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

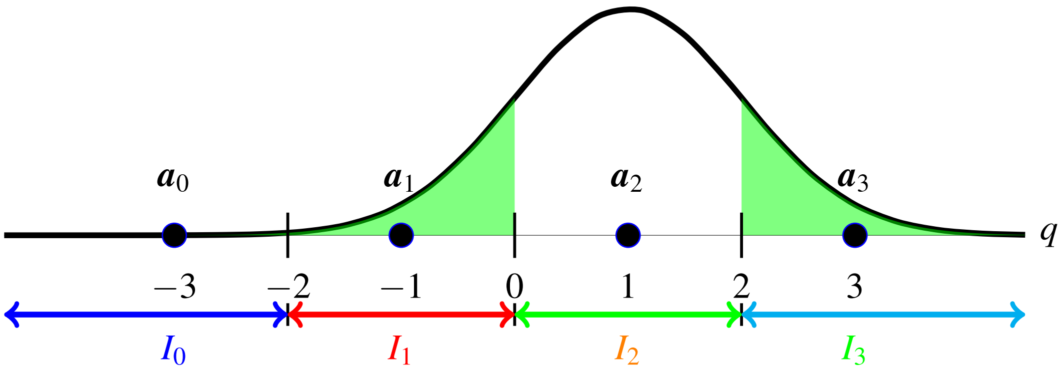
Cálculo $P_{e|\boldsymbol{a}_1}$



- Distribución $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_1)$
  - Gausiana de media $\boldsymbol{a}_1 = -1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
  - Integrar $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_1)$ fuera de I_1

$$P_{e|\boldsymbol{a}_1} = \int_{q \notin I_1} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|a_1)\, dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

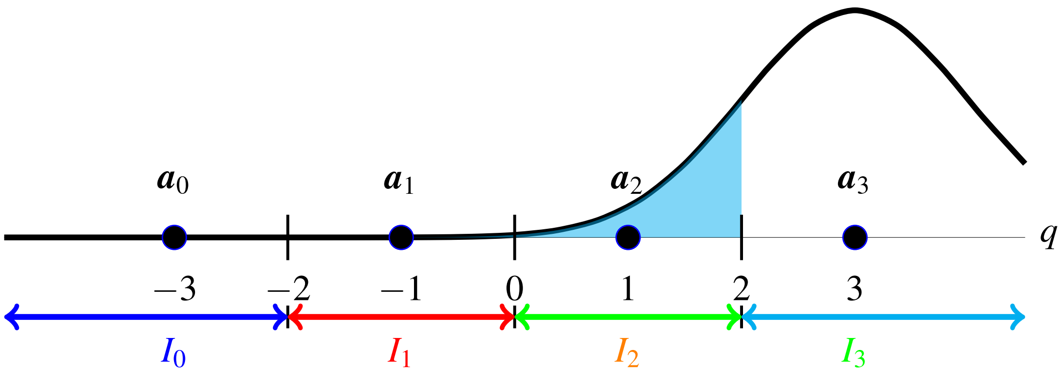
Cálculo $P_{e|\boldsymbol{a}_2}$



- Distribución $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_2)$
  - Gausiana de media $\boldsymbol{a}_2 = +1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
  - Integrar $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_2)$ fuera de I_2

$$P_{e|\boldsymbol{a}_2} = \int_{q \notin I_2} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|a_2)\, dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

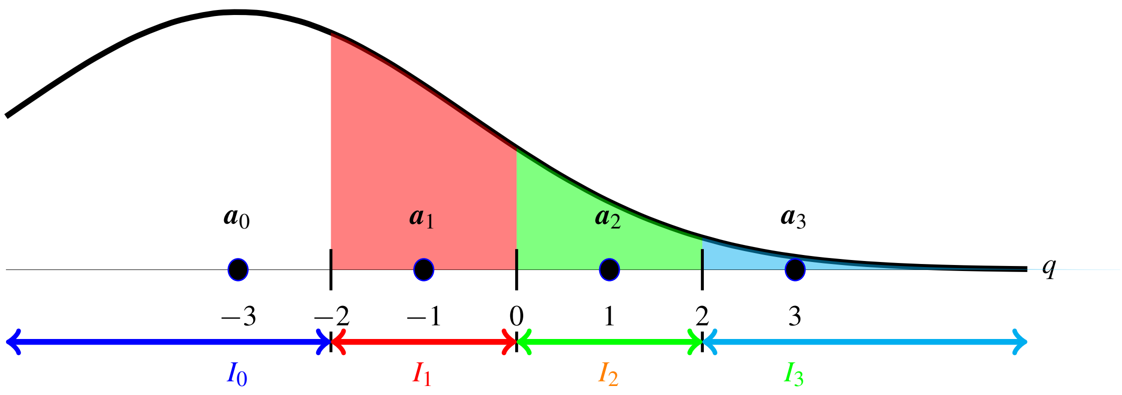
Cálculo $P_{e|\boldsymbol{a}_3}$



- Distribución $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_3)$
  - Gausiana de media $\boldsymbol{a}_3 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error condicional
  - Integrar $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_3)$ fuera de I_3

$$P_{e|\boldsymbol{a}_3} = \int_{q \notin I_3} f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|a_3)\, dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cálculo de BER_{a_0}

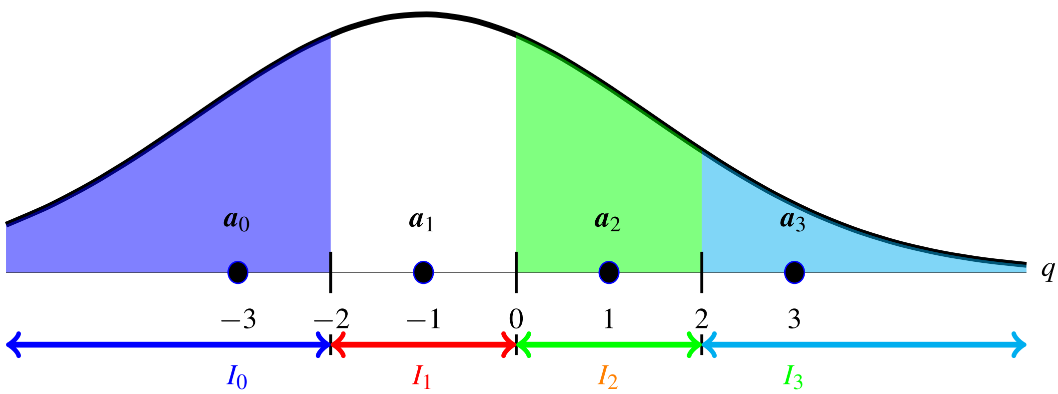


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01,\ a_1 \equiv 00,\ a_2 \equiv 10,\ a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$: gaussiana de media a_0 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_0} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_0\to a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0\to a_1}}{m}}$$

$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_0\to a_2}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_0\to a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_0\to a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0\to a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_1}

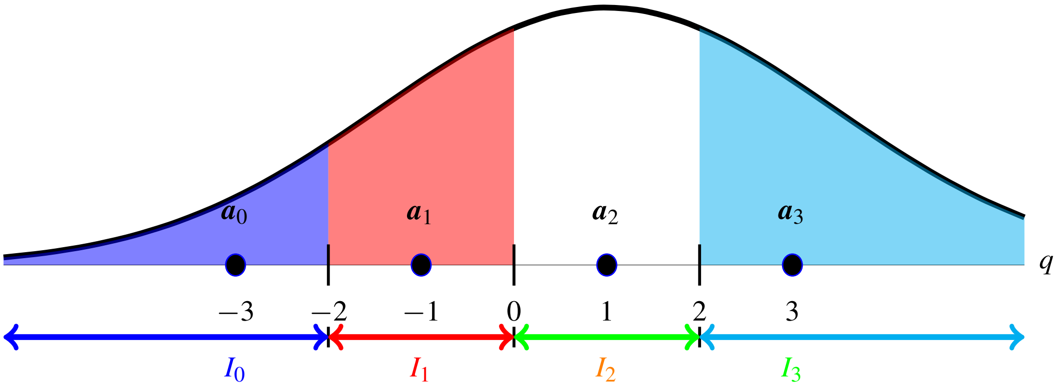


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01,\ a_1 \equiv 00,\ a_2 \equiv 10,\ a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$: gaussiana de media a_1 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_1} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_1\to a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1\to a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_1\to a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1\to a_2}}{m}}$$

$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_1\to a_3}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_1\to a_3}}{m}}$$

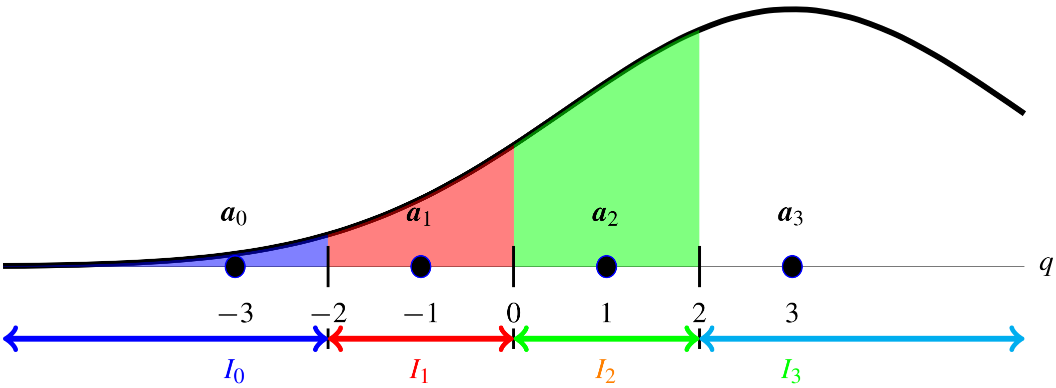
Cálculo de BER_{a_2}



- Asignación binaria: $\boldsymbol{a}_0 \equiv 01,\ \boldsymbol{a}_1 \equiv 00,\ \boldsymbol{a}_2 \equiv 10,\ \boldsymbol{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_2)$: gaussiana de media $\boldsymbol{a}_2$ y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_2} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_2 \to a_0}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \to a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_2 \to a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \to a_1}}{m}}$$
$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_2 \to a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \to a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_3}

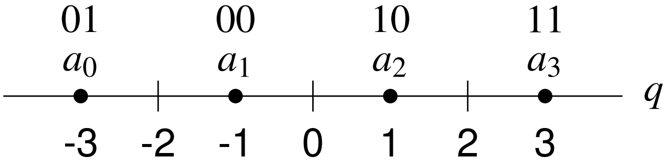


- Asignación binaria: $\boldsymbol{a}_0 \equiv 01,\ \boldsymbol{a}_1 \equiv 00,\ \boldsymbol{a}_2 \equiv 10,\ \boldsymbol{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_3)$: gaussiana de media $\boldsymbol{a}_3$ y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_3} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_3 \to a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \to a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_3 \to a_1}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \to a_1}}{m}}$$
$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]}_{P_{e|a_3 \to a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \to a_2}}{m}}$$

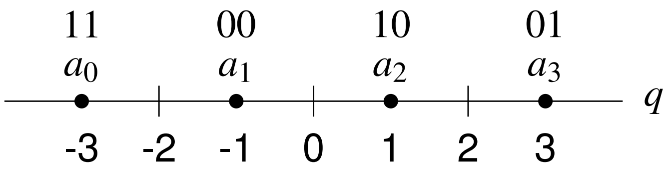
Cambio en la asignación binaria

- Resultado final para constelación anterior



$$BER = \frac{3}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$

- Si se cambia la asignación binaria

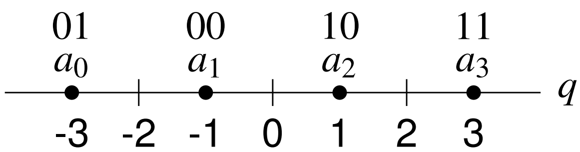


  - No varían los términos $P_{e|a_i \to a_j}$
  - Sí varían los términos $m_{e|a_i \to a_j}$ $\Rightarrow$ Varía la BER !!!

$$BER = \frac{5}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$

Codificación de Gray

- Los bloques de m bits asignados a símbolos que están a mínima distancia difieren sólo en 1 bit



  - Este tipo de asignación minimiza la BER
- Terminos $P_{e|\boldsymbol{a}_i \to \boldsymbol{a}_j}$ dependen de la constelación
  - Valores dependen de las distancias entre $\boldsymbol{a}_i$ y $\boldsymbol{a}_j$
  - Valores más altos para símbolos a mínima distancia
- Terminos $\frac{m_{e|\boldsymbol{a}_i \to \boldsymbol{a}_j}}{m}$ dependen de la asignación binaria
  - Estos términos ponderan la contribución de $P_{e|\boldsymbol{a}_i \to \boldsymbol{a}_j}$
    - ★ Gray: minimiza el impacto de los valores más altos de $P_{e|\boldsymbol{a}_i \to \boldsymbol{a}_j}$
    - ★ Para valores altos de relación señal a ruido (SNR), en la mayor parte de los casos, un error de símbolo produce un único error de bit

$$BER \approx \frac{1}{m} \cdot P_e$$

Probabilidad de error sin y con ISI

- Ejemplo: modulación 2-PAM: $A[n] \in \{\pm 1\}$ at $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
- Receptor: raíz de coseno alzado normalizado con factor de caída α

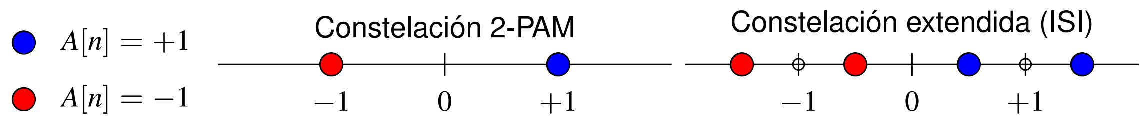
$$f(t) = h_{RRC}^{\alpha,T}(t) \rightarrow r_f(t) = f(t) * f(-t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t)$$

$$z[n] \text{ es blanco con } \sigma_z^2 = \frac{N_0}{2}$$

- Canal discreto equivalente: $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$
- ISI produce una constelación extendida en el receptor

$$o[n] = A[n] * p[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$

$A[n]$	$A[n-1]$	$o[n]$
$+1$	$+1$	$+\frac{3}{2}$
$+1$	-1	$+\frac{1}{2}$
-1	$+1$	$-\frac{1}{2}$
-1	-1	$-\frac{3}{2}$

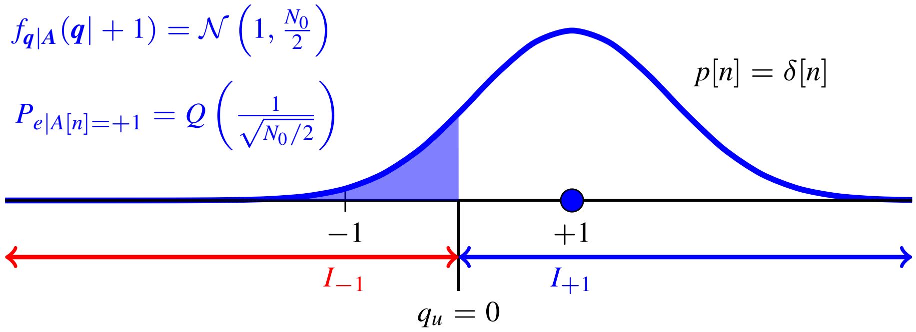


Probabilidad de error sin y con (II)

Probabilidad de error condicional para $A[n] = +1$, i.e., $P_{e|A[n]=+1}$

$$f_{q|A}(q|+1) = \mathcal{N}\left(1, \frac{N_0}{2}\right)$$

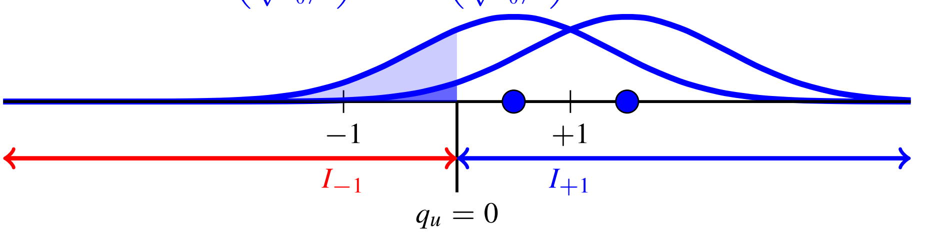
$$P_{e|A[n]=+1} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$



$$f_{q|A}(q|+1) = \frac{1}{2}\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{N_0}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{N}\left(\frac{3}{2}, \frac{N_0}{2}\right)$$

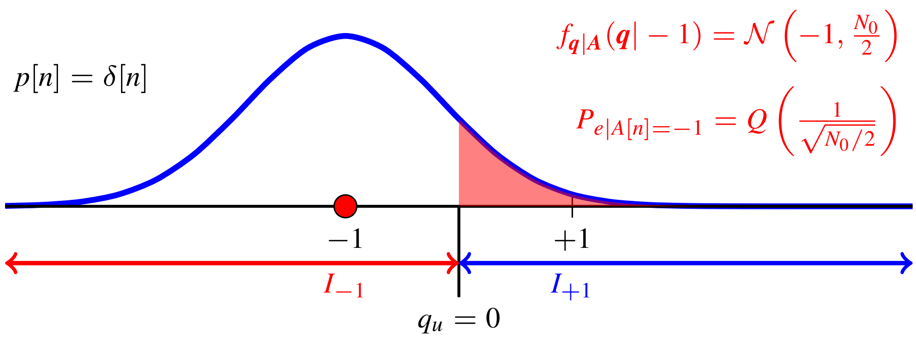
$$P_{e|A[n]=+1} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

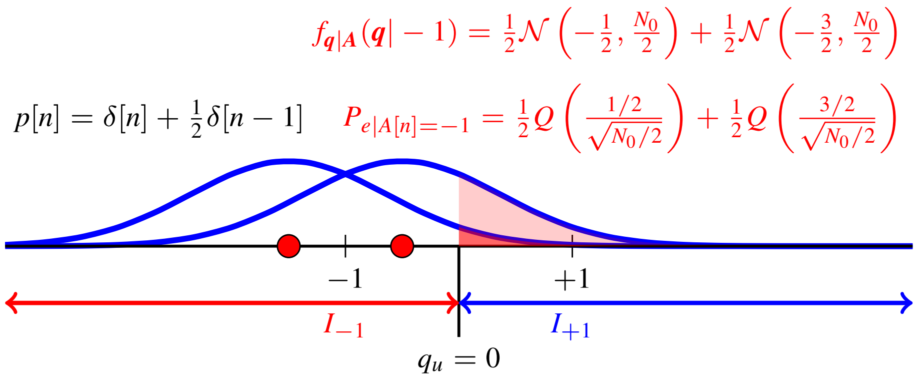
$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$



Probabilidad de error sin y con ISI (III)

Probabilidad de error condicional para $A[n] = -1$, i.e., $P_{e|A[n]=-1}$





Probabilidad de error sin y con ISI (IV)

- Probabilidad de error sin ISI

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|A[n]=+1} + \frac{1}{2}P_{e|A[n]=-1} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error con ISI

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|A[n]=+1}+\frac{1}{2}P_{e|A[n]=-1} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{3/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Diagrama de ojo

- Herramienta de monitorización de sistemas digitales
  - Superposición de fragmentos de la señal en torno a instantes de muestreo
  - Duración de cada fragmento: $2T$
  - Obtenida utilizando un osciloscopio
    - Trigger: governado por señal de muestreo
    - Base de tiempos: para cubrir $2T$
- Principales características
  - El centro y los dos laterales (horizontalmente) coinciden con instantes de muestreo
    - Las trazas deberían pasar por los símbolos en los instantes de muestreo
  - Diversidad de formas de transición entre instantes de muestreo dependen de la forma del filtro transmisor
- Permite detectar múltiples problemas:
  - Problemas/sensitivilidad en el sincronismo
  - Nivel de ruido
  - Presencia (y nivel) de ISI

Diagrama de Ojo - $\alpha = 0$

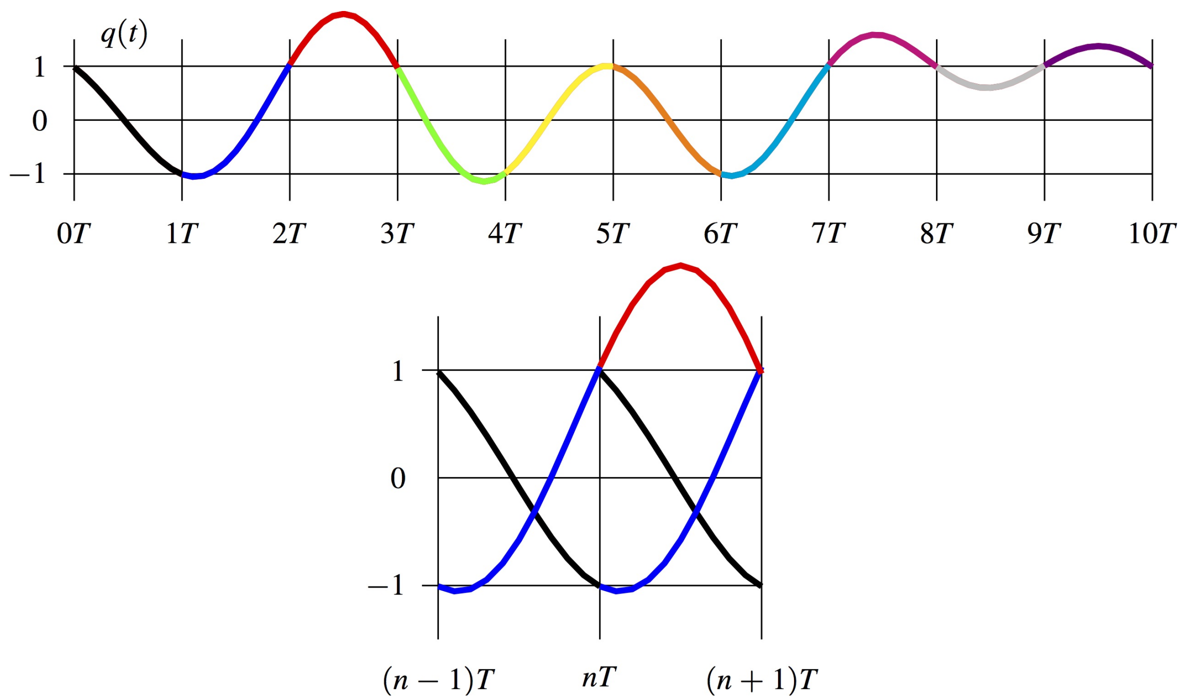


Diagrama de Ojo - $\alpha = 0$

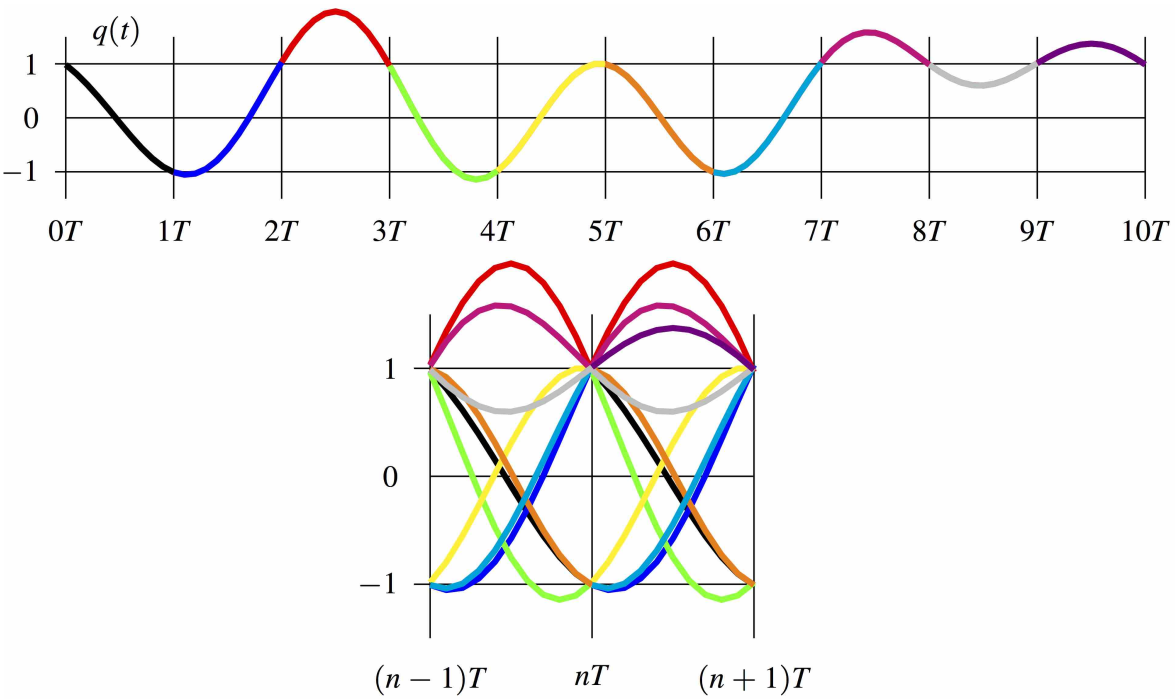
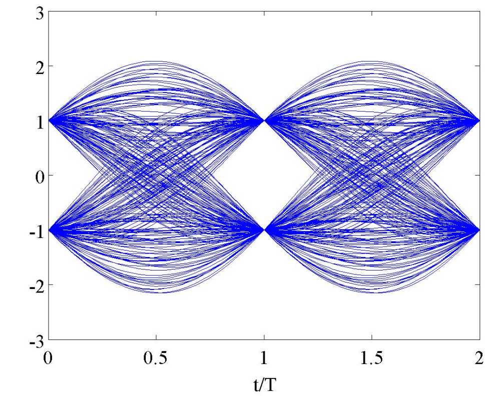
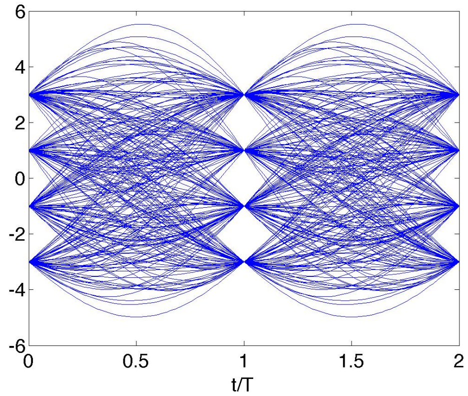


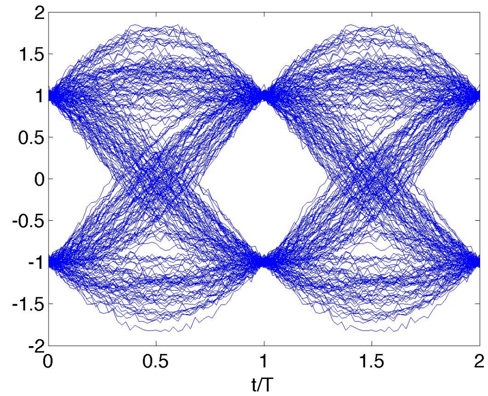
Diagrama de ojo - Ejemplos



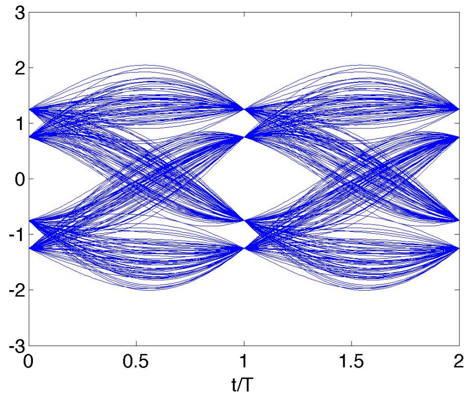
2-PAM $\alpha = 0$



4-PAM $\alpha = 0$



2-PAM $\alpha = 0$ Ruidoso



2-PAM $\alpha = 0$, ISI

Diagrama de Ojo - $\alpha = 1$

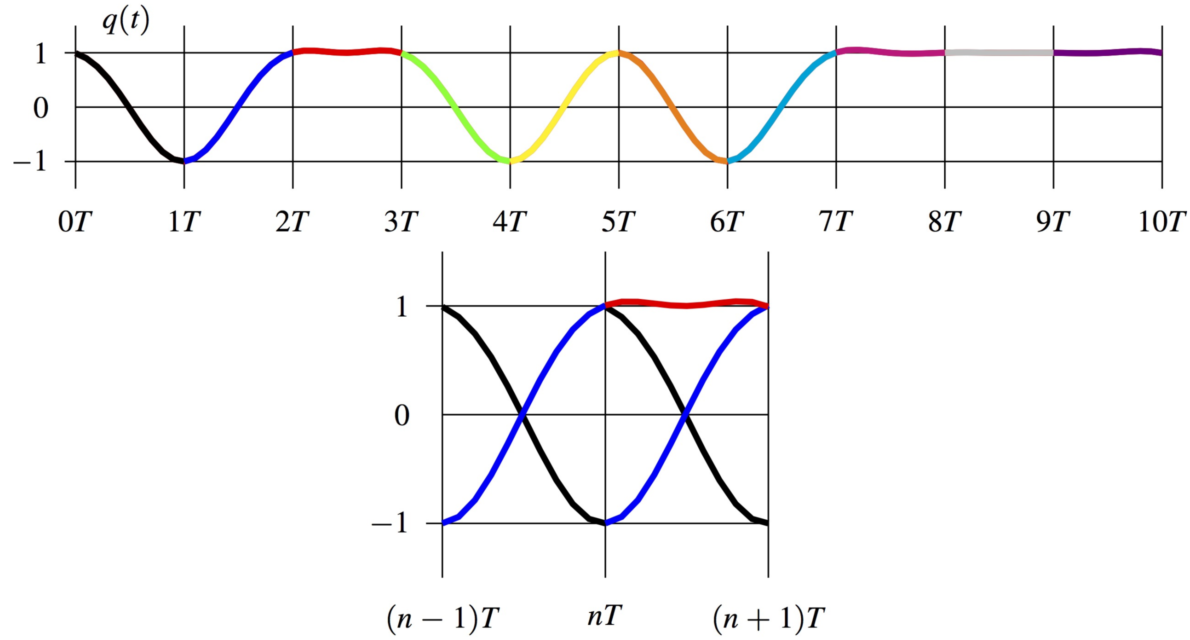


Diagrama de Ojo - $\alpha = 1$

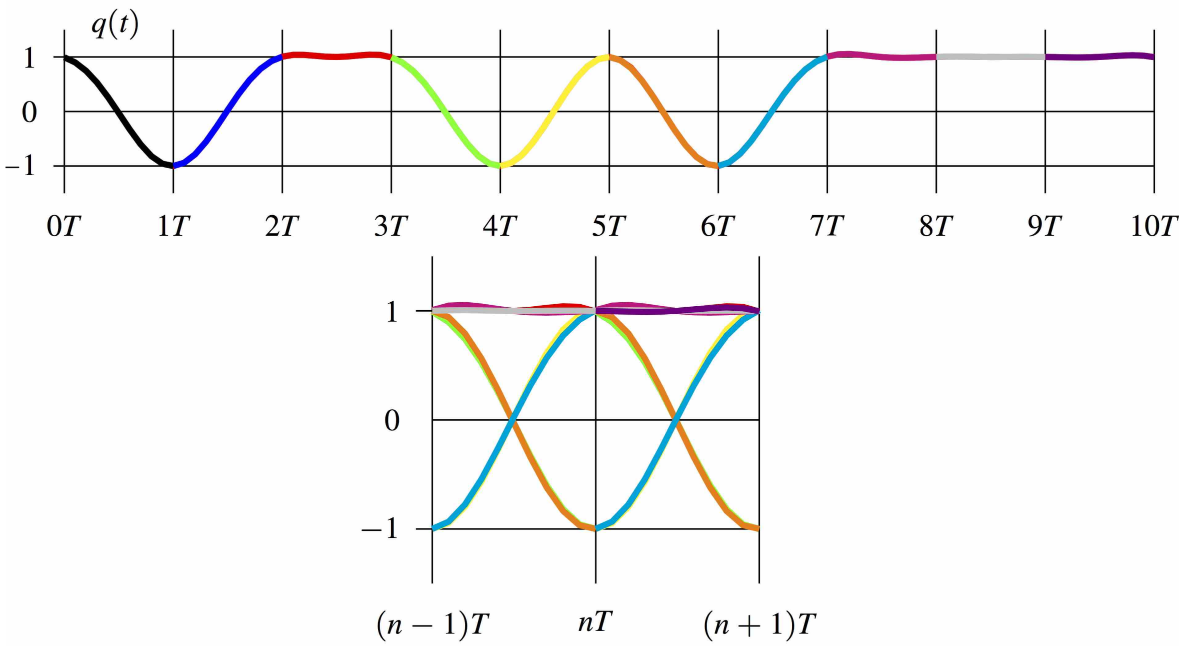
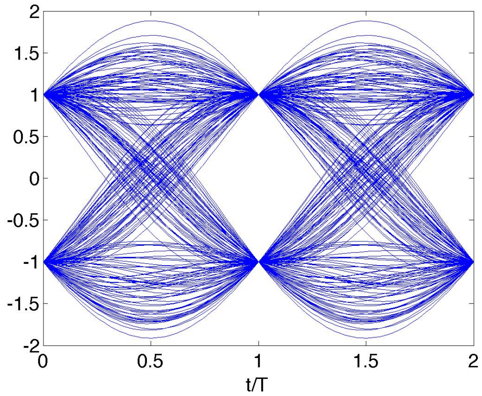
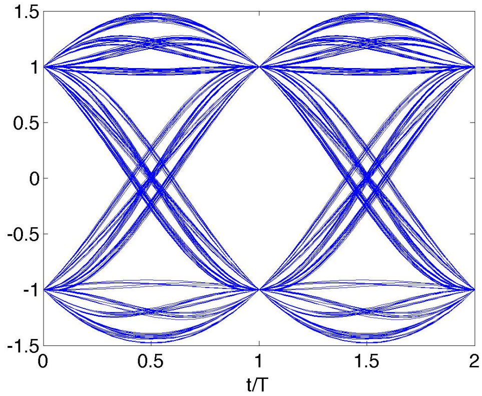


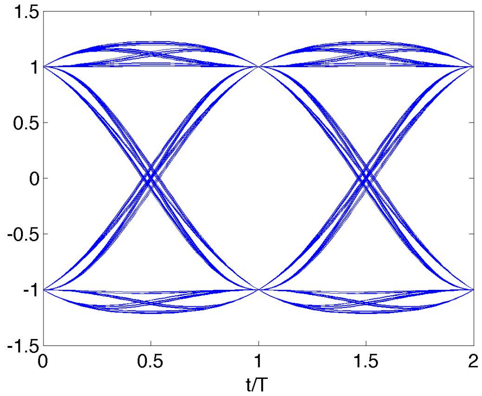
Diagrama de ojo - Ejemplos (II)



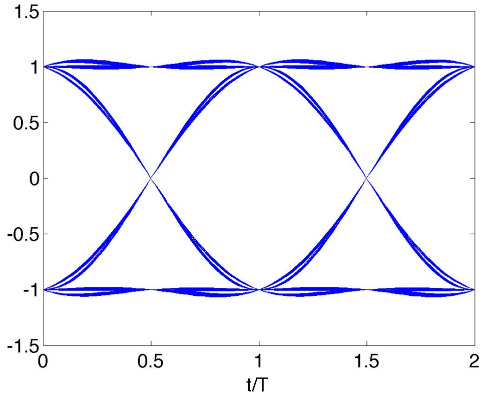
2-PAM $\alpha = 0{,}25$



2-PAM $\alpha = 0{,}5$

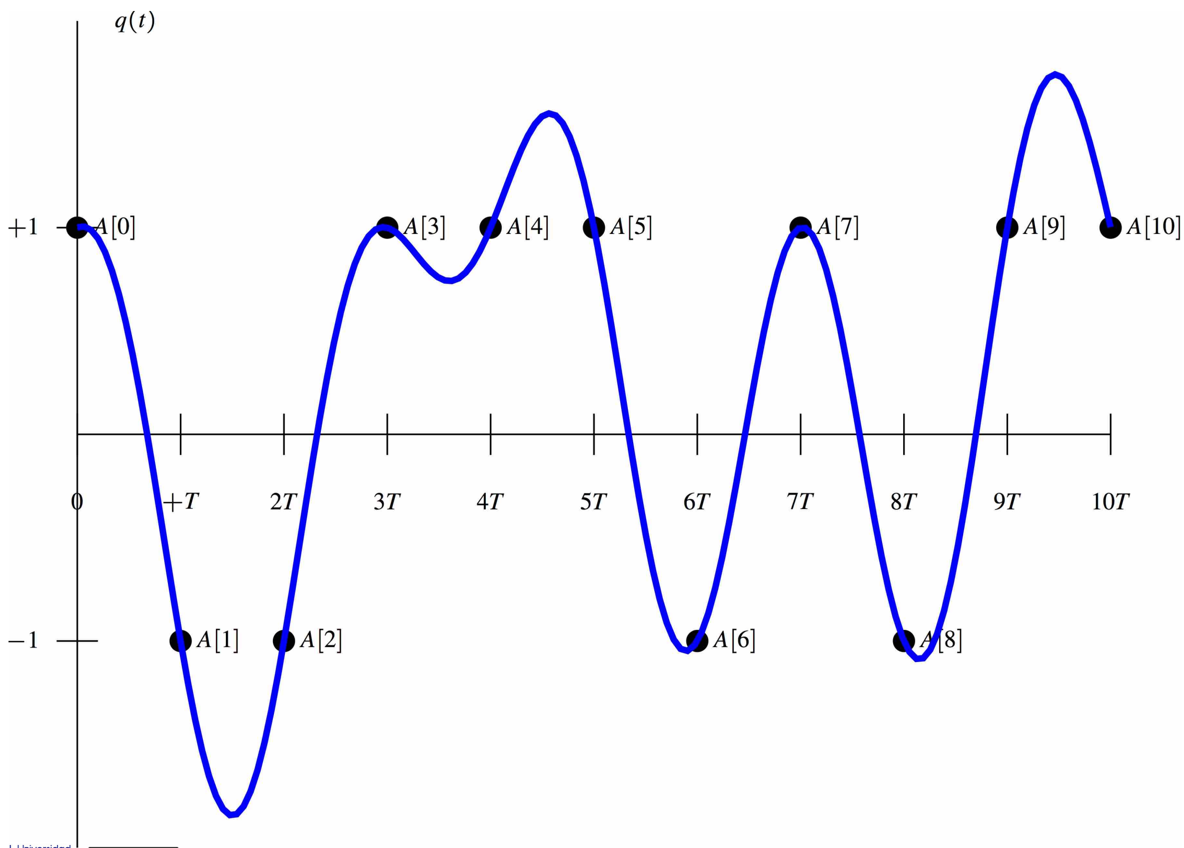


2-PAM $\alpha = 0{,}75$

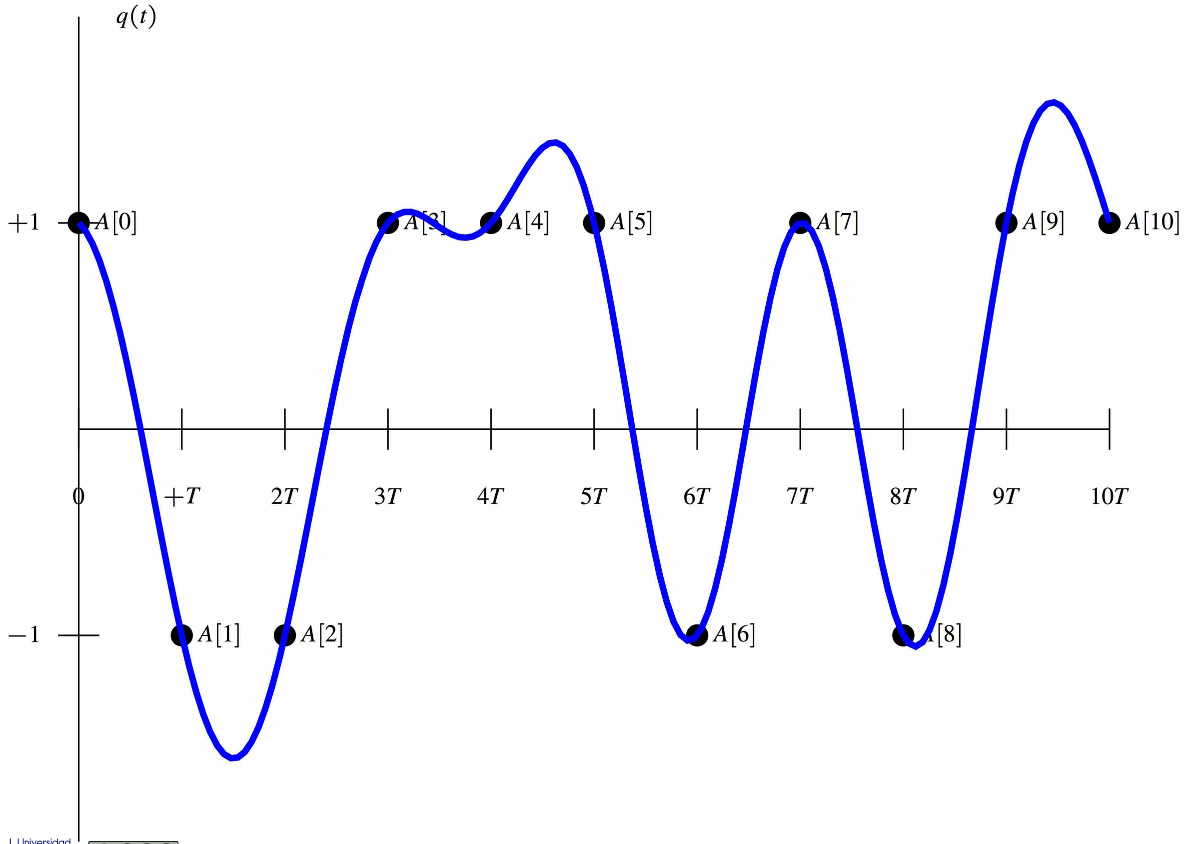


2-PAM $\alpha = 1$

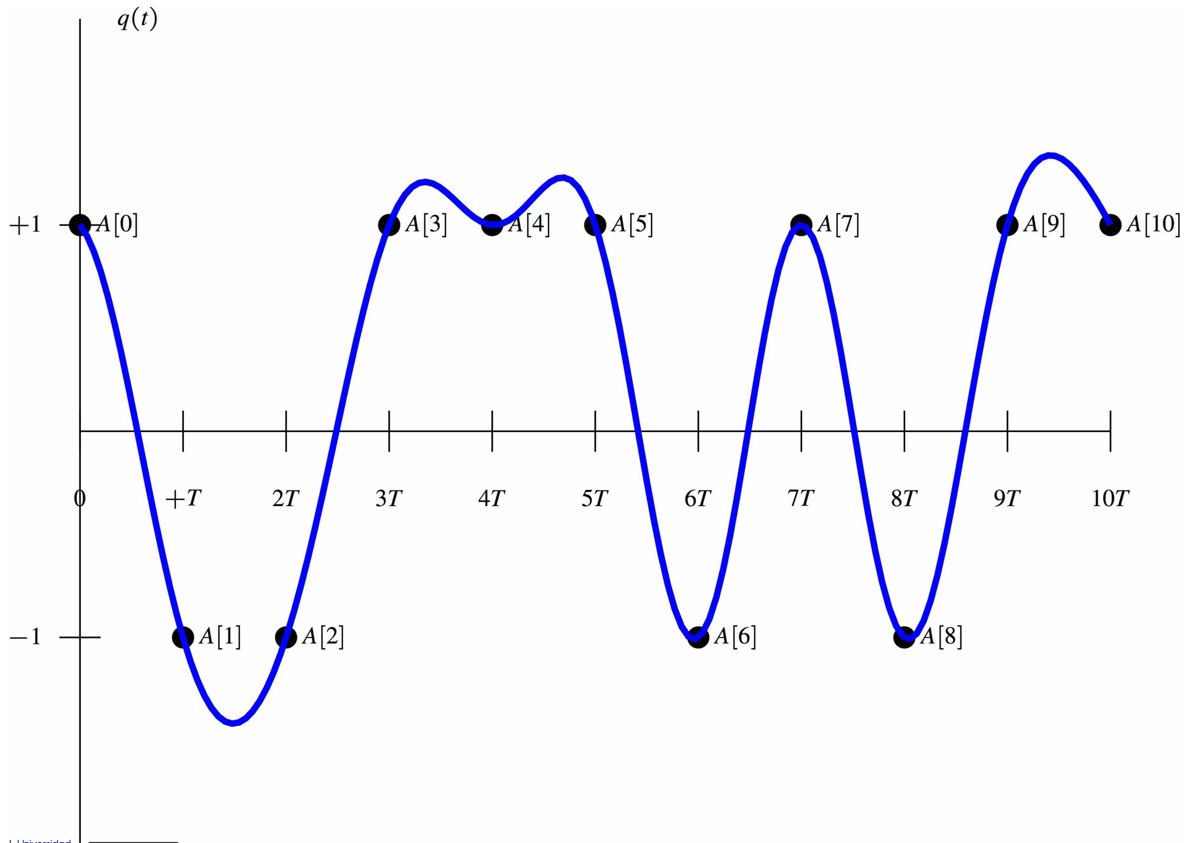
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0$



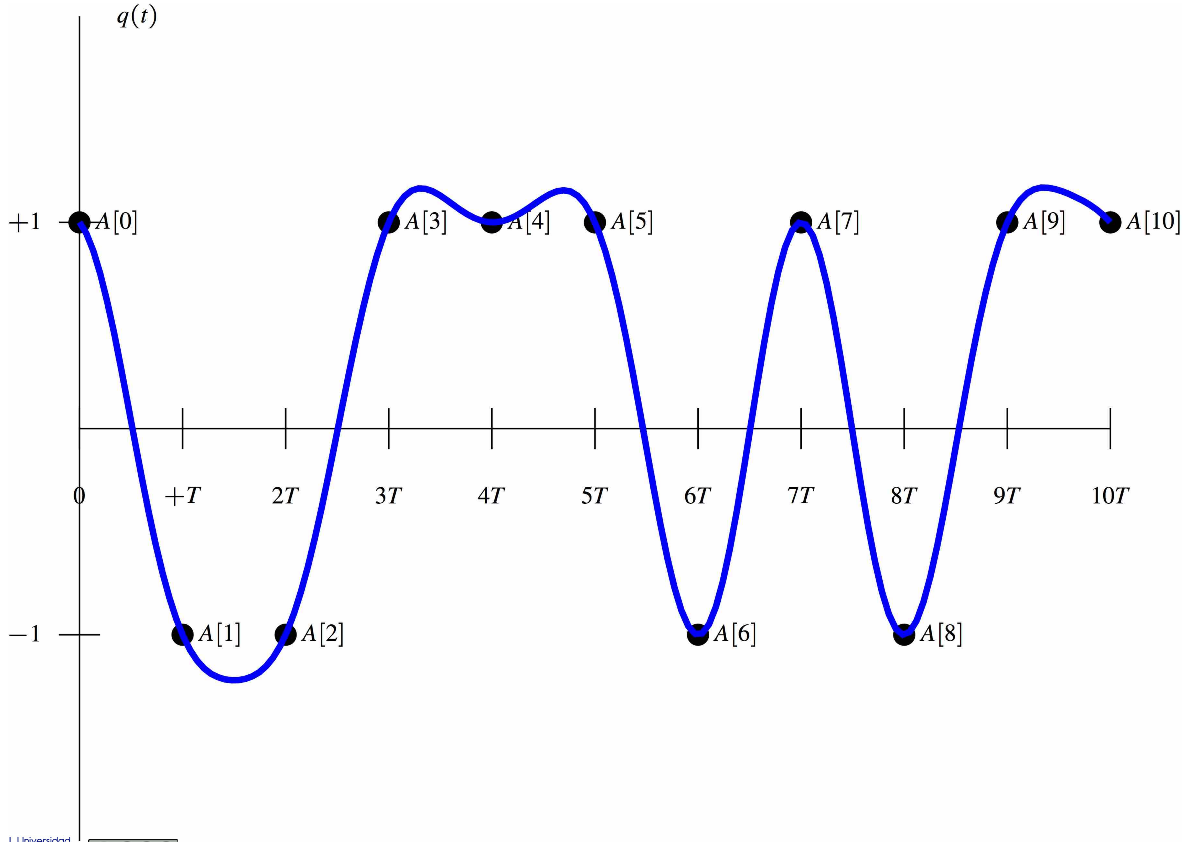
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0{,}25$



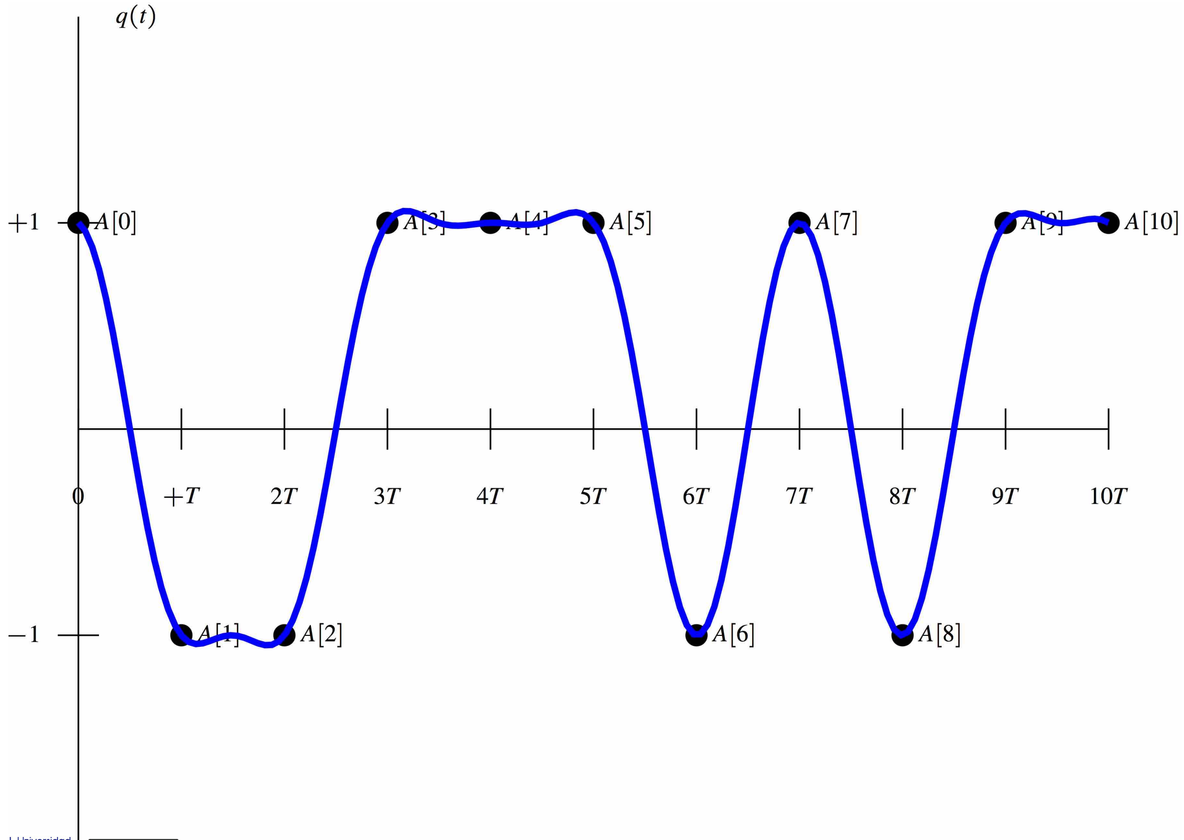
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0{,}5$



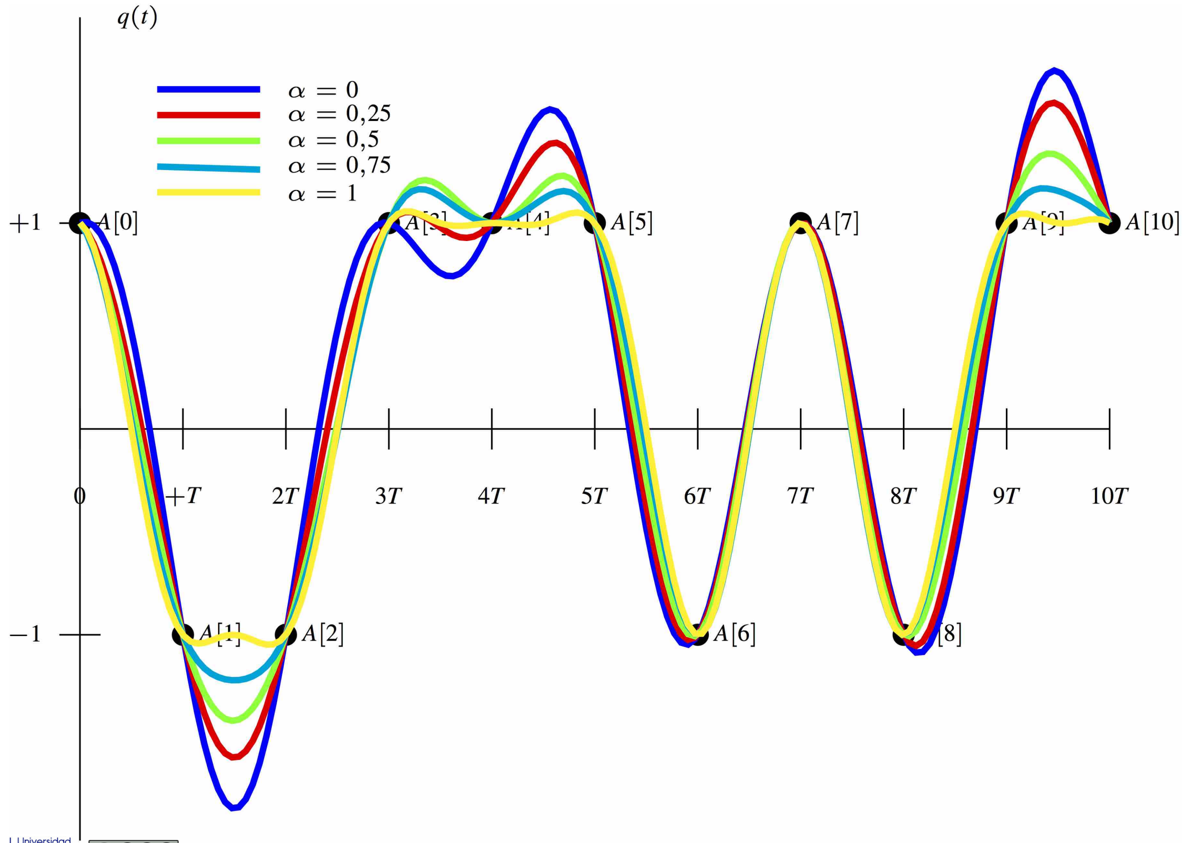
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 0{,}75$



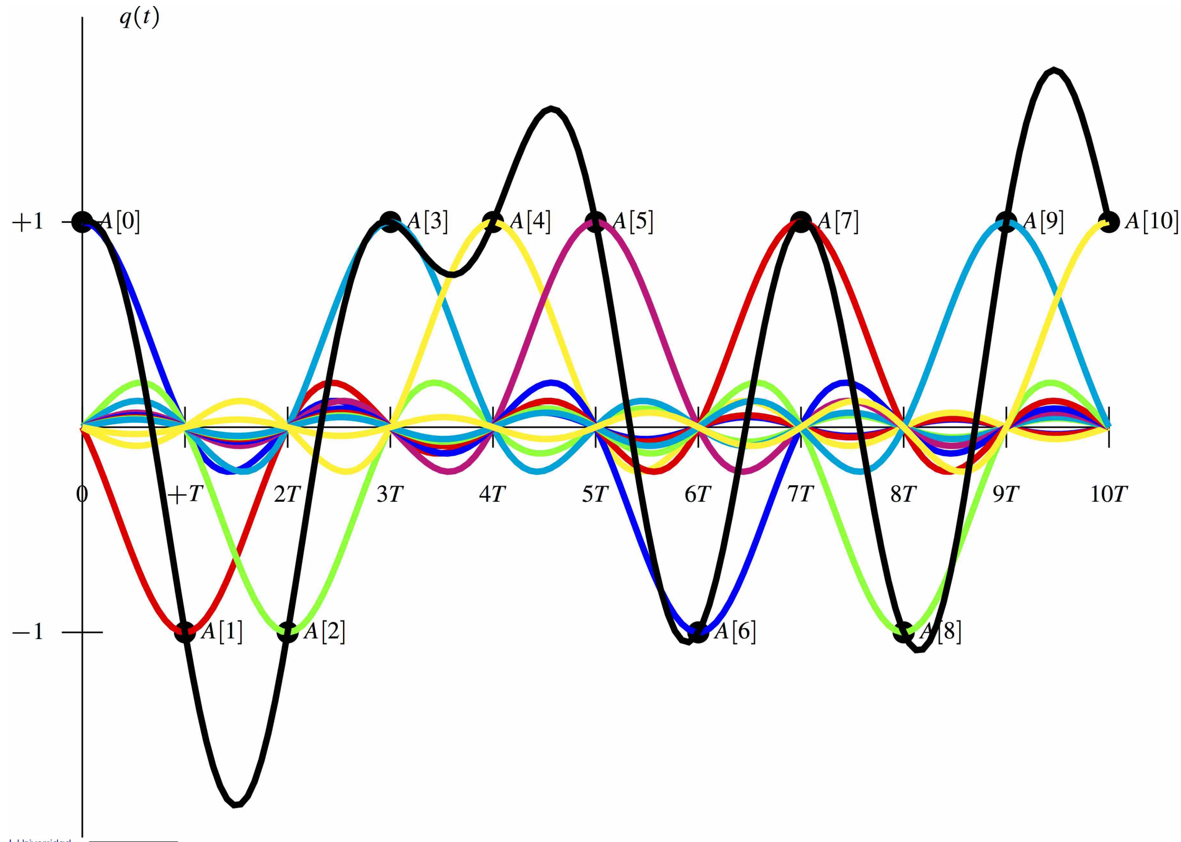
Señales con cosenos alzados (ideales) - $\alpha = 1$



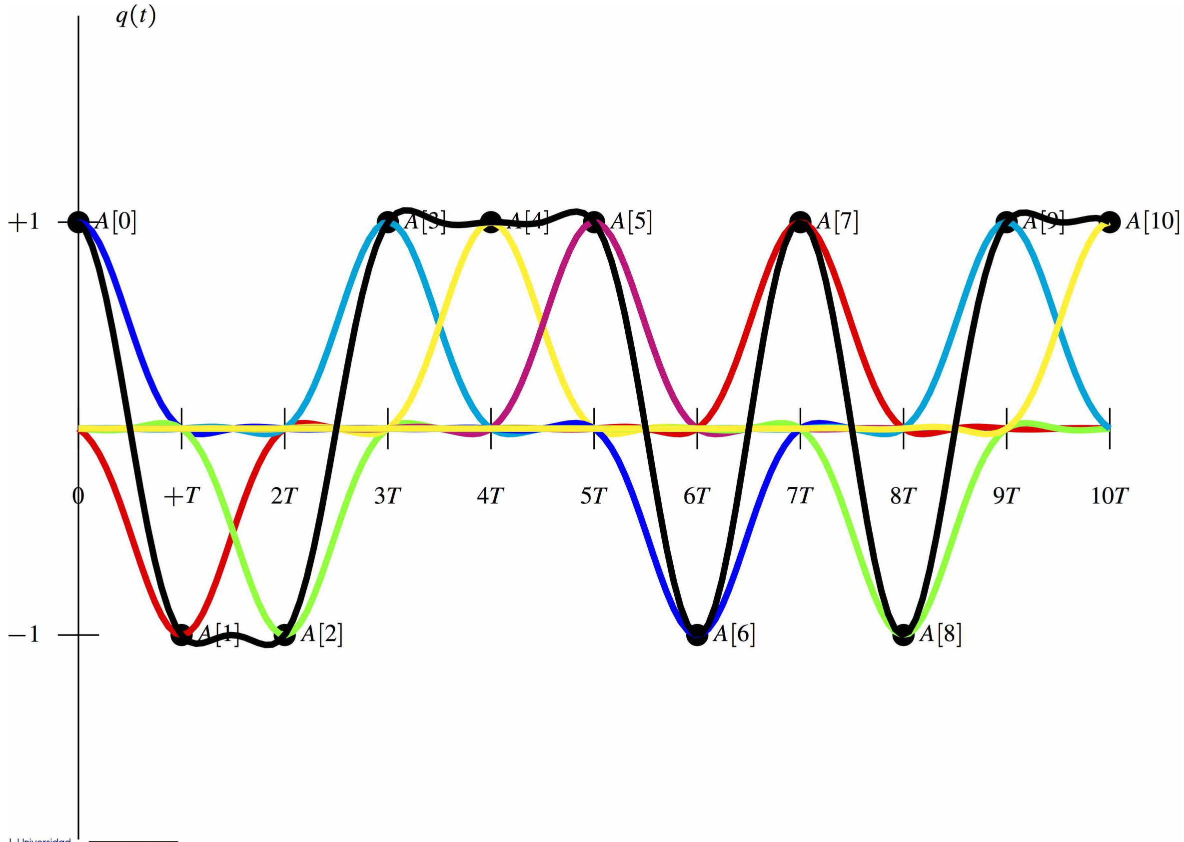
Señales con cosenos alzados (ideales) - Comparación



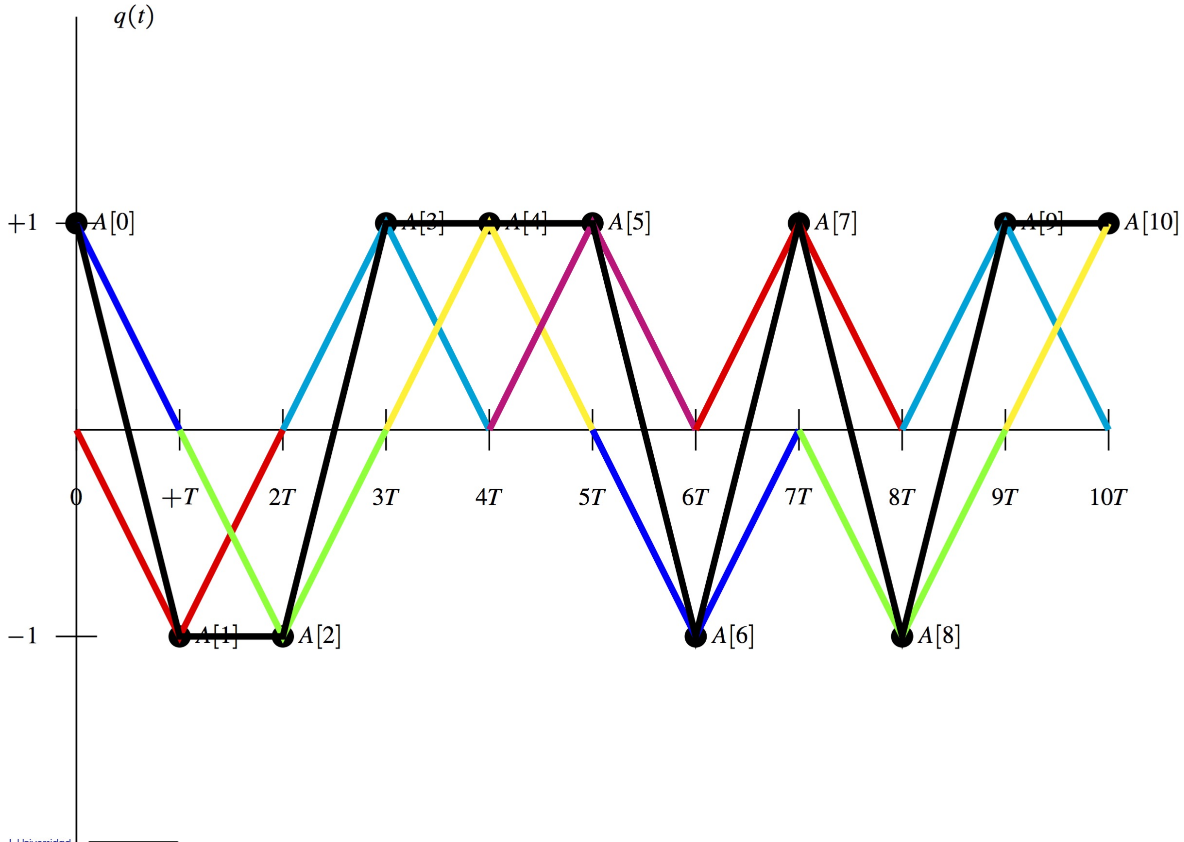
Componentes - $\alpha = 0$



Componentes - $\alpha = 1$



Componentes - $p(t)$ triangular



PAM paso banda - Generación con modulación AM

- Se genera una PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n A[n]\, g(t - nT)$$

- Esta señal PAM se modula con una modulación de amplitud. Hay distintas variantes
  - Modulación AM convencional (doble banda lateral con portadora)
  - Doble banda lateral (sin portadora)
  - Banda lateral única
    - Banda lateral inferior
    - Banda lateral superior
  - Banda lateral vestigial
    - Banda lateral inferior
    - Banda lateral superior

Inconvenientes de una modulación AM

- AM convencional y doble banda lateral
  - Eficiencia espectral se reduce a la mitad (doble ancho de banda)
- Modulación de banda lateral única
  - Requiere filtros ideales en el transmisor
    - Filtros reales introducen distorsión
- Banda lateral vestigial
  - Requiere filtros de banda lateral vestigial
    - Características restrictivas

Modulación utilizando dos portadoras en cuadratura

- Dos secuencias de símbolos (no necesariamente independientes) se transmiten simultáneamente (tasa $R_s = \frac{1}{T}$ para ambas)

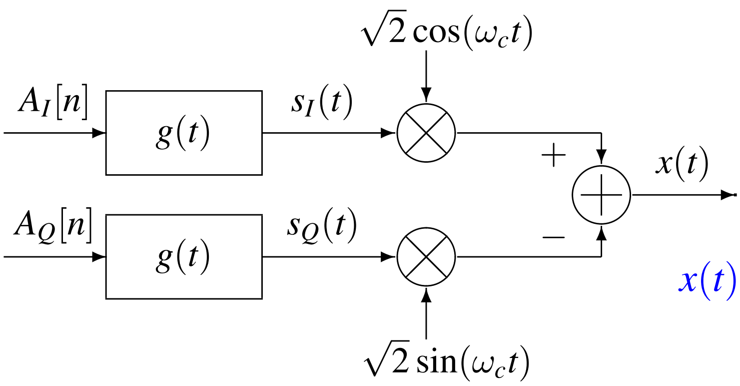
$$A_I[n] \text{ y } A_Q[n]$$

- Dos señales PAM banda base se generan usando $g(t)$

$$s_I(t) = \sum_n A_I[n]\; g(t-nT) \qquad s_Q(t) = \sum_n A_Q[n]\; g(t-nT)$$

$s_I(t)$: componente en fase, $s_Q(t)$: componente en cuadratura

- Generación de la señal paso banda, $x(t)$, a partir de $s_I(t)$ y $s_Q(t)$



$$x(t) = \sqrt{2}\; s_I(t)\; \cos(\omega_c t) \\ -\sqrt{2}\; s_Q(t)\; \sin(\omega_c t)$$

Notación compleja para PAM paso banda

- Secuencia compleja de símbolos

$$A[n] = A_I[n] + jA_Q[n]$$

  - $A_I[n] = \mathcal{R}e\{A[n]\}, \quad A_Q[n] = \mathcal{I}m\{A[n]\}$

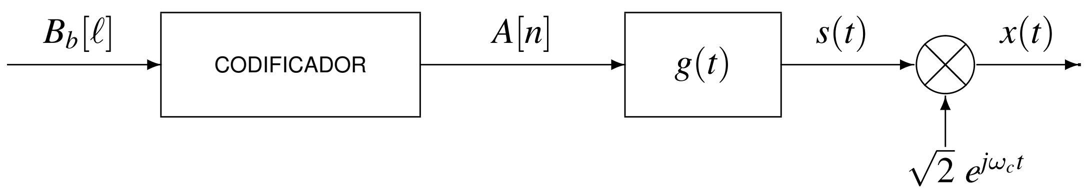
- Señal compleja en banda base, $s(t)$:

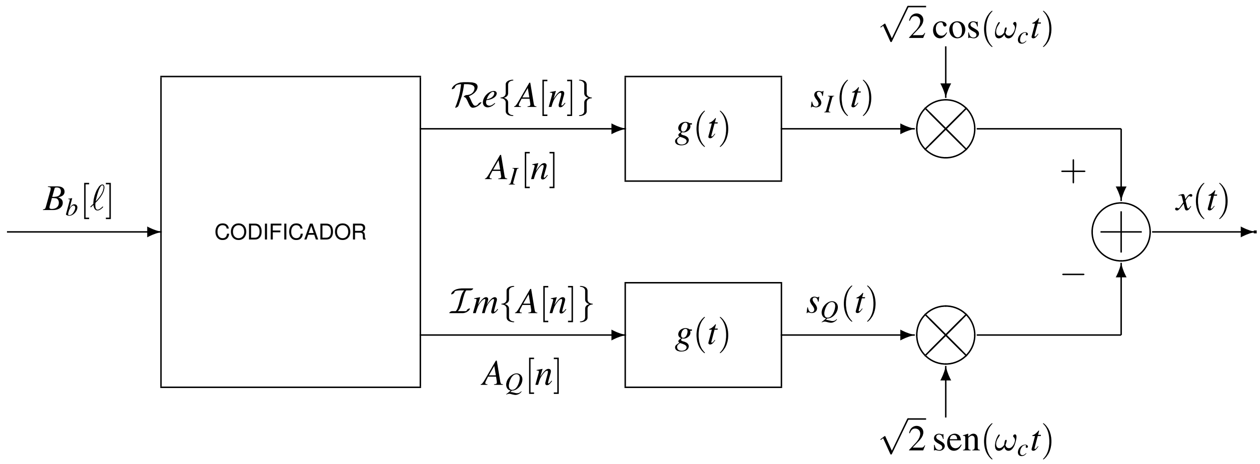
$$s(t) = s_I(t) + js_Q(t) = \sum_n A[n]\; g(t-nT)$$

- La señal PAM modulada paso banda se escribe como

$$x(t) = \sqrt{2}\; \mathcal{R}e\left\{s(t)\; e^{j\omega_c t}\right\} = \sqrt{2}\; \mathcal{R}e\left\{\sum_n A[n]\; g(t-nT)\; e^{j\omega_c t}\right\}$$

Modulador PAM paso banda





Relación con un espacio de señales 2D

- Señal en espacio de señales bidimensional se escribe

$$x(t) = \sum_n A_0[n]\ \phi_0(t-nT) + \sum_n A_1[n]\ \phi_1(t-nT)$$

  - $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ son señales ortonormales

- Formulación PAM paso banda sólo es equivalente si

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \times k, \quad \text{with } k \in \mathbb{Z}$$

En este caso

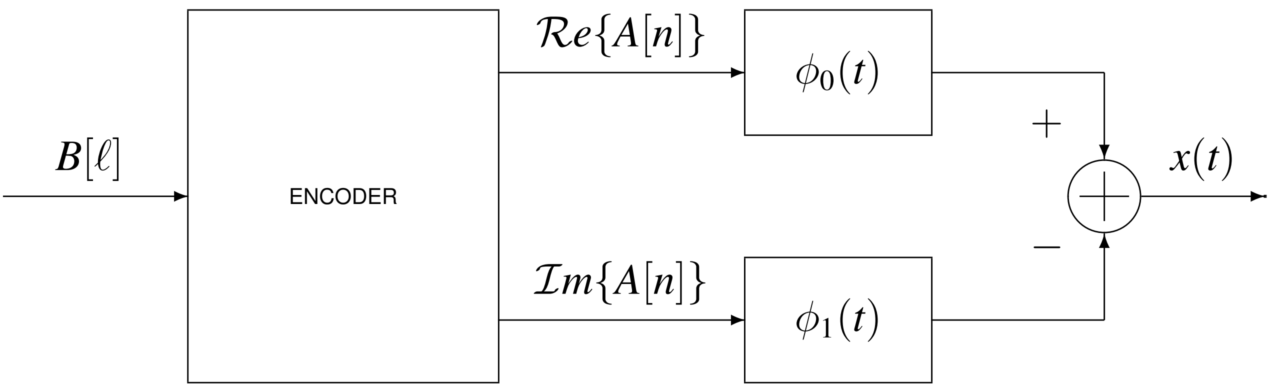
$$A_0[n] = A_I[n],\ A_Q[n] = A_1[n]$$

$$\phi_0(t) = g(t)\ \cos(\omega_c t), \qquad \phi_1(t) = -g(t)\ \sin(\omega_c t)$$

$$\phi_0(t-nT) = g(t-nT)\ \cos(\omega_c(t-nT)) = g(t-nT)\ \cos(\omega_c t)$$

$$\phi_1(t-nT) = -g(t-nT)\ \sin(\omega_c(t-nT)) = -g(t-nT)\ \sin(\omega_c t)$$

Modulador en espacio de señales 2D



Constelaciones PAM paso banda

- Representación 2D de los posibles valores de $A_I[n]$ vs $A_Q[n]$
- Constelaciones más frecuentes
  - Constelaciones QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
    - $M = 2^m$ símbolos, con m par
    - Símbolos en una retícula cuadrada ($2^{m/2} \times 2^{m/2}$ niveles)
      - $A_I[n]$ y $A_Q[n]$ usan constelaciones PAM banda base
      - Asignación binaria, codificación, y reglas de decisión independientes en cada componente

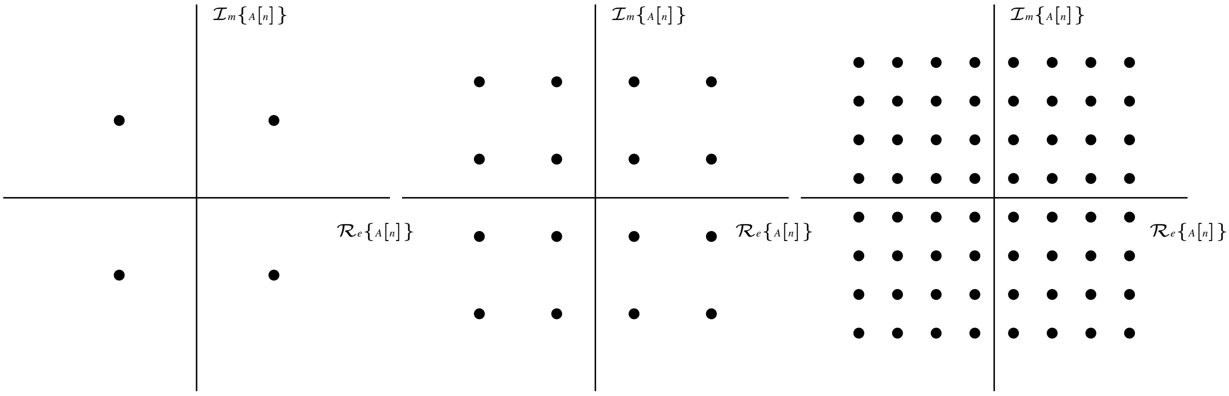
$$E_s = \frac{2(M-1)}{3}$$

  - Constelaciones QAM en cruz
    - $M = 2^m$ símbolos, con m impar
    - Símbolos en una rejilla cuadrada no completa
      - Asignación binaria, cofificación y reglas de decisión no son independientes

$$E_s = \frac{2}{3}\left(\frac{31}{32}M - 1\right)$$

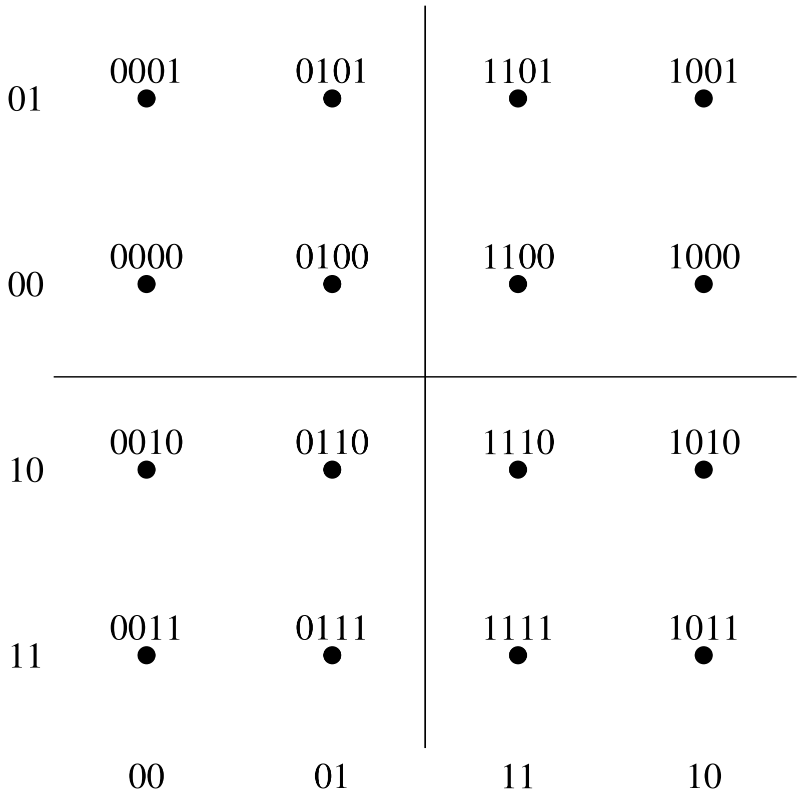
  - Constelaciones PSK (Phase Shift Keying)
    - Símbolos equiespaciados sobre una circunferencia
      - Energía constante para todos los símbolos

Constelaciones QAM

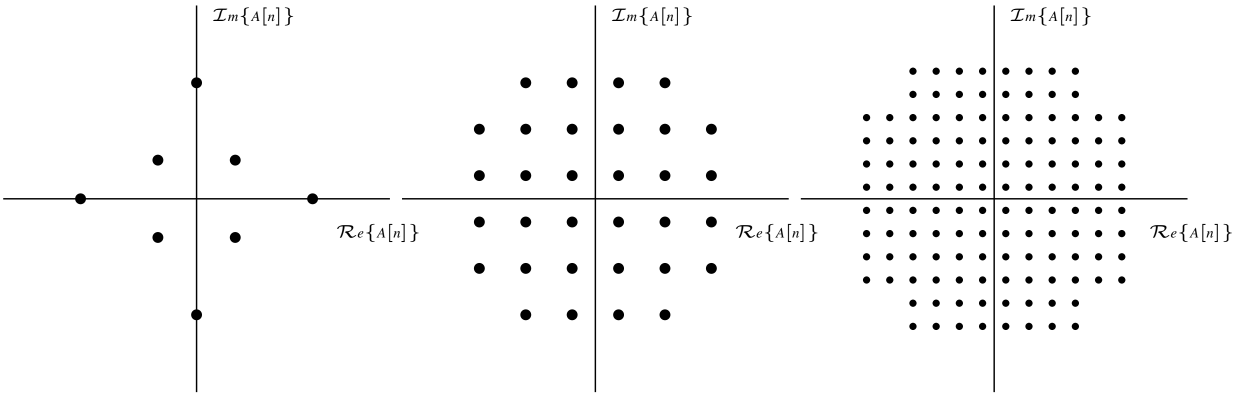


Constelaciones 4-QAM (QPSK), 16-QAM y 64-QAM

Codificación Gray QAM



Constelaciones QAM en cruz



Constelaciones 8-QAM, 32-QAM y 128-QAM

Constelación PSK (Phase shift keying)

- Constelación PSK

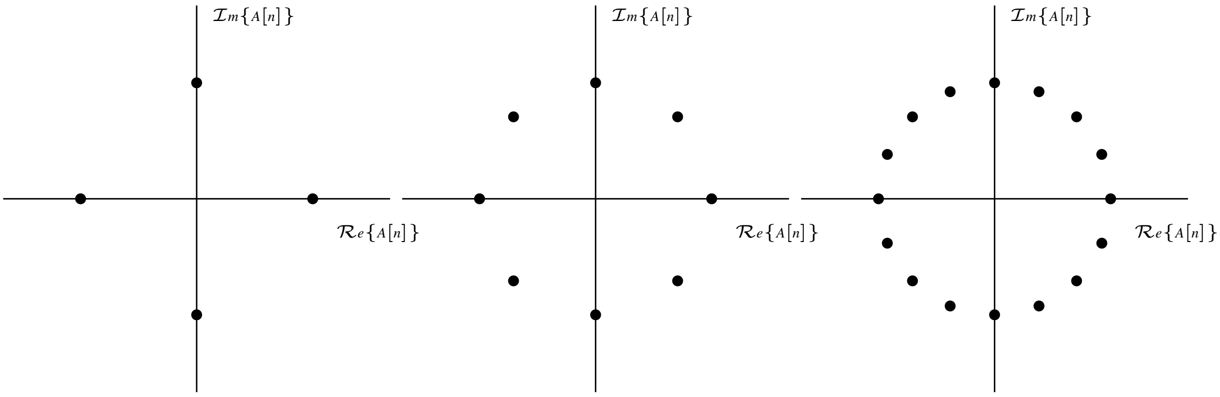
$$A[n] = \sqrt{E_s}\; e^{j\varphi[n]}$$

  - Módulo constante
  - La información está en la fase del símbolo
- Forma de onda para modulaciones con constelaciones PSK

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E_s}\mathcal{R}e\left\{\sum_n g(t-nT)\; e^{j(\omega_c t+\varphi[n])}\right\} \\ &= \sqrt{2E_s}\sum_n g(t-nT)\cos(\omega_c t+\varphi[n]) \end{aligned}$$

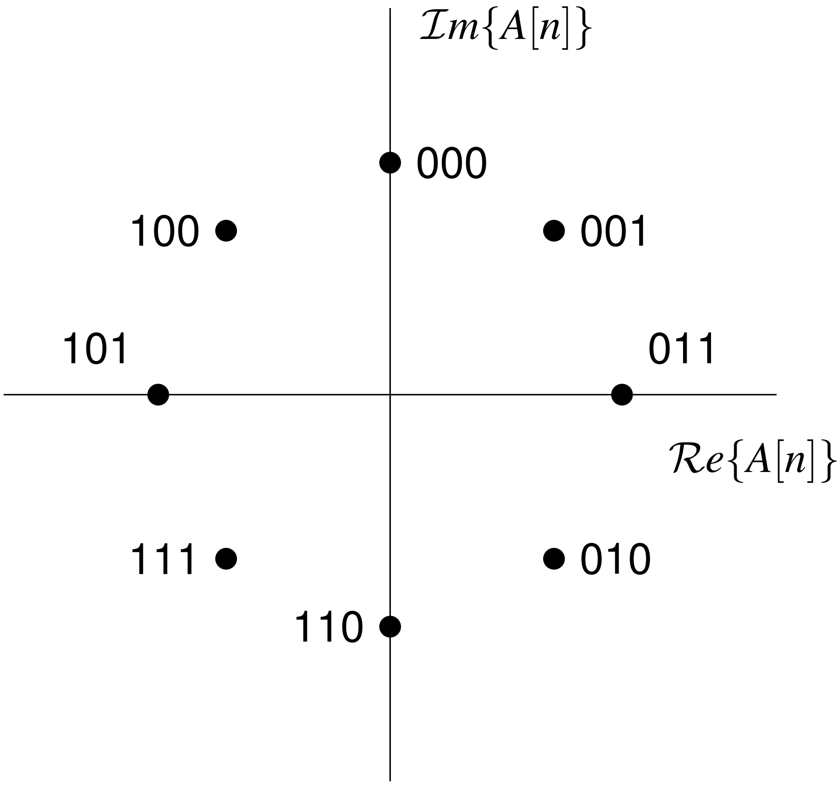
  - Saltos de fase en las transiciones entre símbolos

Constelaciones PSK

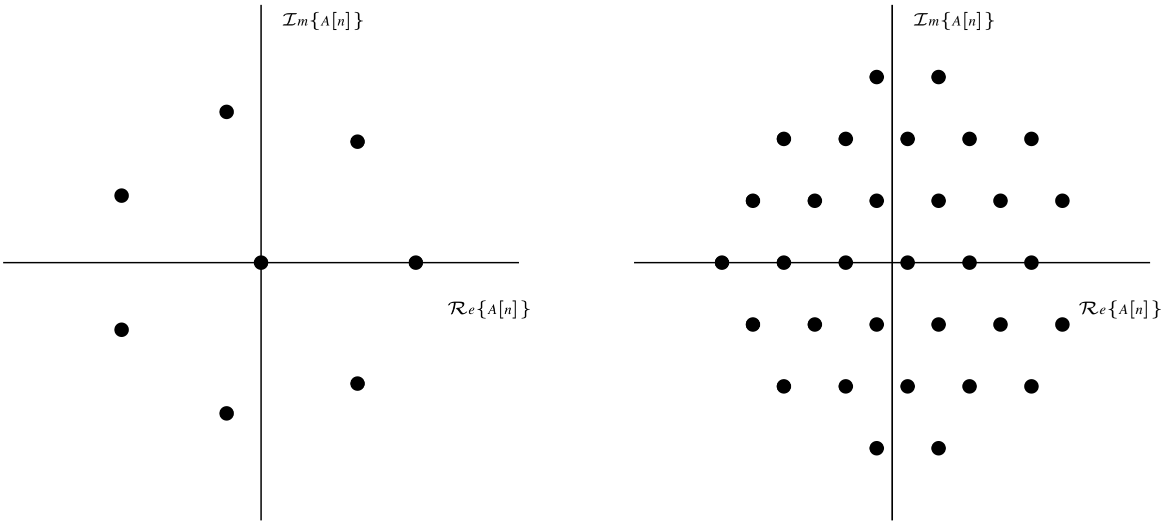


Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

Codificación Gray PSK



Otras constelaciones



Constelaciones 1-7-AM-PM y 32-hexagonal

Espectro de modulaciones PAM paso banda

- Condiciones para cicloestacionariedad de $x(t)$:

$$E\left[A[k+m]\ A[k]\right] = 0,\ \text{para todo } k, m, m \neq 0$$

  - Condiciones para constelaciones QAM
    - Secuencias de símbolos $A_I[n]$ y $A_Q[n]$ son mutuamente independientes
    - Funciones de autocorrelación idénticas para $A_I[n]$ y $A_Q[n]$
  - Condiciones para constelaciones PSK
    - Valores de $\varphi[n]$ son independientes

- Bajo ciclostationariedad la densidad espectral de potencia es

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[S_S(j\omega - j\omega_c) + S_S^*(-j\omega - j\omega_c)\right]$$

$$S_S(j\omega) = \frac{1}{T}\ S_A\left(e^{j\omega T}\right)\ |G(j\omega)|^2$$

Espectro de modulaciones PAM paso banda (II)

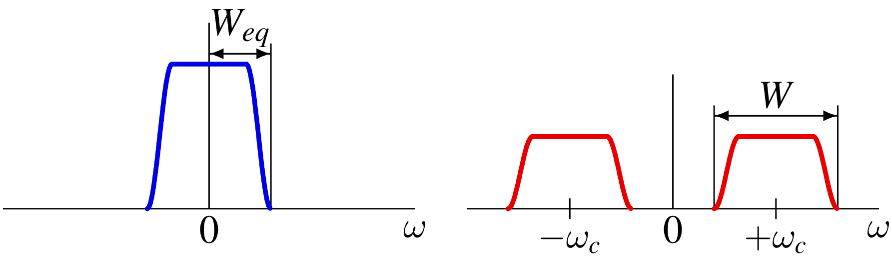
- Para secuencias de símbolos blancas: $S_A\left(e^{j\omega}\right) = E_s$

$$S_S(j\omega) = \frac{E_s}{T}\,|G(j\omega)|^2$$

El filtro transmisor es reponsable de la forma del espectro

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{E_s}{T}\left[|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(j\omega + j\omega_c)|^2\right]$$

  - Ejemplo usando filtros de la familia del coseno alzado



Ancho de banda en paso banda, W, es el doble que el equivalente en banda base W_{eq}

La eficiencia espectral es la misma ya que se transmiten dos secuencias (dos símbolos cada T segundos)

Potencia transmitida

- La potencia media transmitida es

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega)\, d\omega$$

- Si la secuencia $A[n]$ es blanca

$$S_A\left(e^{j\omega}\right) = E_s$$

  - Potencia para una secuencia blanca

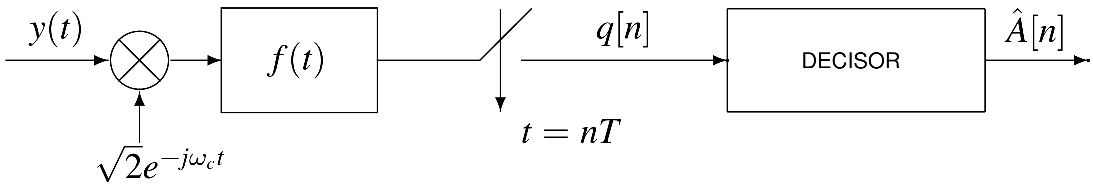
$$P_X = \frac{Es}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2\, d\omega = \frac{E_s}{T} \times \mathcal{E}\{g(t)\}$$

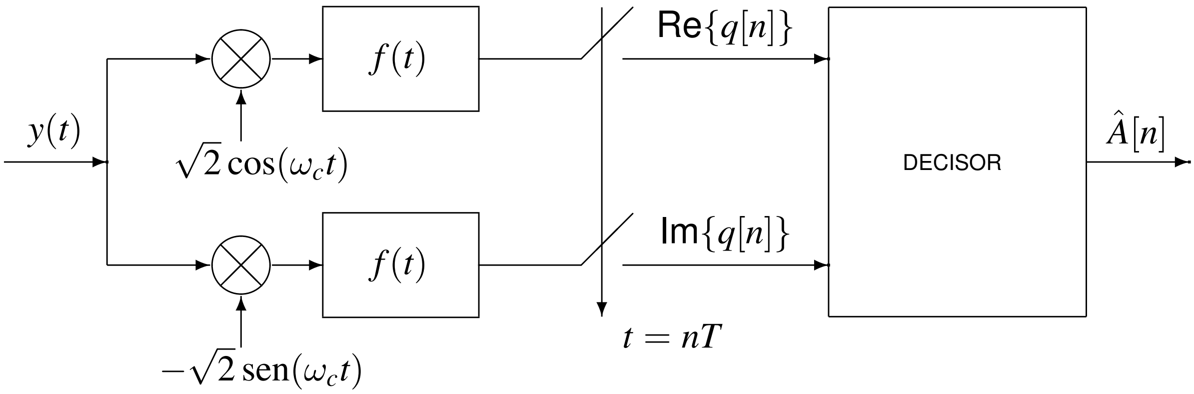
    - ★ Para filtros normalizados (con energía unidad)

$$P_X = \frac{E_s}{T} = E_s \times R_s \text{ Watts}$$

Demodulador PAM paso banda

- Demodulación y filtrado en banda base puede ser utilizada
  - Notación compleja e implemtación por componentes se muestran en las figuras





Demodulador equivalente (alternativo)

- Señal antes del muestreador (utilizando notación compleja)

$$q(t) = \left(y(t)\, e^{-j\omega_c t}\right) * \left(\sqrt{2}\, f(t)\right)$$

- Expresión de la convolución

$$q(t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, y(t-\tau)\, e^{j\omega_c \tau}\, e^{-j\omega_c t}\, d\tau$$

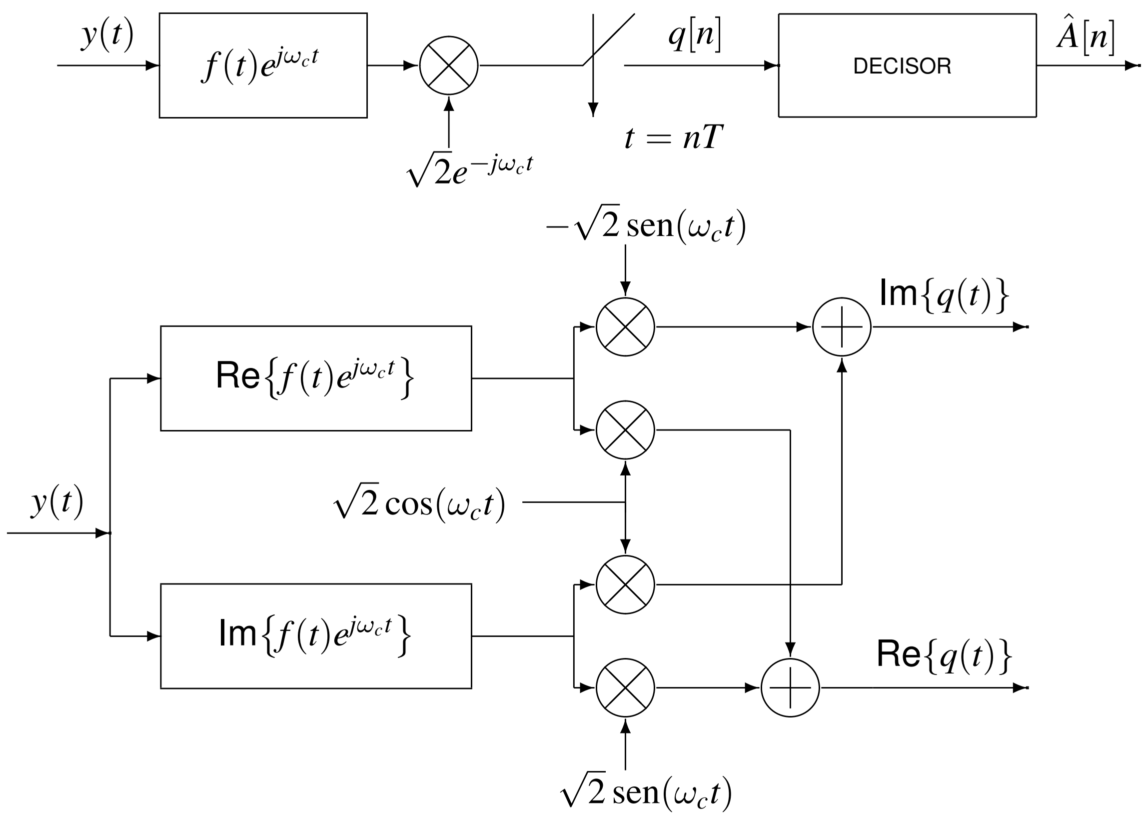
- Reordenando términos, se obtiene un esquema de demodulación alternativo

$$q(t) = e^{-j\omega_c t} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\, f(\tau)\, e^{j\omega_c \tau}\, y(t-\tau)\, d\tau$$

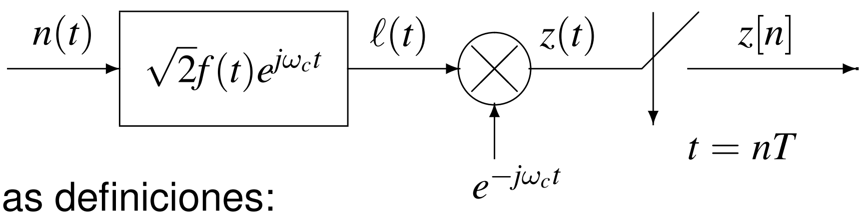
$$q(t) = e^{-j\omega_c t} \left(y(t) * \left(\sqrt{2}\, f(t)\, e^{j\omega_c t}\right)\right)$$

Filtrado paso banda y luego demodulación

Demodulador equivalente (II)



Características de ruido en el receptor



- Algunas definiciones:

$$f_c(t) = \sqrt{2}\, f(t)\, e^{j\omega_c t},\ \ F_c(j\omega) = \sqrt{2}\, F(j\omega - j\omega_c)$$

- Propiedades:
  1. $z(t)$ es estacionario si $\ell(t)$ es circularmente simétrico
     NOTA: Un proceso complejo $X(t)$ es circularmente simétrico si las partes real e imaginaria, $X_r(t)$ y $X_i(t)$, son conjuntamente estacionarios, y sus correlaciones cumplen

     $$R_{X_r}(\tau) = R_{X_i}(\tau),\ \ R_{X_r,X_i}(\tau) = -R_{X_i,X_r}(\tau)$$

  2. $\ell(t)$ es circularmente simetrico si ω_c es mayor que el ancho de banda del filtro $f_c(t)$ (sistema de banda estrecha)

     $$S_\ell(j\omega) = 2\ S_n(j\omega)\ \ |F(j\omega - j\omega_c)|^2$$

Señal de ruido $z(t)$ en el receptor

- $z(t)$ es circularmente simétrico y su densidad espectral de potencia es

$$S_z(j\omega) = 2\ S_n(j\omega + j\omega_c)\ |F(j\omega)|^2$$

  - Si el proceso es simétrico, sus partes real e imaginaria, $z_I(t)$ y $z_Q(t)$, tienen la misma varianza y son independientes para cualquier instante t
  - In general, $z_I(t_1)$ and $z_Q(t_2)$, for $t_1 \neq t_2$ are not independent
  - Si el espectro es hermítico, $S_z(j\omega) = S_z^*(-j\omega)$, $z_I(t_1)$ y $z_Q(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$ son también independientes
    - ★ Si $n(t)$ es blanco, esto se cumple si $f(t)$ es real

Secuencia de ruido discreto $z[n]$ en el receptor

- $z[n]$ es circularmente simétrico

$$S_z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{2}{T} \sum_k S_n\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{\omega_c}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \left|F\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)\right|^2$$

Para ruido blanco $n(t)$

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$

Ahora

  - $z_I[n]$ y $z_Q[n]$ son independientes para cualquier instante n
  - $z_I[n_1]$ y $z_Q[n_2]$, para $n_1 \neq n_2$, son sólo independientes si $S_z\left(e^{j\omega}\right)$ es una función simétrica
    - ★ Esto ocurre para ruido blanco si la función de anbigüedad de $f(t)$, $r_f(t) = f(t) * f^*(-t)$, cumple el criterio de Nyquist a período T

Varianza y distribución de $z[n]$

- La varianza del ruido complejo es

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z\left(e^{j\omega}\right)\, d\omega$$

- Si $n(t)$ es blanco, con $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz, y si $r_f(t)$ es normalizado y comple el criterio de Nyquist

$$\sigma_z^2 = N_0$$

- Si el ruido es circularmente simétrico
  - Partes reales e imaginaria ($z_I[n]$ y $z_Q[n]$) son independientes y ambos tienen varianza $N_0/2$
  - Función densidad de probabilidad

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{|z|^2}{N_0}}$$

NOTA: Si el filtro receptor no está normalizado, la varianza se multiplica por $\mathcal{E}\{f(t)\}$

Canal discreto equivalente

- Definición del canal complejo equivalente en banda base, $h_{eq}(t)$

$$h_{eq}(t) = e^{-j\omega_c t}\, h(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad H_{eq}(j\omega) = H(j\omega + j\omega_c)$$

Comportamiento del canal en torno a la frecuencia ω_c se traslada a banda base

- Señal a la salida del filtro receptor

$$q(t) = \sum_n A[n]\, p(t - nT) + z(t)$$

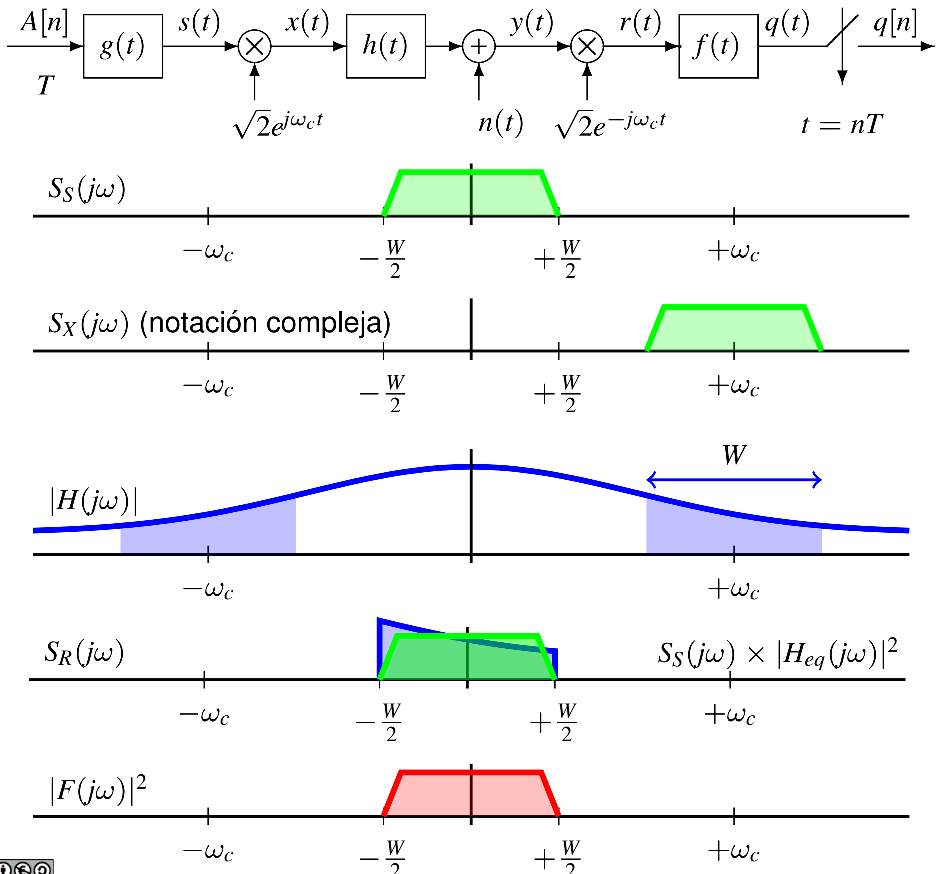
$$p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega)\, H_{eq}(j\omega)\, F(j\omega)$$

- Canal discreto equivalente:

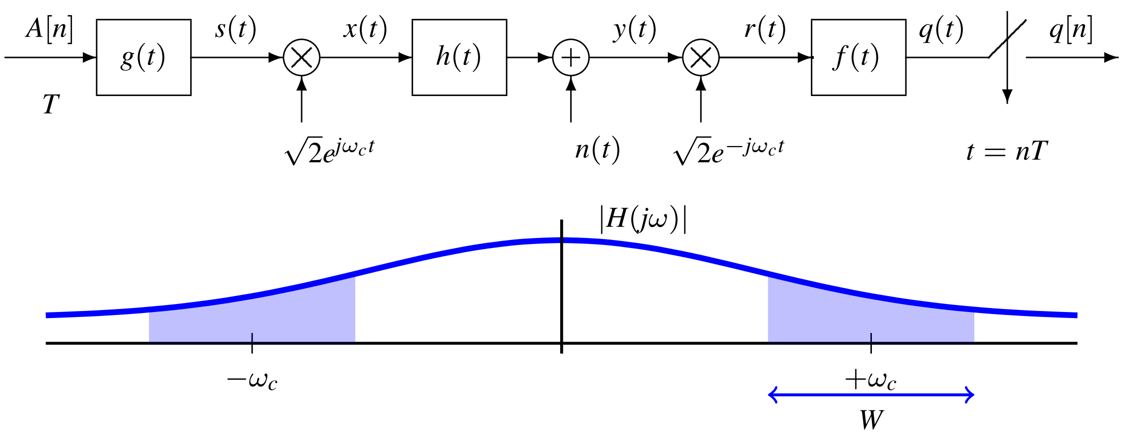
$$p[n] = p(t)\big|_{t=nT} = p(nT)$$

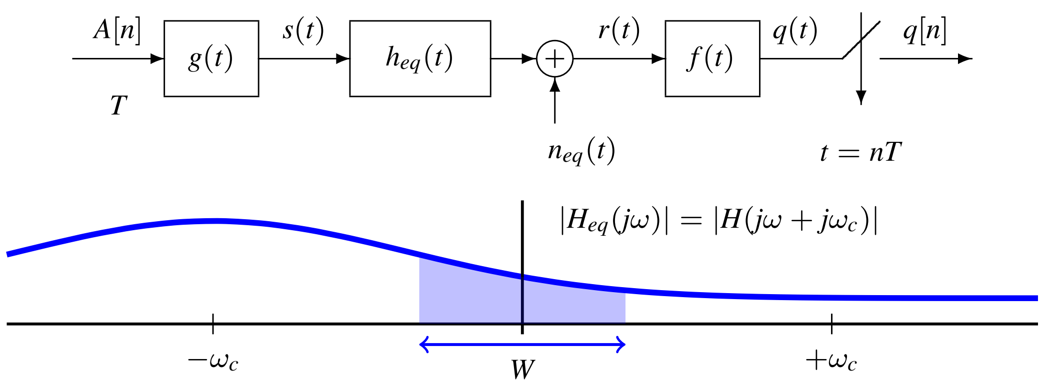
$$\begin{aligned} P\left(e^{j\omega}\right) =& \frac{1}{T} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \\ =& \frac{1}{T} \sum_k G\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)\, H_{eq}\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)\, F\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned}$$

Canal complejo equivalente en banda base

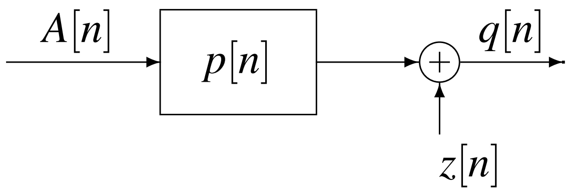


Canal complejo equivalente en banda base (II)





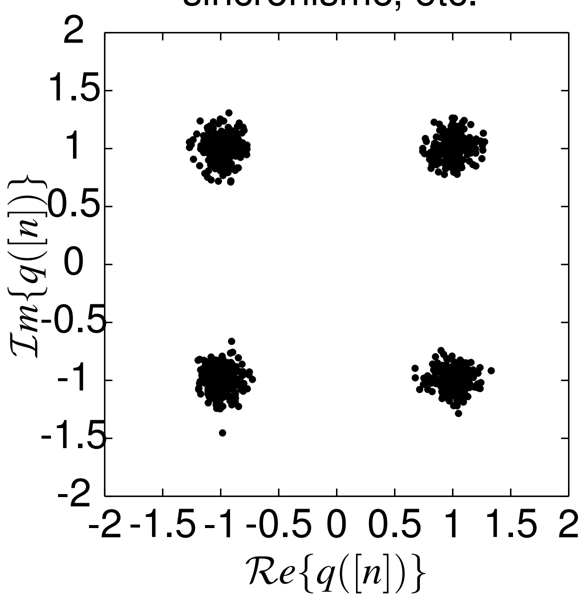
Canales discretos equivalentes - PAM banda base y paso banda



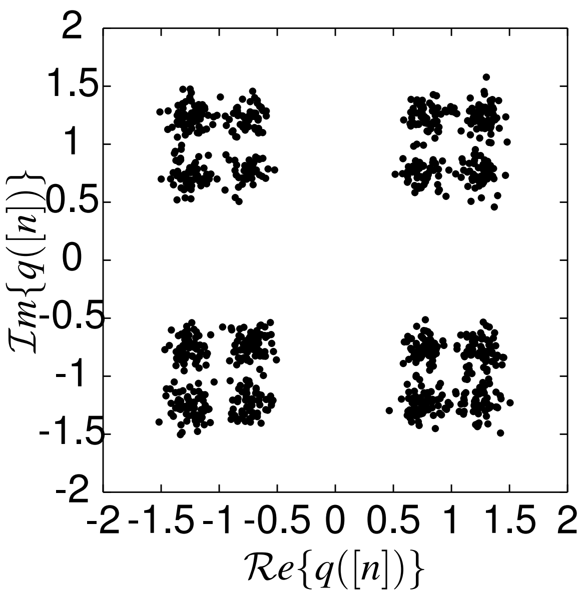
- Identificación de PAM banda base y paso banda
  - Símbolos $A[n]$
  - Canal discreto equivalente $p[n]$
  - Ruido discreto $z[n]$
    - ★ Son reales en PAM banda base
    - ★ Son complejos en PAM paso banda

Diagrama de dispersión

- Herramienta de monitorización para sistemas paso banda
  - Representación de $\mathcal{Re}(q[n])$ versus $\mathcal{Im}(q[n])$
  - Ideal: debe aparecer la constelación transmitida
  - Permite visualizar el nivel de ruido, nivel de ISI, errores de sincronismo, etc.



$p[n] = \delta[n]$



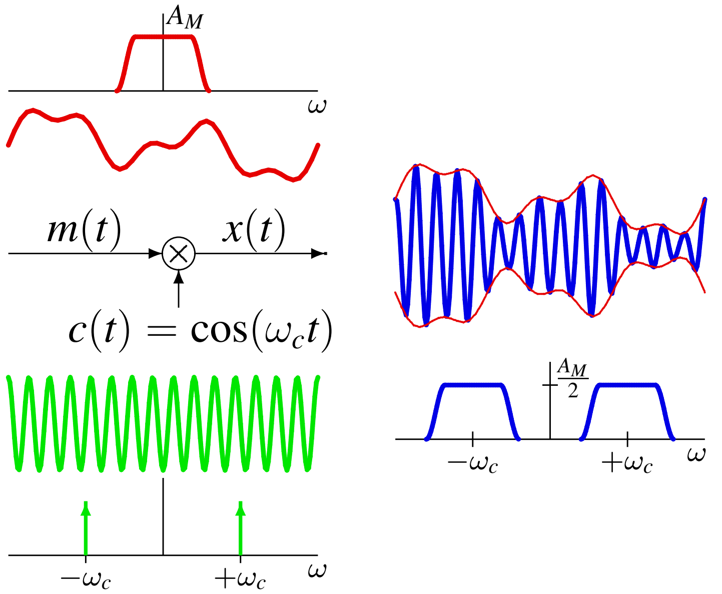
$p[n] = \delta[n] - 0{,}25\delta[n-1]$

Revisión - Producto con una sinusoide

- Multiplicar por una sinusoide de frecuencia ω_c genera, espectralmente, dos réplicas del espectro de la señal, desplazadas $\pm\omega_c$

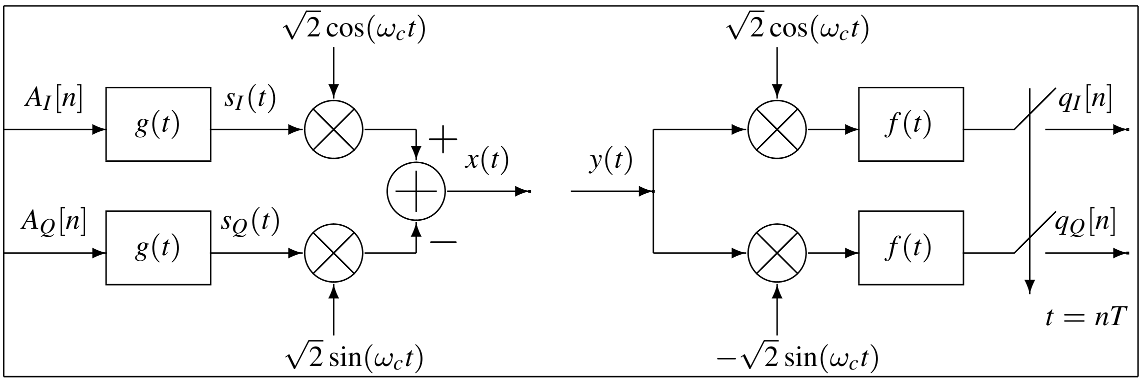
$$x(t) = m(t) \times \cos(\omega_c t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}M(j\omega + j\omega_c)$$

Densidad espectral de potencia: $S_X(j\omega) = \frac{1}{4}S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_M(j\omega + j\omega_c)$



Análisis de la modulación / demodulación

- Digrama de bloques de transmisor y receptor



- Transmisor: modula dos señales en banda base con portadoras ortogonales
- Receptor: demodula cada componente y filtra con $f(t)$
  - El filtro receptor $f(t)$ tiene una característica banda base (paso bajo)
  - Configuración típica: filtro en raíz de coseno alzado

Análisis de la modulación / demodulación (II)

- La señal recibida sin distorsión (señal modulada) tiene la forma

$$y(t) = A\ \cos(\omega_c t) + B\ \sin(\omega_c t)$$

- En el receptor, la señal se procesa dividiéndola en dos componentes

$$q_I(t) \equiv \text{filtrar}\ [A\ \cos(\omega_c t) + B\ \sin(\omega_c t)] \times \cos(\omega_c t)$$

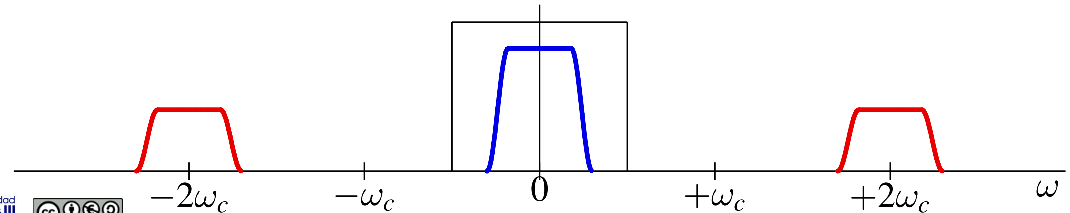
$$q_Q(t) \equiv \text{filtrar}\ [A\ \cos(\omega_c t) + B\ \sin(\omega_c t)] \times \sin(\omega_c t)$$

- Identidades trigonométricas y eliminación (filtrado) de términos paso banda

$$X\ \cos(\omega_c t)\ \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}}_{\textit{Deseado}} + \underbrace{\frac{X}{2}\ \cos(2\omega_c t)}_{\textit{Paso banda en } 2\omega_c}$$

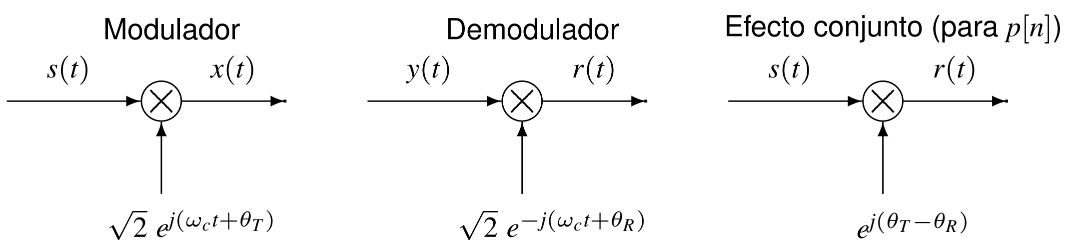
$$X\ \sin(\omega_c t)\ \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}\ \sin(2\omega_c t)}_{\textit{Paso banda en } 2\omega_c}$$

$$X\ \sin(\omega_c t)\ \sin(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}}_{\textit{Deseado}} - \underbrace{\frac{X}{2}\ \cos(2\omega_c t)}_{\textit{Paso banda en } 2\omega_c}$$



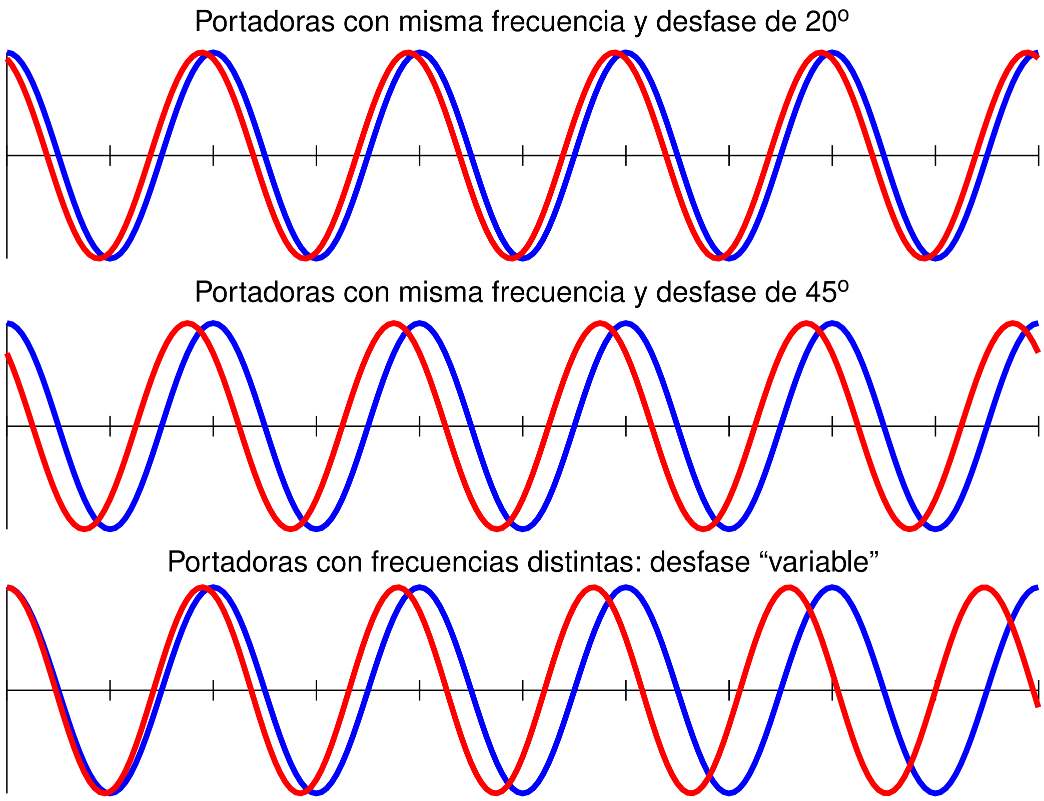
Análisis de la modulación / demodulación (III)

- El producto de dos portadoras permite recuperar las señales banda base transmitidas
  - Productos $\cos(\omega_c t) \times \cos(\omega_c t)$ o $\sin(\omega_c t) \times \sin(\omega_c t)$ introducen un factor $\frac{1}{2}$
    - Los factores $\sqrt{2}$ se introducen en transmisor y receptor para compensarlo
  - La notación compleja equivalente falla al representar esta atenuación
    - Hay que tenerlo en cuenta cuando se usa la representación



- Receptores no coherentes (no síncronos)
  - Receptor cuyo demodulador tiene portadoras con fase diferente a la fase de las portadoras del modulador
  - Produce como efecto una rotación en la constelación recibida
  - Un receptor coherente necesita recuperar la fase de la señal recibida (con un PLL)
    - Coste adicional del PLL (*Phase Locked Loop*)

Sinusoides con distintas fase o frecuencia



Tasa de transmisión binaria (R_b bits/s)

- La tasa binaria se obtiene a partir de $R_b = m \times R_s$
  - Tasa de símbolo (R_s baudios)
  - Número de bits por símbolo de la constelación (m)

$$m = \log_2(M)$$

  M: número de símbolos de la constelación
- Limitación en la máxima tasa binaria alcanzable
  - Limitación sobre R_s: ancho de banda disponible (B Hz)
    Utilizando filtros de la familia coseno alzado

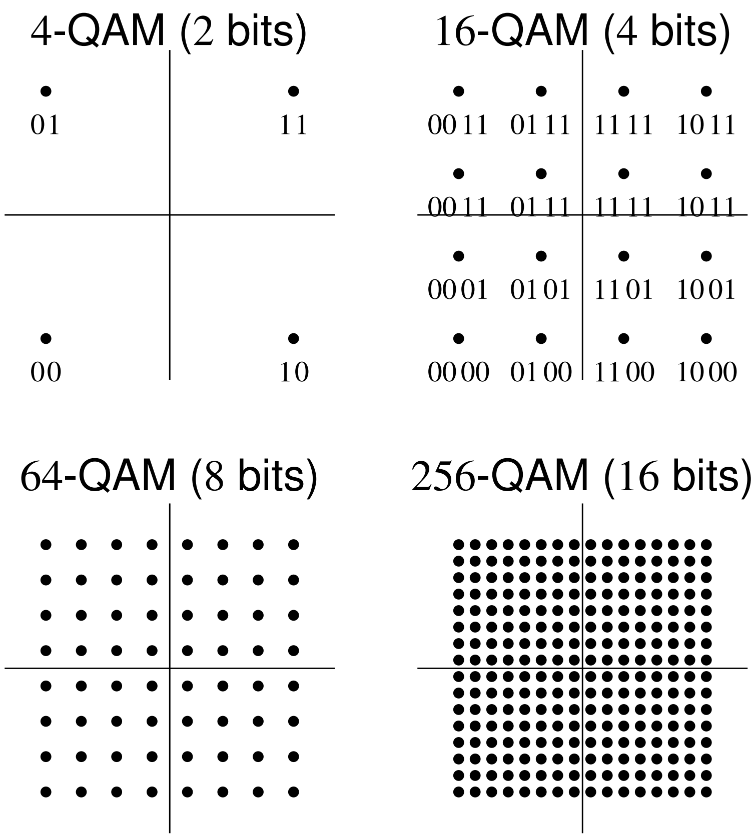
BANDA BASE	PASO BANDA
$R_{s\|max} = \frac{2B}{1+\alpha}$	$R_{s\|max} = \frac{B}{1+\alpha}$

  - Limitación en el número de símbolos M (y por tanto en m)
    - ★ Limitación en potencia: limita la energía media por símbolo $E_s = E\left[|A[n]|^2\right]$
      - Esto limita el máximo módulo de los puntos de la constelación
    - ★ Las prestaciones requeridas limitan la mínima distancia entre símbolos

$$P_e \approx k\, Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

    - ★ E_s y P_e determinan una densidad máxima para la constelación

Densidad de las constelaciones - Ejemplo - QAM



Densidad de las constelaciones - Ejemplo - QAM

- Aumento del tamaño de la constelación (M símbolos):
  - Aumento en la tasa binaria
    - ★ Aumenta el número de bits por símbolo $m = \log_2 M$
  - Reducción de prestaciones para una E_s dada
    - ★ Reducción de la distancia entre puntos de la constelación

Ejemplo para constelaciones M-QAM

M (símbolos)	m (bits/símbolo)	E_s con niveles normalizados ($d_{min} = 2$)	d_{min} con $E_s = 2$
4	2	2	2
16	4	10	0,8944
64	8	42	0,4364
256	16	170	0,2169