Grado en Ingeniería Telemática

Teoría de la Comunicación

(2º curso - Junio 2010)

Apellidos: ....

Nombre: ....

Nº de matrícula o DNI: ....

Grupo: ....

Se ha presentado al examen

Firma

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN
CUESTIONES
(Tiempo: 60 minutos. Puntos 2/6 (ó 2,5/7,5))

	Calificación	
Apellidos:	1	
Nombre:	2	
Nº de matrícula o DNI: .... Grupo	3	
Firma	4	
	T	

Cuestión 1

Las siguientes ecuaciones presentan las expresiones analíticas de la señal modulada $s(t)$ para una señal moduladora $m(t)$ en distintas modulaciones analógicas.

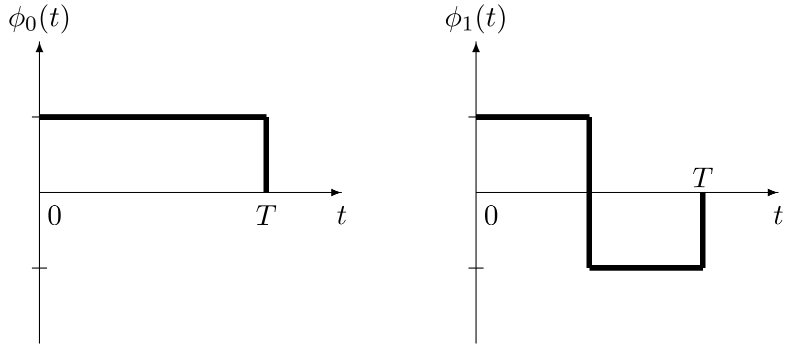
- $s_1(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$
- $s_2(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + a \cdot m(t))$
- $s_3(t) = A_c \cdot [1 + m(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$
- $s_4(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) - A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \sin(\omega_c t + \phi_c)$
- $s_5(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + b \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau)$

a) Diga a qué modulación analógica corresponde cada una de las señales moduladas $s_i(t)$, y explique cómo es la relación señal a ruido de dicha modulación en comparación con la relación señal a ruido que se obtendría transmitiendo $m(t)$ sin modular (en banda base).

b) Considerando $\omega_c = 2\pi f_c$, siendo la frecuencia de la portadora $f_c = 100$ MHz, y si la señal moduladora es $m(t) = \cos(\omega_m t)$, con $\omega_m = 2\pi f_m$ y $f_m = 2$ MHz, represente el espectro de al menos 3 de las señales anteriores.

(0,5 puntos)

Cuestión 2



Un sistema digital de comunicaciones utiliza el modulador de la figura y la siguiente constelación

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \; \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \; \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix},$$

para transmitir sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Los cuatro símbolos se utilizan con igual probabilidad.

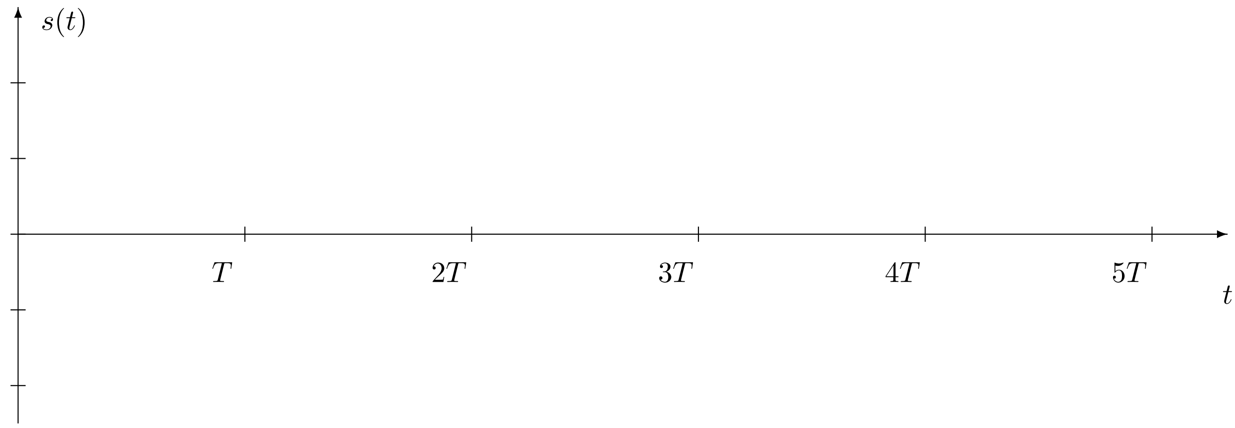
a) Calcule la energía media por símbolo del sistema.

b) Calcule la probabilidad de error de símbolo aproximada del sistema.

c) Para $T = 10^{-3}$, ¿qué tasa binaria de transmisión (bits/s) tiene el sistema?

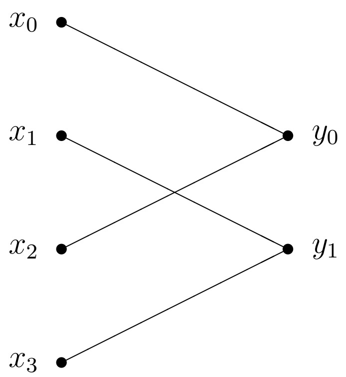
d) Represente, etiquetando correctamente las amplitudes de la misma, la forma de onda generada por la siguiente secuencia de símbolos (puede utilizar como ejes los de la figura)

$$A[0] = \boldsymbol{a}_1,\ A[1] = \boldsymbol{a}_0,\ A[2] = \boldsymbol{a}_3,\ A[3] = \boldsymbol{a}_2,\ A[4] = \boldsymbol{a}_1.$$



(0,5 puntos)

Cuestión 3



La figura muestra la representación esquemática de un canal discreto sin memoria cuya entrada es la variable aleatoria discreta X, con un alfabeto de 4 símbolos, y cuya salida es la variable aleatoria Y, cuyo alfabeto consta de 2 símbolos.

a) Si las probabilidades del alfabeto de entrada son $p_X(x_0) = 1/2$, $p_X(x_1) = 1/4$, $p_X(x_2) = 1/8$, y $p_X(x_3) = 1/8$, calcule la entropía de la variable aleatoria X, y la entropía de la variable aleatoria Y.

b) Calcule la entropía conjunta de las variables aleatorias X e Y, para las probabilidades de X del apartado anterior.

c) Calcule la información mutua de las variables aleatorias X e Y con las probabilidades de los apartados anteriores.

d) Para unas probabilidades $p_X(x_0) = p$ y $p_X(x_1) = p/2$, ¿bajo qué condiciones sobre $p_X(x_2)$ y $p_X(x_3)$ se alcanza el máximo valor de la entropía de Y, y cuál es dicho valor máximo?

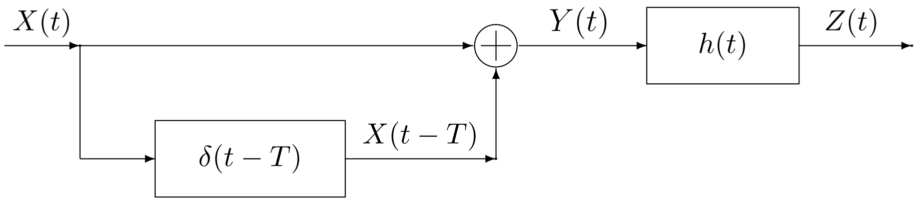
(0,5 puntos)

Cuestión 4

Un proceso aleatorio $X(t)$ estacionario, de media m_X y función de autocorrelación

$$R_X(\tau) = C + \cos(\omega_c \tau),$$

donde C y ω_c son constantes, pasa por el sistema de la figura



donde la respuesta en frecuencia del sistema $h(t)$ es

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |\omega \pm \omega_c| < \frac{W}{2} \\ 0 & \text{si } |\omega \pm \omega_c| \geq \frac{W}{2} \end{cases},$$

es decir, que el sistema es un filtro paso banda centrado en ω_c y de ancho de banda W, donde en este caso $W = \omega_c/2$ radianes/s.

a) Calcule la media, función de autocorrelación, y densidad espectral de potencia del proceso $Y(t)$.

b) Calcule la media, función de autocorrelación, y densidad espectral de potencia del proceso $Z(t)$.

(0,5 puntos)

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN
PROBLEMAS
(Tiempo: 120 minutos. Puntos 4/6 (ó 5/7,5))

Apellidos:	Calificación	
Nombre:	1	
Nº de matrícula o DNI: .... Grupo	2	
Firma	T	

Problema 1

Un canal discreto sin memoria (DMC) con alfabeto de entrada $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1, x_2\}$ y alfabeto de salida $\mathcal{A}_Y = \{y_0, y_1, y_2\}$ viene dado por la siguiente matriz de canal

$$\boldsymbol{P}_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon_0 & \varepsilon_0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 1-2\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, e $I(X,Y)$ para el canal si los símbolos de entrada son equiprobables.

b) Calcule la capacidad del canal de la figura en función de ε_0 si se ha fijado $p_X(x_1)$=0.

c) Calcule la capacidad del canal de la figura en función de ε_0 y de ε_1.
NOTA: Para el cálculo de la capacidad de canal, tenga en cuenta la simetría del canal, que hace que la dependencia de $I(X,Y)$ con respecto a $p_X(x_0)$ y a $p_X(x_2)$ sea equivalente. Es decir, que el máximo de la información mutua se alcanzará para $p_X(x_0) = p_X(x_2)$.

d) Si $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ para qué valor de ε se alcanza la máxima capacidad. Explique por qué es esta capacidad la máxima alcanzable en un canal con 3 símbolos de entrada.

(2 puntos)

Problema 2

Considere un sistema de transmisión digital en el que se pueden enviar cuatro mensajes distintos a través del canal. A cada uno de estos mensajes se le asigna un símbolo $\boldsymbol{a}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. El modulador convierte el símbolo $\boldsymbol{a}_i$ en una forma de onda $s_i(t)$ que se transmite por un canal gausiano con densidad espectral del potencia $\frac{N_0}{2}$.

a) Las formas de onda generadas por el modulador son

$$s_0(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{T}} & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \; s_1(t) = -s_0\left(t - \frac{T}{2}\right), \; s_2(t) = s_0\left(t - \frac{T}{2}\right), \; s_3(t) = -s_0\left(t\right)$$

donde T es el periodo de símbolo. Determine una base ortonormal para este conjunto de señales *que sea distinta* de las bases formadas por $\left\{\pm\frac{1}{2}s_0(t), \pm\frac{1}{2}s_1(t)\right\}$. Indique las coordenadas de los símbolos en la base calculada.

b) Si los símbolos son $\boldsymbol{a}_0 = [1, 1]^T$, $\boldsymbol{a}_1 = [1, -1]^T$, $\boldsymbol{a}_2 = [-1, -1]^T$ y $\boldsymbol{a}_3 = [-1, 1]^T$ con probabilidades a priori uniformes, dibuje las regiones de decisión y determine la probabilidad de error de símbolo del detector óptimo.

c) Suponga ahora que las probabilidades a priori de los símbolos no son uniformes, sino que se tiene

$$p_A(\boldsymbol{a}_0) = p_A(\boldsymbol{a}_2) = 2p_A(\boldsymbol{a}_1) = 2p_A(\boldsymbol{a}_3).$$

Determine y dibuje las regiones de decisión del detector óptimo.

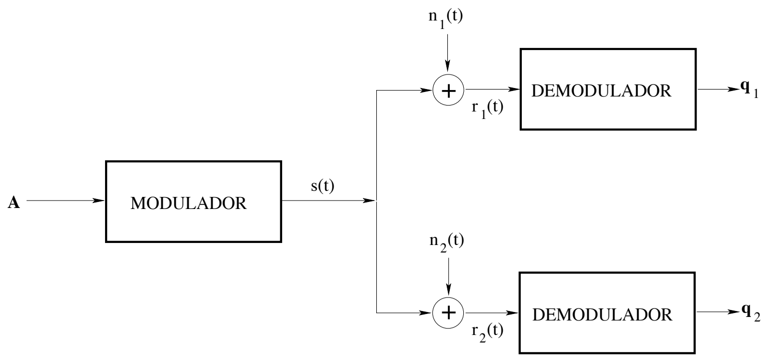


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema de transmisión con dos receptores del apartado d).

Suponga ahora que se dispone de dos receptores independientes que utilizan bancos de correladores para obtener dos vectores de observaciones $\boldsymbol{q}_1$ y $\boldsymbol{q}_2$ según el esquema de la figura 1, donde $\boldsymbol{A}$ es el símbolo transmitido, $n_1(t)$ y $n_2(t)$ son procesos blancos y gausianos independientes con idéntica densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$ y $r_1(t)$, $r_2(t)$ son las señales de entrada de cada banco de filtros adaptados a los elementos de la base.

d) Obtenga la función densidad de probabilidad conjunta de $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ condicionada al símbolo transmitido para todos los posibles símbolos transmitidos $f_{\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2|\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i\right)$ con $i = 0, 1, 2, 3$.

e) A partir de las fdps obtenidas formule de decisor MAP para el conjunto de símbolos equiprobables.

(2 puntos)