Comunicaciones Digitales

Grado en Ingeniería de Sistemas de Comunicaciones
Grado en Ingeniería Telemática

Capítulo 5

Codificación para protección frente a errores

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice

Introducción

- Los sistemas de comunicaciones comenten errores
- Objetivo de un sistema de comunicaciones
  - BER $<$ Calidad
- Alternativas para reducción de los errores
  - Aumentar la energía/potencia de la señal
    - Limitaciones: Econónicas, físicas, legales, interferencias, ...
  - Teorema de codificación de canales con ruido (Shannon)
    - Introducción de bits de redundancia
    - Tasa de codificación: R

$$R = \frac{\text{número de bits de información}}{\text{número de bits transmitidos (info+redundancia)}}$$

    - Capacidad del canal: C (bits/uso)
    - Posibilidad de reducción de la BER de forma arbitraria

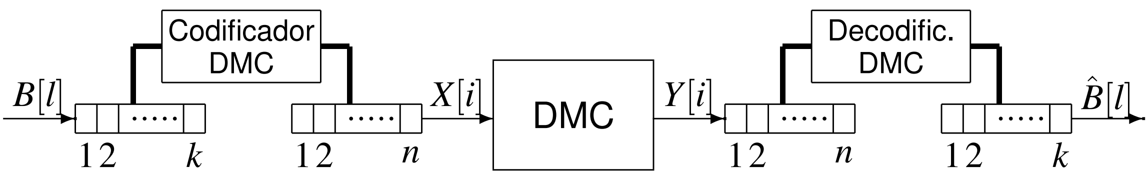
$$R < C$$

Teorema de codificación de canal

$$C = \max_{p_X(x_i)} I(X,Y)$$

Teorema de codificación de canal (Shannon 1948):

1. Si la tasa de transmisión R es menor que C, entonces para cualquier $\delta > 0$ existe un código con una longitud de bloque n suficientemente larga cuya probabilidad de error es menor que δ
2. Si $R > C$, la probabilidad de error de cualquier código con cualquier longitud de bloque está limitada por un valor no nulo
3. Existen códigos que permiten alcanzar la capacidad del canal $R = C$



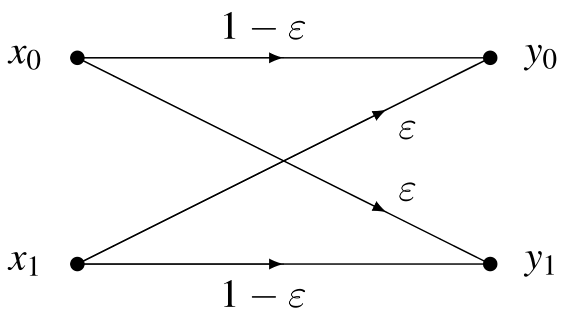
Tasa del código: $R = \frac{k}{n}$

Capacidad de canal - Canales digitales

- Modelo de canal discreto sin memoria (DMC)
  - Entrada y salida: variables aleatorias X e Y
  - Probabilidades de transición $p_{Y|X}(y_j|x_i)$
- Capacidad de canal

$$C = \max_{p_X(x_i)} I(X,Y) \text{ bits/uso}$$

  - Ejemplo: Canal binario simétrico (BER=ε)



$$C = 1 - H_b(\varepsilon) \text{ bits/uso}$$

Ejemplo - Canal binario simétrico

- Modelo para canal digital binario con $BER = \varepsilon$
- Cálculo de la información mutua entrada / salida

$$\begin{aligned}
I(X,Y) =& H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i)\; H(Y|X = x_i) \\
=& H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i) \left[- \sum_{j=0}^{1} p_{Y|X}(y_j|x_i)\; \log p_{Y|X}(y_j|x_i) \right] \\
=& H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i)\; [-\varepsilon\; \log(\varepsilon) - (1-\varepsilon)\; \log(1-\varepsilon)] \\
=& H(Y) - \sum_{i=0}^{1} p_X(x_i)\; H_b(\varepsilon) = H(Y) - H_b(\varepsilon)
\end{aligned}$$

- Cálculo de la capacidad de canal
  - Se busca el máximo de la información mutua
    - ★ Para este canal, se obtiene cuando $H(Y)$ es máxima
    - ★ $H(Y)$ es máxima cuando los símbolos de salida son equiprobables
    - ★ Para este canal, ocurre cuando los símbolos de entrada son equiprobables

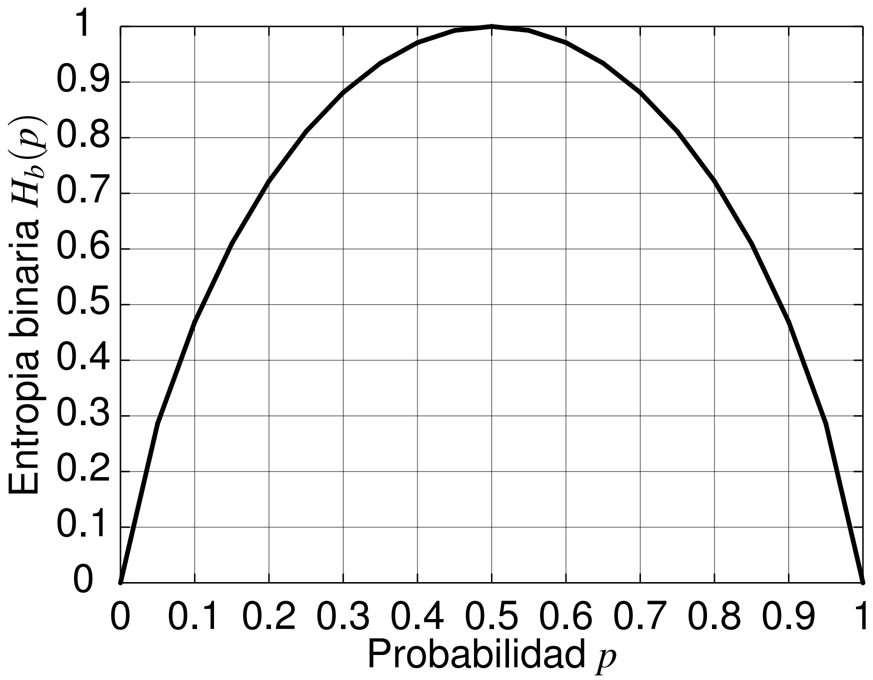
$$\boxed{C = 1 - H_b(\varepsilon)}$$

  - Probabilidades de X que maximizan $I(X,Y)$: $p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{1}{2}$

Entropía binaria $H_b(p)$

Entropía de una v.a. binaria con $p_X(x_0) = p$ y $p_X(x_1) = 1 - p$

$$H_b(p) = -p \ \log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$



Capacidad de canal para el canal gausiano

- Modelo de relación entrada salida en un canal gausiano

$$Y = X + Z$$

  Z es una variable aleatoria gausiana, de media nula y varianza P_Z
- Capacidad de canal en las siguientes condiciones:
  - Potencia transmitida: P_X watt.
  - Ancho de banda: B Hz
    - Potencia de ruido: $P_Z = N_0 B$ watt.
- Cálculo a través de la información mutua

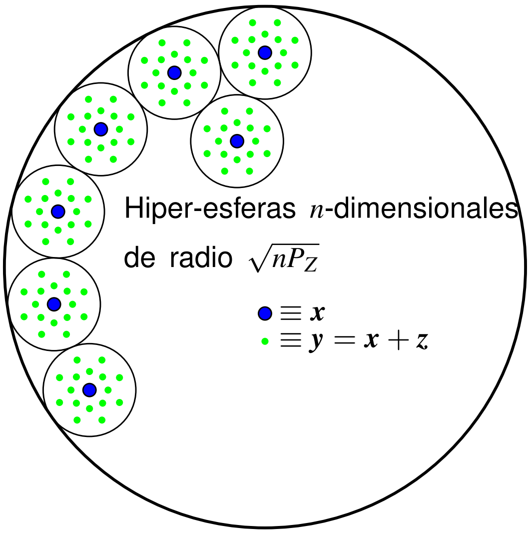
$$C = \max_{f_X(x) \ | \ E[X^2] \leq P_X} I(X,Y)$$

  Restricción $E[X^2] \leq P_X$ dada por la limitación en potencia
- Resultado

$$C = B \ \log\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/s}$$

  Se obtiene para $f_X(x)$ gausiana

Capacidad de canal para canal gausiano (II)



Hiper-esfera n-dimensional de radio $\sqrt{n(P_X + P_Z)}$

Capacidad sobre canal gausiano en las siguientes condiciones:

- Potencia transmitida: P_X watt.
- Ancho de banda: B Hz
  - Potencia de ruido: $P_Z = N_0 B$ watt.

Capacidad obtenida a partir del número de secuencias sin solapamiento

$$M_{ss} = \left(1 + \frac{P_X}{P_Z}\right)^{n/2}$$

$$C = \frac{\log M_{ss}}{n} = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_X}{P_Z}\right)$$

$$C = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/uso}$$

$$\boxed{C = B \log\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/s}}$$

Evolución de la capacidad de canal

- Capacidad del canal gausiano

$$C = B \log\left(1 + \frac{P_X}{N_0 B}\right) \text{ bits/s}$$

- Depende de dos parámetros
  - Potencia de la señal transmitida, P_X
  - Ancho de banda disponible en Hz, B
- Capacidad de canal en función de la potencia transmitida P_X

$$\lim_{P_X \to \infty} C = \infty$$

  - Se puede aumentar C de forma arbitraria aumentando P_X
  - Aumento lineal de C requiere aumento exponencial de P_X
- Capacidad de canal en función del ancho de banda (B Hz)

$$\lim_{B \to \infty} C = \frac{P}{N_0} \log_2(e) = 1{,}44 \frac{P}{N_0}$$

  - El incremento de B no permite un incremento arbitrario de C

Límites para la transmisión en un canal gausiano

- Algunas definiciones
  - Tasa de transmisión binaria: R_b bits/s
  - Relación señal a ruido: $SNR = \frac{P_X}{P_Z} = \frac{P_X}{N_0 B}$
  - Tasa binaria (eficiencia) espectral: $\eta = \frac{R_b}{B}$ bits/s/Hz
  - Energía media por bit: $E_b = \frac{P_X}{R_b}$
  - Relación E_b/N_0: $\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_X}{R_b N_0} = \frac{P_X}{N_0 B} \times \frac{B}{R_b} = \frac{SNR}{\eta}$
- Sistema de comunicaciones práctico

$$R_b < C \rightarrow R_b < B \, \log\left(1 + SNR\right) \text{ bits/s}$$

  - Dividiendo por B en ambos lados y reordenando

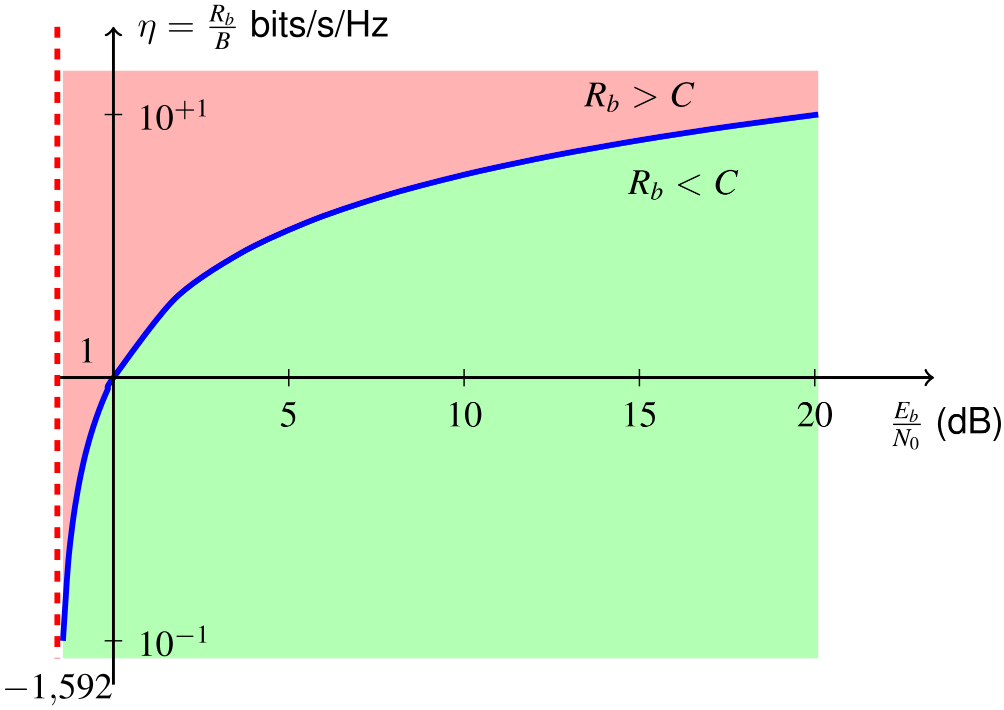
$$\eta < \log\left(1 + SNR\right), \qquad \eta < \log\left(1 + \eta \, \frac{E_b}{N_0}\right)$$

$$SNR > 2^{\eta} - 1, \qquad \frac{E_b}{N_0} > \frac{2^{\eta} - 1}{\eta}$$

Cuando $\eta \rightarrow 0$ $\qquad \frac{E_b}{N_0} = \ln 2 = 0{,}693 \approx -1{,}6$ dB

Tasa binaria espectral frente a E_b/N_0

- Se representa sobre el plano η vs $\frac{E_b}{N_0}$ la curva $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\eta}-1}{\eta}$
  - Divide el plano en dos regiones: sistemas con $R_b > C$ (prácticos) y con $R_b > C$



Relación señal a ruido normalizada

- Cota inferior para SNR

$$SNR > 2^{\eta} - 1$$

- Definición de SNR normalizada

$$SNR_{norm} = \frac{SNR}{2^{\eta} - 1}$$

- Cota inferior sobre SNR_{norm}

$$SNR_{norm} > 1 \text{ (0 dB)}$$

Tipos de códigos

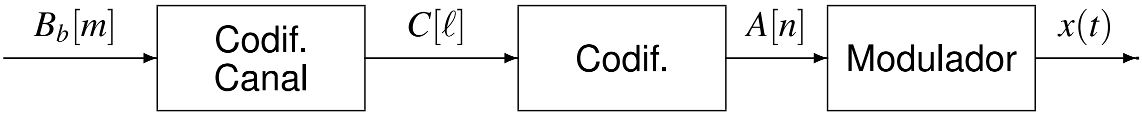
- Mecanismo de introducción de la redundancia
  - Códigos bloque
    - ⋆ Bloques de k bits se codifican de forma independiente
    - ⋆ Diccionario del código: k bits sin codificar / n bits codificados
    - ⋆ Concepto clave: distancia entre palabras código
    - ⋆ Ejemplo: código de repetición de orden $n-1$

Bits sin codificar ($k=1$)	Bits codificados (n)
1	11...1
0	00...0

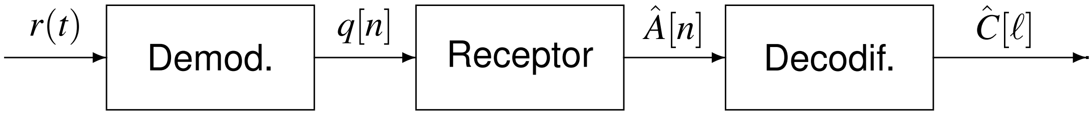
  - Códigos convolucionales
    - ⋆ Codificación continua mediante filtrado digital
- Capacidad del código
  - Códigos de detección de errores
  - Códigos de corrección de errores
- Estadístico para la decisión
  - Salida dura: decodificación a partir de los bits decididos $\hat{C}[\ell]$
  - Salida blanda: decodificación a partir de la salida del demodulador $q[n]$
    - ⋆ Mejores prestaciones pero mayor complejidad
  - Borrado de bits: se "marcan" los bits/símbolos dudosos

Salida blanda / salida dura

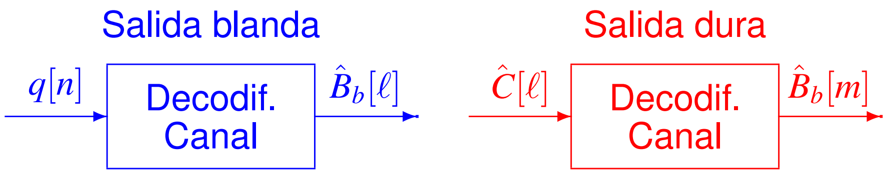
- Diagrama de bloques del transmisor



- Diagrama de bloques del receptor



- Decodificador de canal: salida blanda / salida dura



$B_b[m]$: bits de información (sin codificar)
$C[\ell]$: bits codificados

Salida dura / salida blanda

- Ejemplo: código repetición orden 2, modulación 2-PAM
  - Asignación binaria sobre la constelación: $0 \equiv -1$ / $1 \equiv +1$
  - Observación blanda: $\boldsymbol{q} = \{-0{,}01,\ +1{,}2,\ -0{,}05\}$
  - Observación dura: $\hat{\boldsymbol{c}} = \{0,\ 1,\ 0\}$
- Decodificación
  - Decodificación dura: por mayoría $\hat{B} = 0$
  - Decodificación blanda: comparar la observación $\boldsymbol{q}$ con $\boldsymbol{q}_0\{-1,-1,-1\}$ y con $\boldsymbol{q}_1\{+1,+1,+1\}$

$$d(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_0) = \sqrt{(-0{,}01-(-1))^2 + (+1{,}2-(-1))^2 + (-0{,}05-(-1))^2} = 2{,}59$$

$$d(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1) = \sqrt{(-0{,}01-(+1))^2 + (+1{,}2-(+1))^2 + (-0{,}05-(+1))^2} = 1{,}47$$

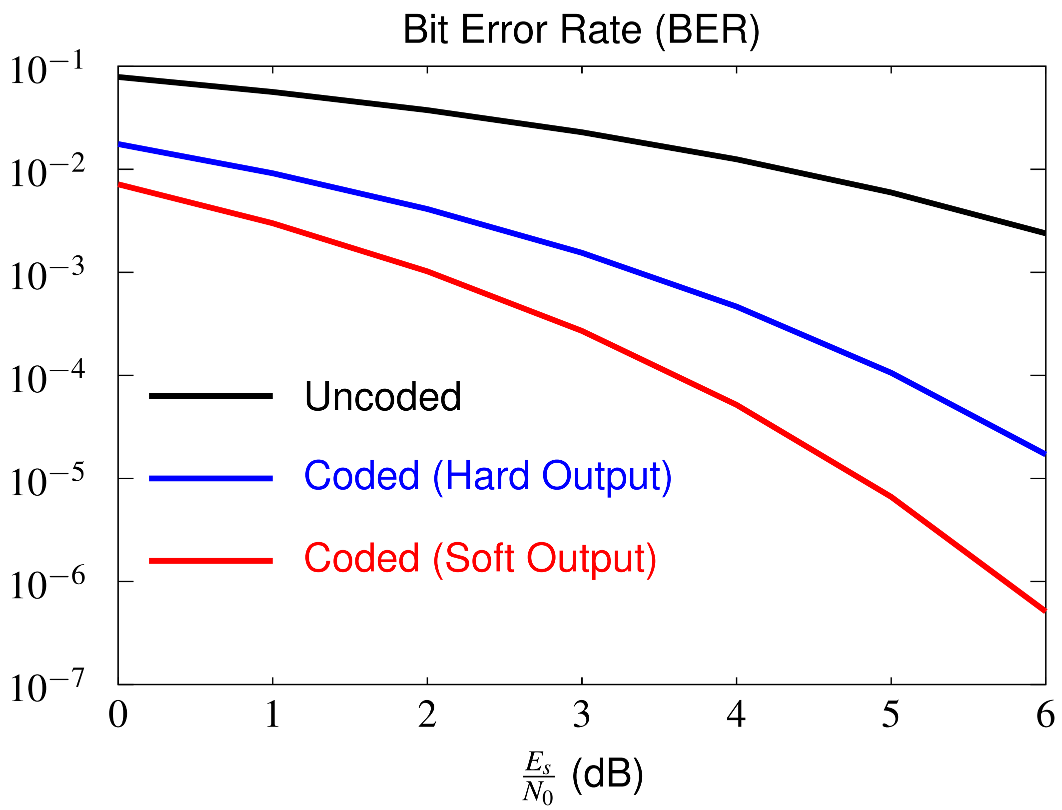
- Probabilidad de error para una BER=ε sobre la 2-PAM
  - Salida dura

$$P_e^{Dura} = 3\,\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3, \qquad \varepsilon = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

  - Salida blanda

$$P_e^{Blanda} = Q\left(\frac{d(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{6E_s}{N_0}}\right)$$

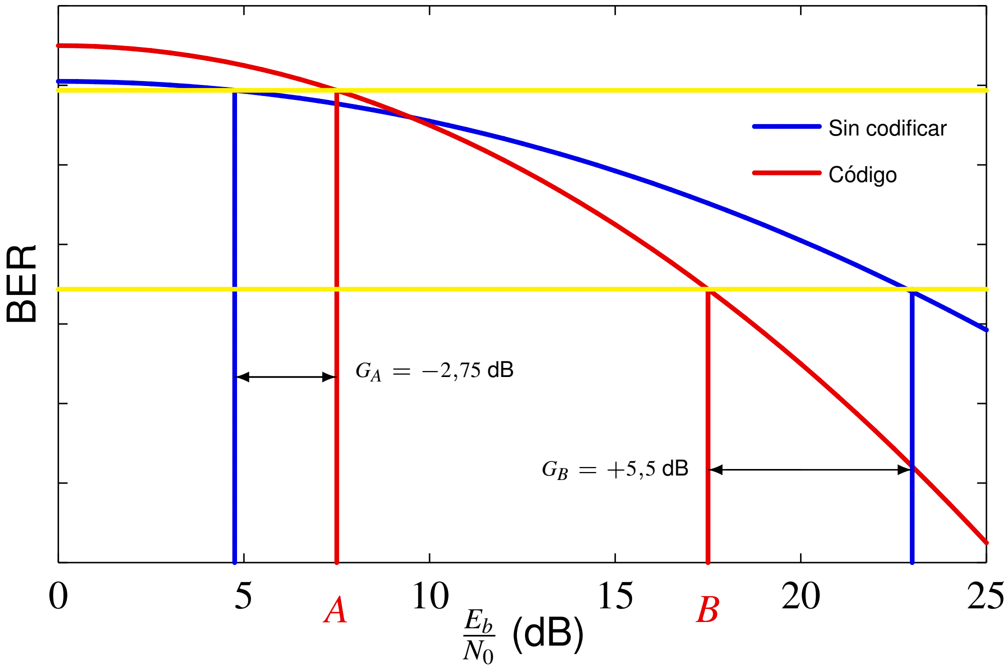
Salida dura / salida blanda



Ganancia de codificación

- Definición: diferencia en decibelios entre las relaciones E_b/N_0 necesarias para alcanzar una determinada BER sin codificar y utilizando la codificación
  - E_b: Energía media por bit de información
- Permite comparar las prestaciones de distintos códigos
- Depende de la BER (o de E_b/N_0)
  - Habitualmente se referencia a un valor concreto de E_b/N_0
- Puede ser positiva a partir de un cierto valor de E_b/N_0

Ganancia de codificación



$A = 7{,}5$ dB $\qquad B = 17{,}5$ dB

Códigos bloque - Definiciones

- Codificación independiente de bloques de k bits
  - Conversión en bloques de n bits $\rightarrow$ Tasa $R = k/n$
- Definiciones para los bloques de bits
  - Información:

$$\boldsymbol{b}_i = [b_i[0], b_i[1], \cdots, b_i[k-1]],\ i = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

  - Codificados:

$$\boldsymbol{c}_i = [c_i[0], c_i[1], \cdots, c_i[n-1]],\ i = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

  - Diccionario del código: mensaje (palabra sin codificar) $\rightarrow$ palabra código

$$\boldsymbol{b}_i \rightarrow \boldsymbol{c}_i$$

- Peso de una palabra código $w(\boldsymbol{c}_i)$
  - Número de unos de la palabra
- Distancia de Hamming entre dos palabras código $d^H(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)$
  - Número de bits diferentes entre ambas palabras
- Distancia mínima del código: $d^H_{min} \equiv d_{min}$
  - Mínima distancia de Hamming entre dos palabras código distintas

Codigos bloque - Ejemplo

- Diccionario del código para un código bloque $k = 2$ $n = 6$

i	$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

- Peso de las palabras

$$w(\boldsymbol{c}_0) = 3, \quad w(\boldsymbol{c}_1) = 3, \quad w(\boldsymbol{c}_2) = 2, \quad w(\boldsymbol{c}_3) = 4,$$

- Distancias de Hamming entre dos palabras

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1) =& 4, \quad d(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = 5 \\ d(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_2) =& 3, \quad d(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3) = 3 \\ d(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_3) =& 5, \quad d(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = 4 \end{aligned}$$

- Distancia mínima del código

$$d_{min} = 3$$

Estimador óptimo - Salida dura

- Observación condicionada a la transmisión de $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{e}, \ \boldsymbol{e} = [e[0], e[1], \cdots, e[n-1]]$$

- Modelo probabilístico del patrón de error (BER = ε)

$$p_{E[j]}(e[j]) = \varepsilon^{e[j]} \ (1-\varepsilon)^{1-e[j]} = \begin{cases} \varepsilon, & e[j] = 1 \\ 1-\varepsilon, & e[j] = 0 \end{cases}$$

- Verosimilitud (probabilidad condicional de la observación)
  - Error: $e[j] = r[j] - c[j]$
  - Verosimilitud para cada bit dado el bit de la observación $r[j]$

$$p_{R[j]|C[j]}(r[j]|c[j]) = \varepsilon^{e[j]} \ (1-\varepsilon)^{1-e[j]} = \varepsilon^{r[j]-c_i[j]} \ (1-\varepsilon)^{1-(r[j]-c_i[j])}$$

  - Verosimilitud de una palabra código para la observación $\boldsymbol{r}$

$$p_{\boldsymbol{R}|\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{c}_i) = \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{r[j]-c_i[j]} \ (1-\varepsilon)^{1-(r[j]-c_i[j])}$$

- Estimador de máxima verosimilitud (ML)

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}_i = \arg \min_{\boldsymbol{c}_i} d^H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}_i)$$

Capacidades de detección y corrección con salida dura

- Prestaciones dependen de distancias de Hamming
  - Un error no será detectado si los errores de transmisión lo transforman en otra palabra del código
  - Un error ocurre cuando el número de errores en la transmisión de la palabra codificada hace que la palabra recibida esté a una menor distacia de Hamming de otra palabra del código
- Prestaciones determinadas por la distancia mínima del código: d_{min}
  - Capacidad de detección:

$$d = d_{min} - 1 \text{ errores}$$

  - Capacidad de corrección:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \text{ errores}$$

Estimador óptimo - Salida blanda

- Constelación: M símbolos ($m = \log_2(M)$ bits/símbolo
- Secuencia de símbolos para una palabra código

$$\boldsymbol{c}_i \rightarrow \boldsymbol{A}_i = [A_i[0], A_i[1], \cdots, A_i[n'-1]], \; n' = \frac{n}{m}$$

- Modelo probabilístico de la observación condicionada a transmitir $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{e}, \; \boldsymbol{e} = [e[0], e[1], \cdots, e[n'-1]]$$

- Modelo probabilístico del error:

$$f_E(e[j]) = N(0, \sigma_z^2)$$

- Verosimilitud (probabilidad condicional de la observación):

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_i) = N(\boldsymbol{A}_i, \sigma_z^2)$$

- Estimador de máxima verosimilitud: minimizar distancia euclídea

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}_i, \quad i = \arg\min_i d^E(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_i)$$

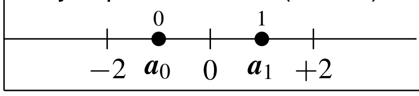
Ejemplo de código bloque y asignación de símbolos

- Diccionario del código para un código bloque $k=2$ $n=6$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

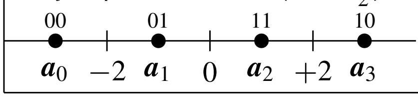
- Asignación de símbolos depende de la constelación y asignación binaria

Ejemplo A: 2-PAM ($n'=n$)



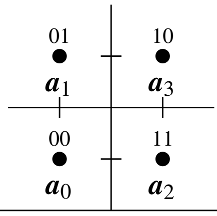
$$\begin{aligned}
A_0 &= [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0] = [-1,-1,+1,+1,+1,-1]\\
A_1 &= [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1] = [-1,+1,-1,-1,+1,+1]\\
A_2 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0] = [+1,-1,-1,+1,-1,-1]\\
A_3 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1] = [+1,+1,+1,-1,-1,+1]
\end{aligned}$$

Ejemplo B: 4-PAM ($n'=\frac{n}{2}$)



$$\begin{aligned}
A_0 &= [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = [-3,+1,+3]\\
A_1 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2] = [-1,-3,+1]\\
A_2 &= [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0] = [+3,-1,-3]\\
A_3 &= [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = [+1,+3,-1]
\end{aligned}$$

Ejemplo C: 4-QAM ($n'=\frac{n}{2}$)



$$\begin{aligned}
A_0 &= [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \left[\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix}\right]\\
A_1 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2] = \left[\begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}\right]\\
A_2 &= [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0] = \left[\begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right]\\
A_3 &= [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = \left[\begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix}\right]
\end{aligned}$$

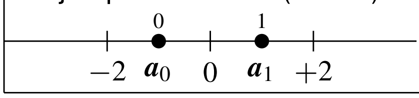
Ejemplo de decodificación sobre salida blanda

- Diccionario del código para un código bloque $k=2$ $n=6$

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

- Asignación de símbolos

Ejemplo A: 2-PAM ($n'=n$)



$$\begin{aligned}
A_0 &= [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0] = [-1,-1,+1,+1,+1,-1]\\
A_1 &= [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1] = [-1,+1,-1,-1,+1,+1]\\
A_2 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0] = [+1,-1,-1,+1,-1,-1]\\
A_3 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1] = [+1,+1,+1,-1,-1,+1]
\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5
$q[n]$	+0,8	−1,2	−0,7	+0,2	−0,5	−1,1

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{q},A_0) &= \sqrt{(+0{,}8-(-1))^2+(-1{,}2-(-1))^2+(-0{,}7-(+1))^2+(+0{,}2-(+1))^2+(-0{,}5-(+1))^2+(-1{,}1-(-1))^2} = \sqrt{9{,}07}\\
d(\mathbf{q},A_1) &= \sqrt{(+0{,}8-(-1))^2+(-1{,}2-(+1))^2+(-0{,}7-(-1))^2+(+0{,}2-(-1))^2+(-0{,}5-(+1))^2+(-1{,}1-(+1))^2} = \sqrt{16{,}27}\\
d(\mathbf{q},A_2) &= \sqrt{(+0{,}8-(+1))^2+(-1{,}2-(-1))^2+(-0{,}7-(-1))^2+(+0{,}2-(+1))^2+(-0{,}5-(-1))^2+(-1{,}1-(-1))^2} = \sqrt{1{,}07}\\
d(\mathbf{q},A_3) &= \sqrt{(+0{,}8-(+1))^2+(-1{,}2-(+1))^2+(-0{,}7-(+1))^2+(+0{,}2-(-1))^2+(-0{,}5-(-1))^2+(-1{,}1-(+1))^2} = \sqrt{13{,}87}
\end{aligned}$$

Decisión: $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_2 = 100100$

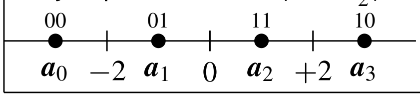
Ejemplo de decodificación sobre salida blanda (II)

- Diccionario del código para un código bloque $k = 2$ $n = 6$

i	$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0	00	001110
1	01	010011
2	10	100100
3	11	111001

- Asignación de símbolos

Ejemplo B: 4-PAM ($n' = \frac{n}{2}$)



$$\begin{aligned}
A_0 &= [a_0, a_2, a_3] = [-3, +1, +3] \\
A_1 &= [a_1, a_0, a_2] = [-1, -3, +1] \\
A_2 &= [a_3, a_1, a_0] = [+3, -1, -3] \\
A_3 &= [a_2, a_3, a_1] = [+1, +3, -1]
\end{aligned}$$

n	0	1	2
$q[n]$	$+0{,}8$	$+2{,}2$	$-0{,}7$

$$d(\boldsymbol{q}, A_0) = \sqrt{(+0{,}8-(-3))^2 + (+2{,}2-(+1))^2 + (-0{,}7-(+3))^2} = \sqrt{29{,}57}$$

$$d(\boldsymbol{q}, A_1) = \sqrt{(+0{,}8-(-1))^2 + (+2{,}2-(-3))^2 + (-0{,}7-(+1))^2} = \sqrt{33{,}17}$$

$$d(\boldsymbol{q}, A_2) = \sqrt{(+0{,}8-(+3))^2 + (+2{,}2-(-1))^2 + (-0{,}7-(-3))^2} = \sqrt{20{,}37}$$

$$d(\boldsymbol{q}, A_3) = \sqrt{(+0{,}8-(+1))^2 + (+2{,}2-(+3))^2 + (-0{,}7-(-1))^2} = \sqrt{0{,}77}$$

Decisión: $\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}_3 = 111001$

Códigos bloque lineales

- Código $C(k, n)$
- Base del código: k palabras código linealmente independientes

$$\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_{k-1}\}$$

$$\boldsymbol{g}_i = [g_i[0], g_i[1], \cdots, g_i[n-1]]$$

- Palabra código: combinación lineal de los k elementos de la base

$$\boldsymbol{c}_i = b_i[0]\,\boldsymbol{g}_0 + b_i[1]\,\boldsymbol{g}_1 + \cdots + b_i[k-1]\,\boldsymbol{g}_{k-1}$$

  Coeficientes de la expansión: k bits de información (sin codificar) $b_i[\ell]$

- Propiedades
  - Todos los elementos de la base pertenencen al código

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{g}_\ell \rightarrow w(\boldsymbol{b}_i) = 1, \quad b_i[\ell] = 1$$

  - $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{0} = [0, 0, \cdots, 0]$ pertenece al código
    - Asociada a $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0} = [0, 0, \cdots, 0]$
  - Toda combinación lineal de palabras código $\in C(k, n)$
  - Todas las palabras del código tienen a otra palabra a distancia d_{min}
  - Por tanto, $\boldsymbol{c}_0$ tiene otra palabra a d_{min}

$$d_{min} = \min_{\boldsymbol{c}_i \neq \boldsymbol{c}_0} w(\boldsymbol{c}_i)$$

Matriz generadora del código

- Agrupación de la base en una matriz $k \times n$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_0 \\ \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0[0] & g_0[1] & \cdots & g_0[n-1] \\ g_1[0] & g_1[1] & \cdots & g_1[n-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1}[0] & g_{k-1}[1] & \cdots & g_{k-1}[n-1] \end{bmatrix}$$

- Obtención de las palabras código

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i\, \boldsymbol{G}$$

- Códigos sistemáticos: el mensaje $\boldsymbol{b}_i$ forma parte de $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{c}_i = [\boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{p}_i] \;\rightarrow\; \boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I}_k | \boldsymbol{P}]$$

$$\boldsymbol{c}_i = [\boldsymbol{p}_i | \boldsymbol{b}_i] \;\rightarrow\; \boldsymbol{G} = [\boldsymbol{P} | \boldsymbol{I}_k]$$

Matriz generadora del código - Ejemplo

- Código $C(2,5)$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Palabras código

$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	1 0 1 0 1
1 0	0 1 1 1 0
1 1	1 1 0 1 1

- Código sistemático
- Distancia mínima del código: $d_{min} = 3$
  - Detecta 2 errores
  - Corrige 1 error

Matriz de chequeo de paridad

- Matriz $(n-k) \times n$: complemento ortogonal de $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{0} \text{ matriz de } k \times (n-k) \text{ ceros}$$

- Códigos sistemáticos

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I}_k|\boldsymbol{P}] \;\rightarrow\; \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{P}^T|\boldsymbol{I}_{n-k}]$$

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{P}|\boldsymbol{I}_k] \;\rightarrow\; \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{I}_{n-k}|\boldsymbol{P}^T]$$

- Identificación de palabras código

$$\boldsymbol{c}_i\,\boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{b}_i\,\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{0} \text{ vector de } n-k \text{ ceros}$$

- Decodificación mediante síndrome
  - Modelo de transmisión: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e}$: patrón de error)
  - Síndrome

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{H}^T = (\boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{H}^T$$

  - Decodificación: Tabla de síndromes

Matriz de chequeo de paridad y tabla de síndromes - Ejemplo

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Tabla de síndromes

$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{s}$
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0
0 0 1 0 0	0 0 1
0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1	1 0 1
¿?	1 1 0
¿?	1 1 1

$110 \rightarrow \boldsymbol{e}_1 = 11000,\ \boldsymbol{e}_2 = 00011,\ \boldsymbol{e}_3 = 10110,\ \boldsymbol{e}_4 = 01101$

Solución: elegir uno de los dos patrones de dos errores

Decodificación por síndrome

- Proceso de decodificación alternativo y equivalente a máxima verosimilitud sobre salida dura
- Pasos a seguir
  1. Cálculo del síndrome
  $$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{H}^T$$
  2. Identificación del patrón de error (tabla de síndromes)
  $$\boldsymbol{s} \rightarrow \boldsymbol{e}$$
  3. Corrección de errores (decisión de palabra código)
  $$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{c}_i$$
  4. Decodificación
  $$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}_i \rightarrow \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}_i$$
  Más sencillo en códigos sistemáticos

Ventaja de trabajar con G y H

- Número de palabras del código: 2^k
  - $k = 2$, $n = 5$: 4 palabras
  - $k = 247$, $n = 255$: $2^{247} \approx 2{,}26\ 10^{74}$ palabras
- Número de síndromes posibles
  - $k = 2$, $n = 5$ $(t = 1)$: 8 síndromes
  - $k = 247$, $n = 255$ $(t = 1)$: 256 síndromes

Método de eliminación - Ejemplo

- Método para obtener una matriz de chequeo para un código no sistemático
- Sustitución de filas por combinaciones lineales de otras
  - 1ª fila: 1ª+2ª filas
  - 2ª fila: 1ª fila
- Código $C(2,5)$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Palabras código

$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	0 1 1 1 0
1 0	1 1 0 1 1
1 1	1 0 1 0 1

- Mismas palabras código / distintas asignaciones
  - La misma matriz $\boldsymbol{H}$ es válida para generar la tabla de síndromes

Límite de Hamming

- Número de síndromes con redundancia $r = n - k$:

$$2^{n-k} = 2^r$$

- Límite de Hamming: para corregir t errores la mínima redundancia necesaria es

$$r \geq \log_2 V(n,t), \;\; V(n,t) = \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j}$$

  - $V(n,t)$: Esfera de Hamming de radio t
- Interpretación con número de síndromes disponibles

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t} \leq 2^r$$

  - Igualdad: Códigos perfectos

Códigos perfectos

- Códigos de repetición (decisión por mayoría)
  - n impar, $k = 1$, $t = \frac{n-1}{2}$ ($d_{min} = n$)
- Códigos de Hamming
  - Para $m \geq 3$, $n = 2^m - 1$, $k = 2^m - m - 1$, $t = 1$ ($d_{min} = 3$)
  - Matriz de chequeo: en las columnas aparecen todas las posibles combinaciones binarias de $(n - k)$ bits, excepto la todo ceros
    - ★ Ejemplo: Código Hamming (4,7)

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Código de Golay
  - $n = 23$, $k = 12$, $t = 3$ ($d_{min} = 7$)

Código de Golay

- Matriz generadora sistemática

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1
\end{array}\right]$$

- Código de Golay extendido
  - Se añade un bit de paridad: $d_{min} = 8$, (detecta $d = 7$ errores)
    - ★ No es un código perfecto
  - Código $k = 12$, $n = 24$, tasa $R = \frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|cccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1
\end{array}\right]$$

Prestaciones - Decodificación dura

- Probabilidad de error de bit (BER) en la transmisión: ε
- Se comenten errores cuando se excede la capacidad de corrección del código
- Código de corrección de t errores

$$P_e = \sum_{e=t+1}^{n} \binom{n}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{n-e}$$

- Códigos que corrigen todos los patrones de t errores y a patrones de $t+1$ errores

$$P_e = \left[\binom{n}{t+1} - a\right] \varepsilon^{t+1} (1-\varepsilon)^{n-t-1} + \sum_{e=t+2}^{n} \binom{n}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{n-e}$$

- Codificación tipo Gray o pseudo-Gray para SNR alta

$$BER \approx \frac{1}{k} P_e$$

Prestaciones - Decodificación blanda

- Probabilidad de error

$$P_e \approx c\, Q\left(\frac{d_{min}^E}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- d_{min}^E: mínima distancia euclídea entre las secuencias de símbolos correspondientes a dos palabras código diferentes

$$d_{min}^E = \min_{j \neq i} d^E(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j)$$

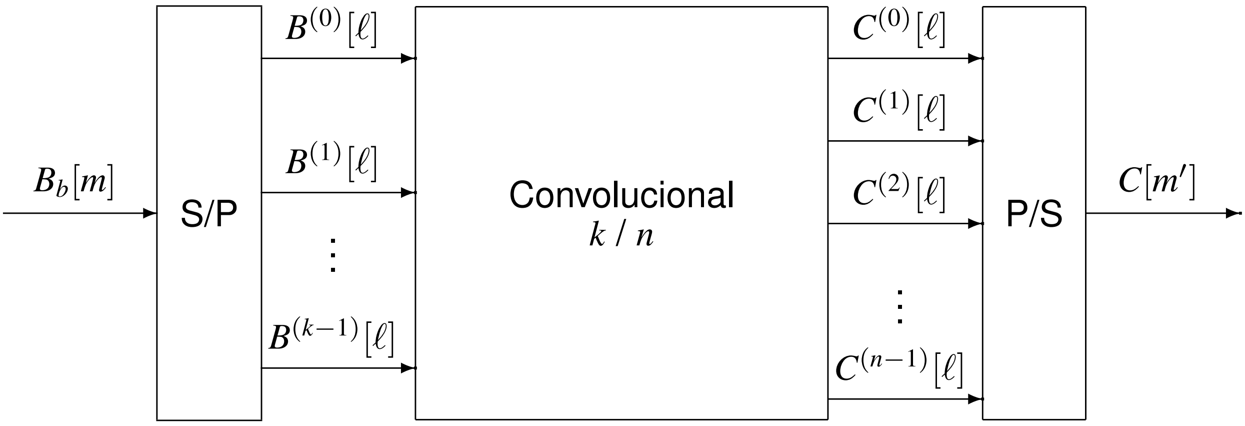
- c: máximo número de palabras cuyas secuencias de símbolos están a distancia mínima (euclídea) de la de una dada
- En general, d_{min}^E depende de la constelación y de la asignación binaria
  - Modulaciones binarias (constelación de 2 símbolos $\boldsymbol{a}_0$ y $\boldsymbol{a}_1$)

$$d^E(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) = d^E(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)\sqrt{d^H(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)}$$

$$P_e \approx c\, Q\left(\frac{d^E(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\sqrt{d_{min}^H}\right)$$

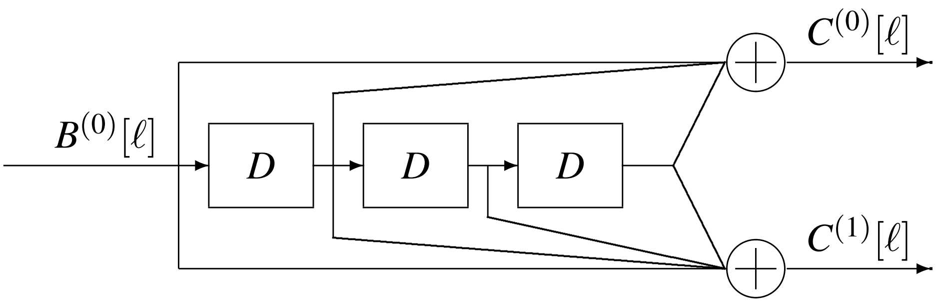
Códigos convolucionales

- Conversor serie / paralelo (S/P)
- Codificador convolucional
- Conversor paralelo / serie (P/S)



Códigos convolucionales

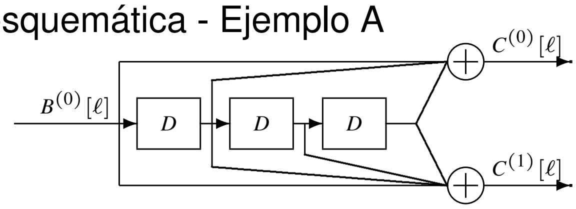
- Introducción de la redundancia mediante filtrado
  - Introducción de memoria
- Tasa $R = k/n$: banco de filtros con
  - k entradas
  - n salidas



- Notación:
  - Entradas: $B^{(i)}[\ell]$, con $i = 0, 1, \cdots, k-1$
  - Salidas: $C^{(j)}[\ell]$, con $j = 0, 1, \cdots, n-1$

Representaciones de los códigos convolucionales

- Representación esquemática - Ejemplo A



- Relación entrada salidas

$$C^{(0)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-3]$$

$$C^{(1)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-2] + B^{(0)}[\ell-3]$$

- Representación de secuencias con polinomios en D - Transformada D

$$B^{(i)}(D) = \sum_{\ell} B^{(i)}[\ell]\ D^{\ell}$$

  - Propiedad de la representación en D respecto a retardos

$$B^{(i)}[\ell-d] \leftrightarrow B^{(i)}(D)\ D^{d}$$

Representaciones de los códigos convolucionales (II)

- Notación mediante polinomios en D

$$C^{(0)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^3\right\}$$

$$C^{(1)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^2 + D^3\right\}$$

- Notación matricial (polinomios):

$$\boldsymbol{C}(D)_{1\times n} = \boldsymbol{B}(D)_{1\times k}\ \boldsymbol{G}(D)_{k\times n}$$

- Matriz generadora de tamaño $k \times n$
  - Cada elemento es un polinomio en D
  - Elemento fila i columna j: contribución a la salida j-ésima de la entrada i-ésima
  - Ejemplos
    - ★ Ejemplo anterior (A): $k = 1$, $n = 2$

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1 + D + D^3,\ 1 + D + D^2 + D^3\right]_{1\times 2}$$

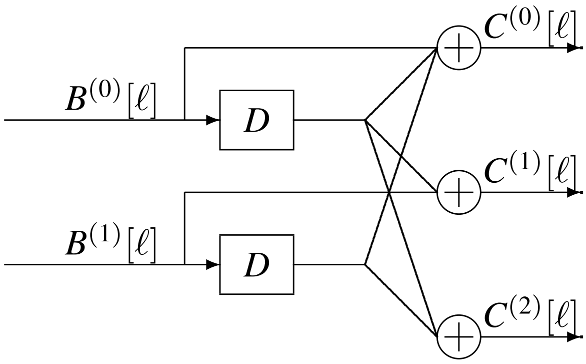
    - ★ Otro ejemplo (B): $k = 2$, $n = 3$

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Paso a representación esquemática - Ejemplo B

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

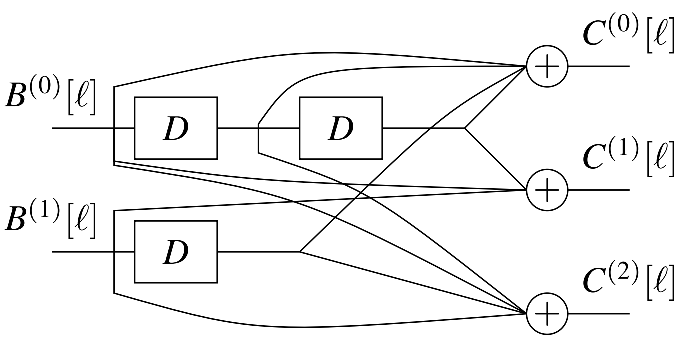
- Número de entradas del banco de filtros:
  - Número de filas de la matriz $G(D)$: $k = 2$
- Número de salidas del banco de filtros:
  - Número de columnas de la matriz $G(D)$: $n = 3$
- Número de memorias (elementos de retardo) de cada entrada:
  - Máximo grado de los polinomios en su correspondiente fila: : $M^{(0)} = 1$, $M^{(1)} = 1$



Paso a representación esquemática - Ejemplo C

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ D & 1 & 1+D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- Número de entradas del banco de filtros:
  - Número de filas de la matriz $G(D)$: $k = 2$
- Número de salidas del banco de filtros:
  - Número de columnas de la matriz $G(D)$: $n = 3$
- Número de memorias (elementos de retardo) de cada entrada:
  - Máximo grado de los polinomios en su correspondiente fila: : $M^{(0)} = 2$, $M^{(1)} = 1$



Parámetros de interés

- Memoria total del código: M_t
  - Número total de unidades de retardo (memorias)

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

  - Memoria de la entrada i-ésima:

$$M^{(i)} = \max_j \text{grado}(g_{i,j}(D))$$

- Longitud de restricción: K
  - Máxima longitud de la respuesta al impulso del codificador (máximo número de instantes de tiempo en los que un bit afecta a la salida del codificador)

$$K = 1 + \max_{i,j} \text{grado}(g_{i,j}(D)) = 1 + K_E$$

K_E: memoria de la respuesta al impulso del codificador
  - En general las prestaciones aumentan con K

Códigos sistemáticos

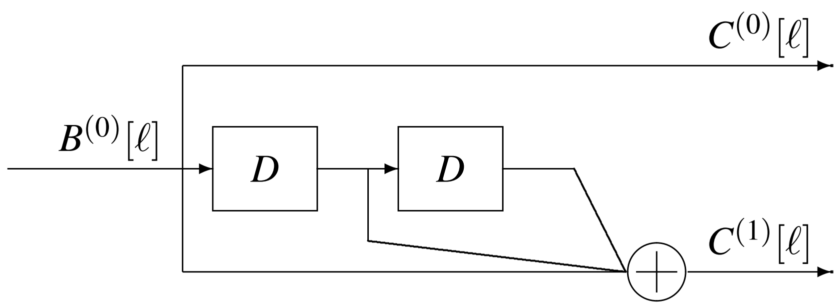
- Matriz de generación

$$\boldsymbol{G}(D) = [\boldsymbol{I}_k \ \boldsymbol{P}(D)]$$

$$\boldsymbol{G}(D) = [\boldsymbol{P}(D) \ |\boldsymbol{I}_k]$$

  - Las entradas se “copian” en algunas de las salidas
  - Ejemplo (D)

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1, \ 1 + D + D^2\right]$$



Códigos sistemáticos - otro ejemplo (E)

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D & 1 & 0 \\ D & 1 & 1+D & 0 & 1 \end{array}\right]$$

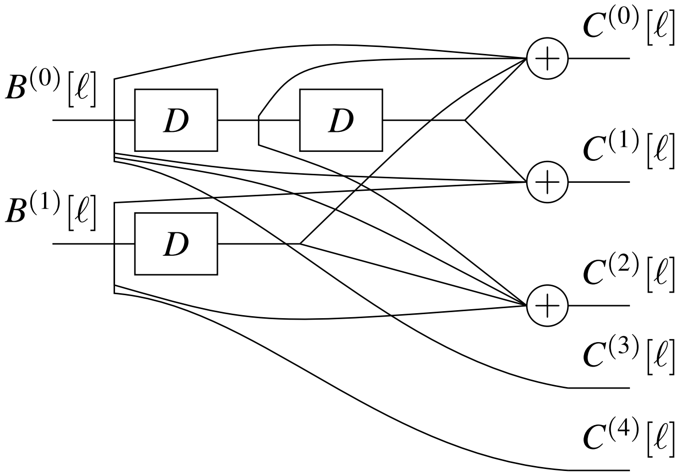


Diagrama de rejilla

- Definición del estado
  - Contenido de las memorias del codificador

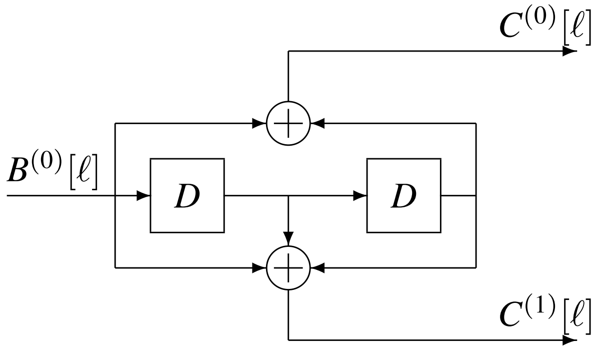
$$\psi[\ell] = [B^{(0)}[\ell-1], \cdots, B^{(0)}[\ell-M^{(0)}], \cdots, B^{(k-1)}[\ell-1], \cdots, B^{(k-1)}[\ell-M^{(k-1)}]]$$

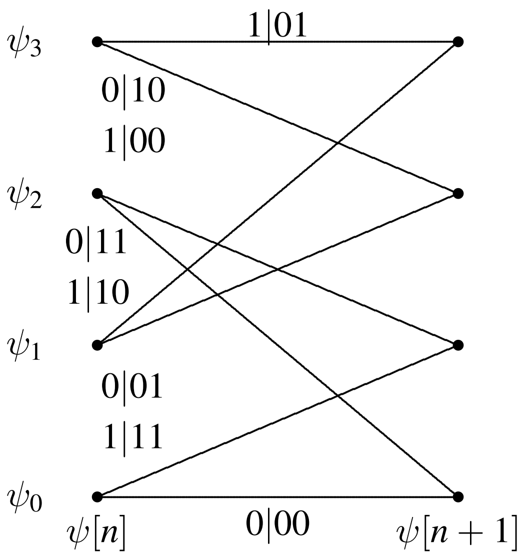
- Etiquetado de la rejilla
  - Bits a la entrada del codificador (sin codificar)
  - Bits a la salida del codificador (codificados)

$$B^{(0)}[\ell], B^{(1)}[\ell], \cdots B^{(k-1)}[\ell] \;\Big|\; C^{(0)}[\ell], C^{(1)}[\ell], \cdots C^{(n-1)}[\ell]$$

Ejemplo - Convolucional F

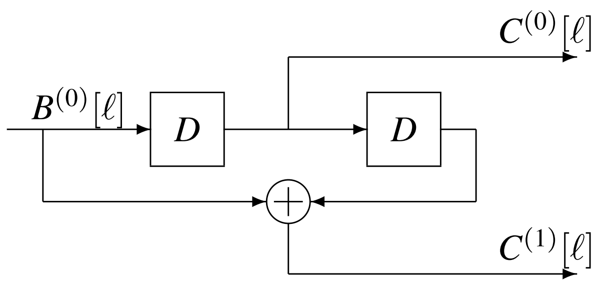
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$

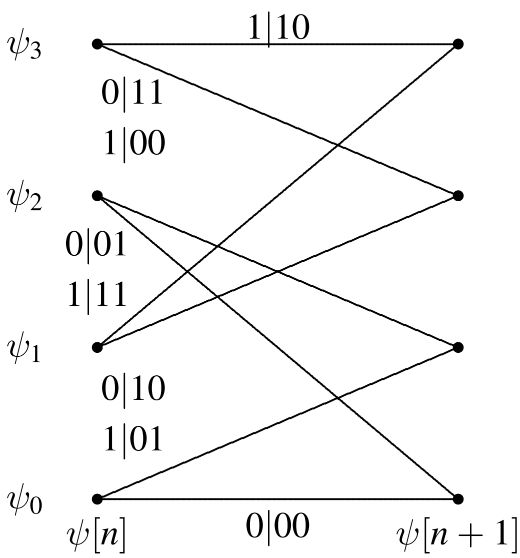




Ejemplo - Convolucional G

- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$





Cabecera y número de transiciones en la rejilla

- Codificación de L bloques de k bits ($k \times L$ bits)
  - Conversión serie / paralelo
    - ★ L instantes discretos para $B^{(i)}[\ell]$, $\ell \in \{0, 1, \cdots, L-1\}$
- Longitud de los bits codificados con información: $n \times L$
- Cabecera para inicializar el codificador
  - $k \times K_E$ ceros
    - ★ Ceros en todas las k entradas para K_E instantes discretos
    - ★ Estado inicial: $\psi[0] = \psi_0 = [0, 0, \cdots, 0]$
    - ★ Estado final: $\psi[L + K_E] = \psi_0 = [0, 0, \cdots, 0]$
- Número de transiciones sobre la rejilla

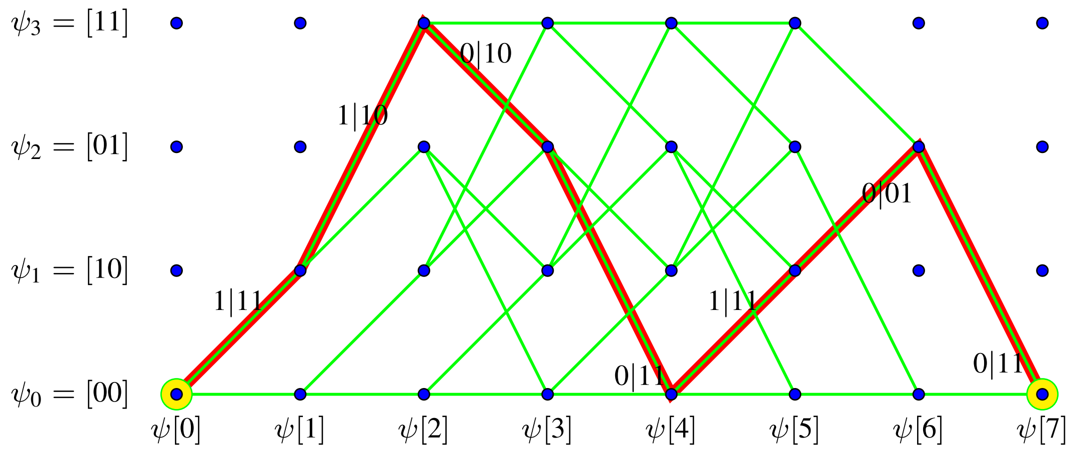
$$L + K_E \text{ transiciones}$$

- Longitud de bits codificados para $k \times L$ bits de información

$$\underbrace{n \times L}_{\text{bits info}} + \underbrace{n \times K_E}_{\text{bits cabecera}} = (L + K_E)n$$

Secuencia de bits : camino a través de la rejilla

- Convolucional F : $k = 1$, $n = 2$, $K_E = 2$
  - Cabecera de $k \times K_E$ ceros: 00
- Bloque de $k \times L$ bits, con $L = 5$: $2^{k \times L} = 2^5 = 32$ caminos
  - Ejemplo: $B[m] = 11001$



- Secuencia codificada: $n \times (L + K_E)$ bits

$$C[m'] = 11\ 10\ 10\ 11\ 11\ 01\ 11$$

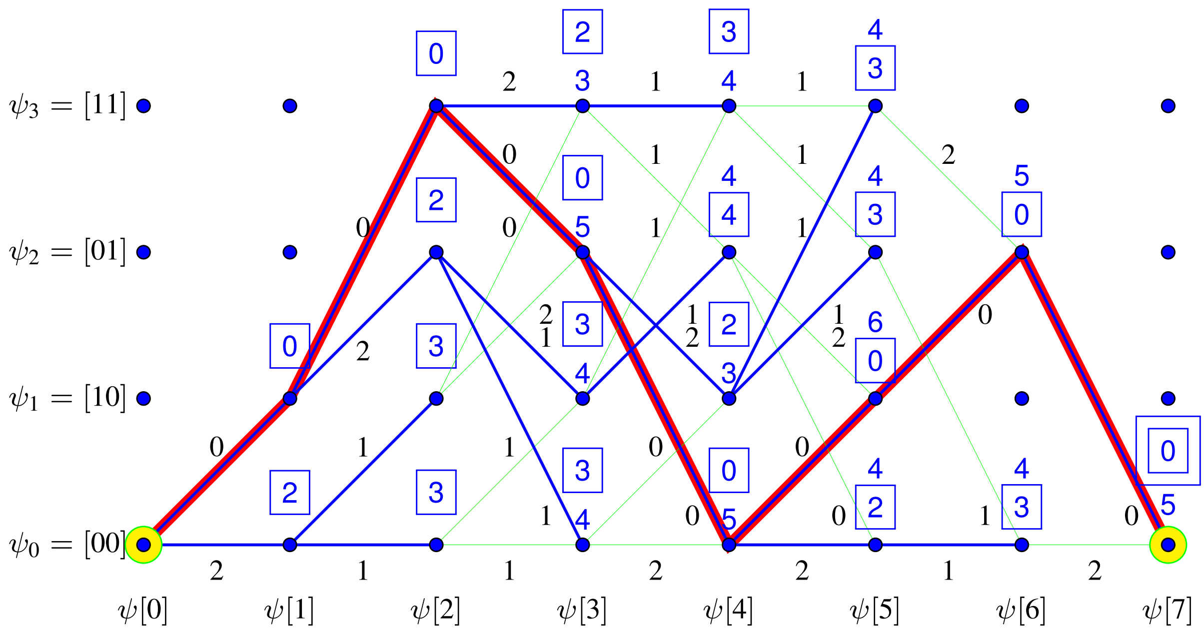
Decodificación - Algoritmo de Viterbi

- Recuperación de la secuencia más verosímil
- Estados inicial/final
  - Cabecera de referencia (habitualmente ceros "*bit flushing*")
- Salida dura: observación de bits decididos
  - Secuencia con el menor número de bits codificados distintos a la observación
  - Métrica de rama: distancia de Hamming con la observación
- Salida blanda: observación de $q[n]$
  - Secuencia cuyos símbolos asociados están a la menor distancia euclídea de la observación
  - Métrica de rama: $|q[n] - \boldsymbol{A}_i[n]|^2$
    - ★ Hay que tener en cuenta la constelación que se utiliza para hacer la conversión de las etiquetas de la rejilla básica a símbolos de la constelación ($\boldsymbol{A}_i[n]$)
  - Mejores prestaciones con salida blanda

Decodificación con salida dura (Conv. F)

- Secuencia recibida

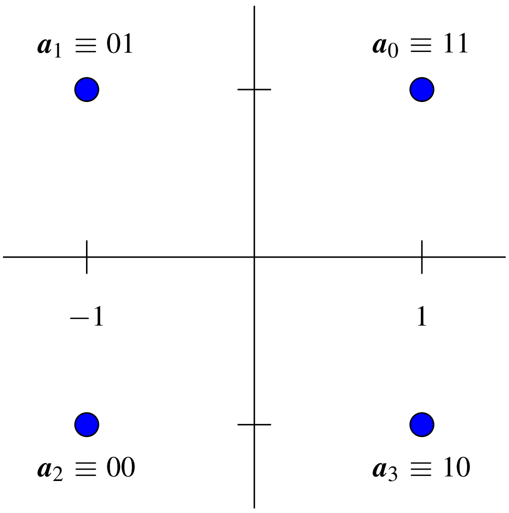
$$R[m'] = 11\ 10\ 10\ 11\ 11\ 01\ 11$$

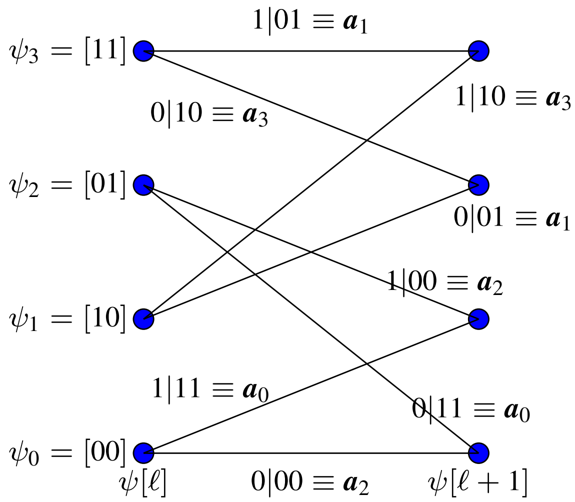


$\hat{B}[0] = 1$ $\hat{B}[1] = 1$ $\hat{B}[2] = 0$ $\hat{B}[3] = 0$ $\hat{B}[4] = 1$

Decodificación con salida blanda - Métrica (Conv. F)

- Dependencia de la constelación y asignación binaria
- Ejemplo 4-QAM

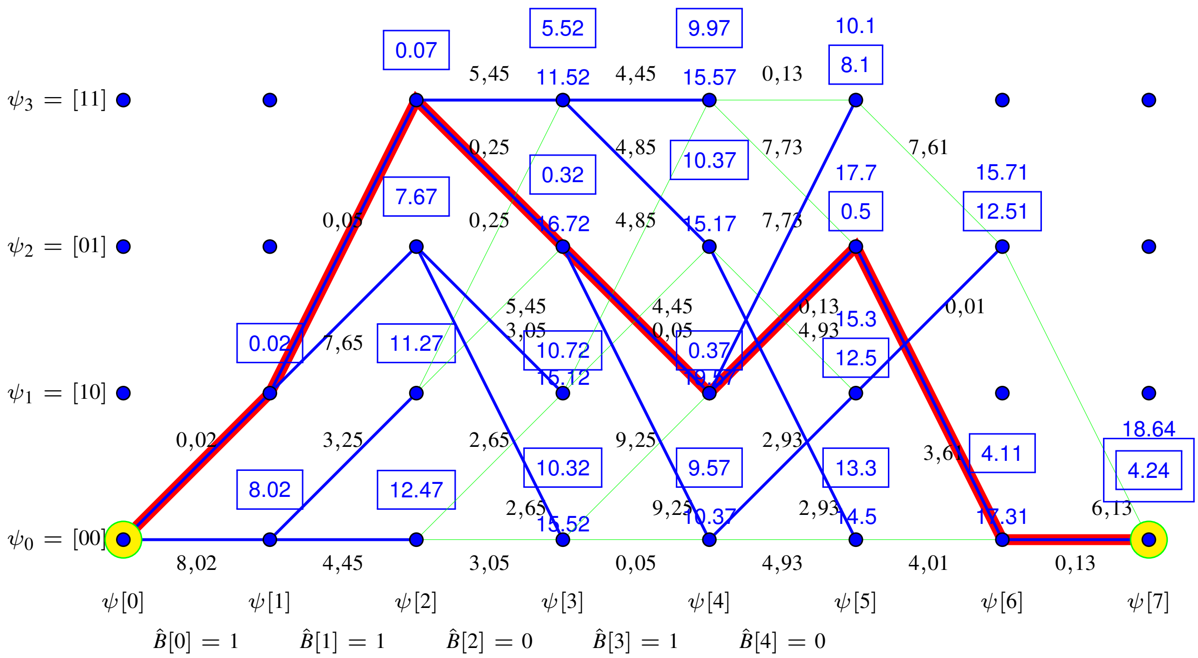




Decodificación con salida blanda - Ejemplo

- Secuencia recibida

$$q[m] = \begin{bmatrix} +1{,}1 \\ +0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0{,}7 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ +1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}9 \\ +1{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0{,}8 \\ +0{,}7 \end{bmatrix}$$



Prestaciones

- Salida dura

$$P_e \approx c \sum_{e=t+1}^{n\,z} \binom{n\,z}{e} \varepsilon^e \, (1-\varepsilon)^{n\,z-e}$$

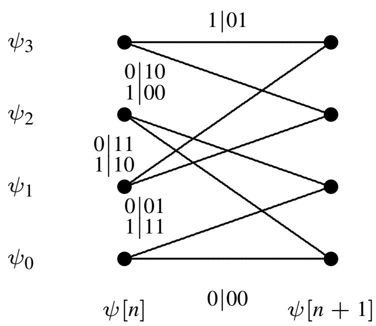
  - D_{min}^H: mínima distancia de Hamming entre salidas para secuencias distintas
  - z: longitud del evento erróneo de distancia mínima
  - $t = \left\lfloor \frac{D_{min}^H - 1}{2} \right\rfloor$ (capacidad de corrección sobre $n\,z$ bits)
  - ε: probabilidad de error de bit del sistema (BER)
- Salida blanda

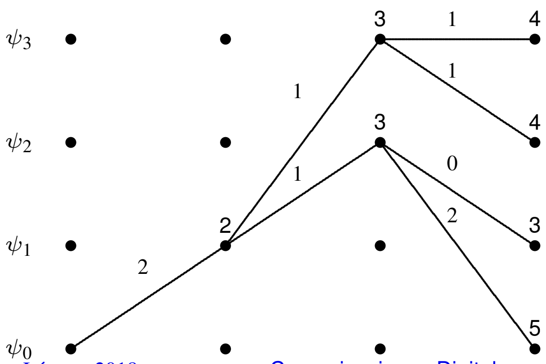
$$P_e \approx c\, Q\left(\frac{D_{min}^E}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - D_{min}^E: mínima distancia euclídea entre salidas para secuencias distintas

Calculo de D_{min}^H

- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos





$$D_{min}^H = 5$$

$$z = 3$$

Códigos concatenados

- Un código complejo puede en ocasiones obtenerse mediante la concatenación de dos códigos más simples
  - Concatenación en serie de dos códigos
  - Codigo entrada (interno) $\mathcal{C}_1(k_1, n_1)$, tasa $R_1 = k_1/n_1$
  - Codigo salida (externo) $\mathcal{C}_2(k_2, n_2)$, tasa $R_2 = k_2/n_2$
  - Tasa del código concatenado

$$R_c = \frac{k_1\ k_2}{n_1\ n_2} = R_1 \times R_2.$$

- Relación de tamaños más habituales
  - Caso $n_1/k_2 = c \in \mathbb{Z}$
    - ★ En este caso hay un código equivalente $\mathcal{C}_c(k_1, c\ n_2)$
  - Caso $k_2/n_1 = c \in \mathbb{Z}$
    - ★ En este caso hay un código equivalente $\mathcal{C}_c(c\ k_1, n_2)$

Ejemplo con códigos bloque

- Códigos $\mathcal{C}_1(2,3)$, $\mathcal{C}_2(3,6)$

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix} \equiv$$

i	$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0	00	000
1	01	011
2	10	101
3	11	110

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001111 \end{bmatrix} \equiv$$

i	$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0	000	000000
1	001	001111
2	010	010101
3	011	011010
4	100	100011
5	101	101100
6	110	110110
7	111	111001

- Código concatenado $\mathcal{C}_c(2,6) = \mathcal{C}_1(2,3) - \mathcal{C}_2(3,6)$

i	$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0	00	000000
1	01	011010
2	10	101100
3	11	110110

$$\equiv \boldsymbol{G}_c = \begin{bmatrix} 101100 \\ 011010 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_c = \boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2, \text{ ya que } k_2 = n_1$$

Ejemplo con códigos bloque (II)

- Código concatenado $\mathcal{C}_c(3,12) = \mathcal{C}_2(3,6) - \mathcal{C}_2(3,6)$

i	$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$	
0	000	000000	000000
1	001	001111	111001
2	010	010101	101100
3	011	011010	010101
4	100	100011	011010
5	101	101100	100011
6	110	110110	110110
7	111	111001	001111

$$\equiv \boldsymbol{G}_c = \begin{bmatrix} 100011011010 \\ 010101101100 \\ 001111111001 \end{bmatrix}$$

Ejemplo con códigos convolucionales

- Códigos $\mathcal{C}_1(1,2)$, $\mathcal{C}_2(2,4)$

$$\boldsymbol{G}_1(D) = [1, D], \quad \boldsymbol{G}_2(D) = \begin{bmatrix} 1, & 1+D, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 1+D \end{bmatrix}$$

  - El código $\mathcal{C}_2$ se implementa con dos códigos $\boldsymbol{G}_2'[1, 1+D]$ en paralelo
- Código concatenado $\mathcal{C}_c(1,4) = \mathcal{C}_1(1,2) - \mathcal{C}_2(2,4)$

$$\boldsymbol{G}_c = [1, \quad 1+D, \quad D, \quad D+D^2]$$