TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

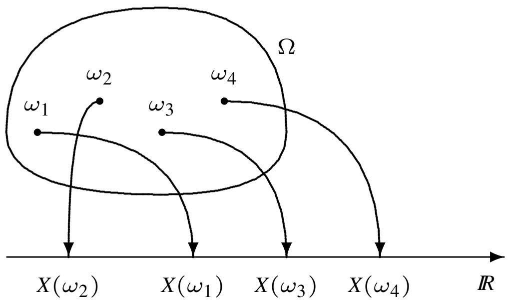
TEMA 2

RUIDO EN LOS SISTEMA DE COMUNICACIONES

Variable aleatoria (Real)

Función que asigna un valor numérico (real) a la salida de un experimento aleatorio

$$\Omega \rightarrow I\!R$$
$$\omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in I\!R$$



- Rango de X: $\text{Rango}_X = \{x \in I\!R \mid \exists\, \omega \in \Omega,\, X(\omega) = x\}$
  - V.a. discreta
  - V.a. continua
- Descripción (probabilística):
  - Función de distribución: $F_X(x)$
  - Función densidad de probabilidad: $f_x(x)$

Función de distribución

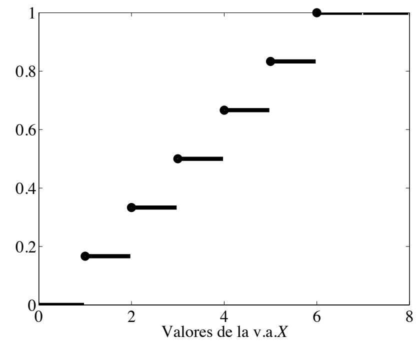
- Definición

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

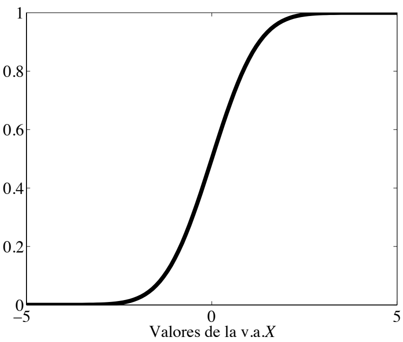
- Interpretación frecuencial (probabilística)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n}$$

n_x : Número de resultados en las n realizaciones con $X \leq x$

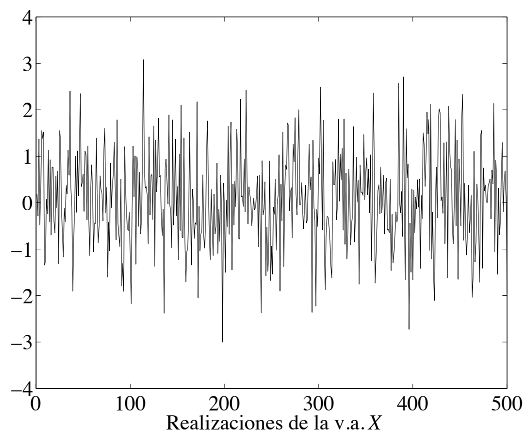


(a) Discreta

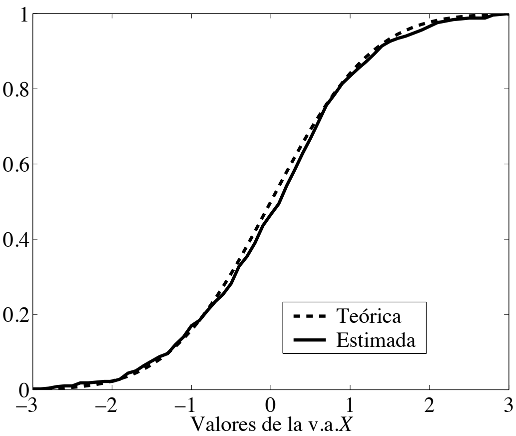


(b) Continua

Estima de la función de distribución



(a) Realizaciones



(b) Estima de $F_X(x)$

Propiedades de la función de distribución

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ($F_X(x)$ es no decreciente).
3. $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$ $\left(\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1\right)$.
4. $F_X(x^+) = F_X(x)$ ($F_X(x)$ es continua por la derecha).
5. $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$.

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-).$$
$$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a).$$
$$P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-).$$

6. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.
7. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.

Función densidad de probabilidad

- Definición

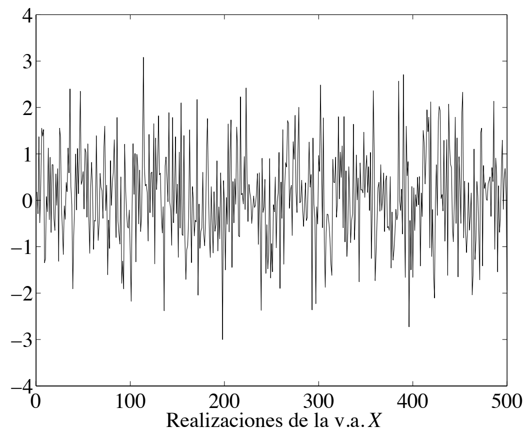
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

  - V.a. discreta: Puntos de masa $\{p_i\} = P(X = x_i)$
  - Notación v.a. discreta: $p_X(x_i) = p_i$
- Interpretación frecuencial (probabilística)

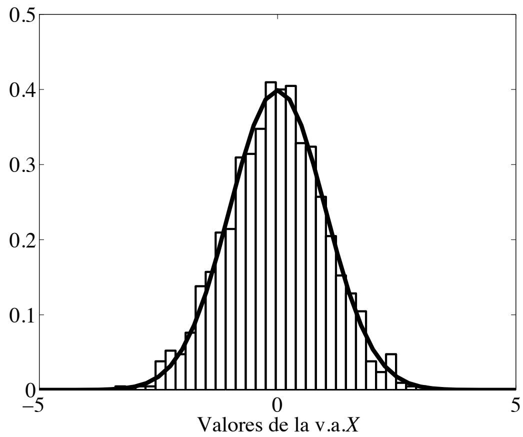
$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n} \right\}$$

Estima de la f.d.p.



(a) Realizaciones



(b) Estima de $f_X(x)$

Propiedades de $f_X(x)$

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$
3. $\int_{a^+}^{b^+} f_X(x) \cdot dx = P(a < X \leq b)$
4. En general, $P(X \in A) = \int_A f_X(x) \cdot dx$
5. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u) \cdot du$

Variable aleatoria de Bernouilli

- Variable aleatoria discreta con $\text{Rango}_X = \{0, 1\}$
- Parámetro: $p = P(X = 1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ejemplos de aplicación en comunicaciones
  - Generador de datos binario
  - Modelo de errores

Variable aleatoria Binomial

- Número de 1's en n experimentos de Bernouilli (indep.)
- Parámetros: n, p.
- $\text{Rango}_X = \{0, 1, \cdots, n\}$

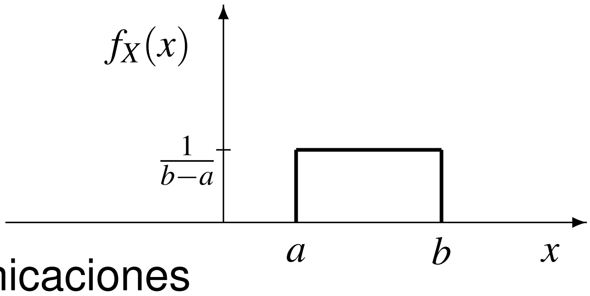
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, & 0 \leq x \leq n \text{ y } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Número total de bits recibidos con error

Variable aleatoria uniforme

- Variable aleatoria continua de parámetros a y b

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

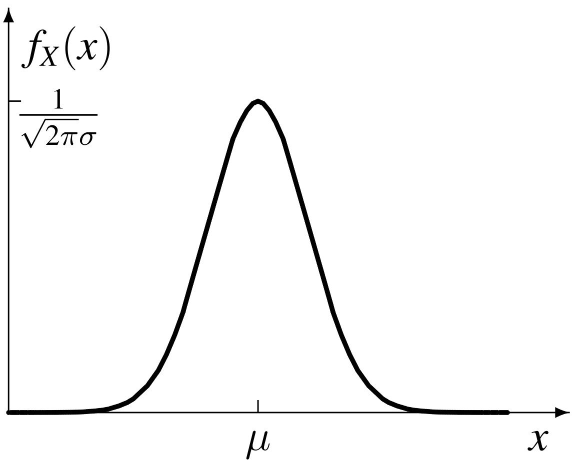


- Ejemplo aplicación en comunicaciones
  - Fase aleatoria en una sinusoide: v.a. uniforme entre 0 y 2π.

Variable aleatoria gausiana (normal)

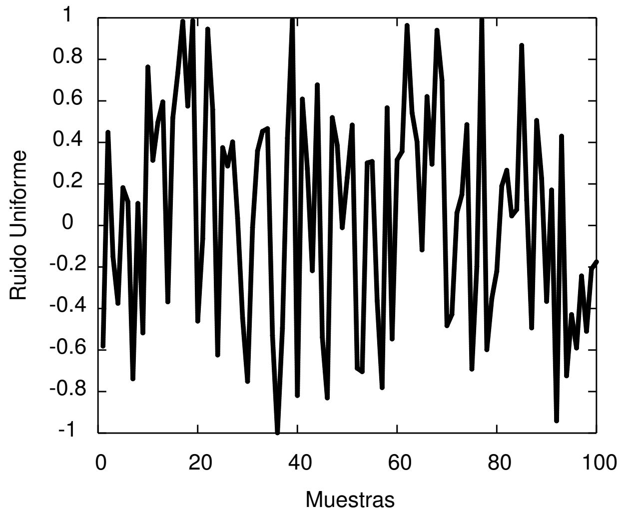
- Parámetros: media (μ), y varianza (σ^2)

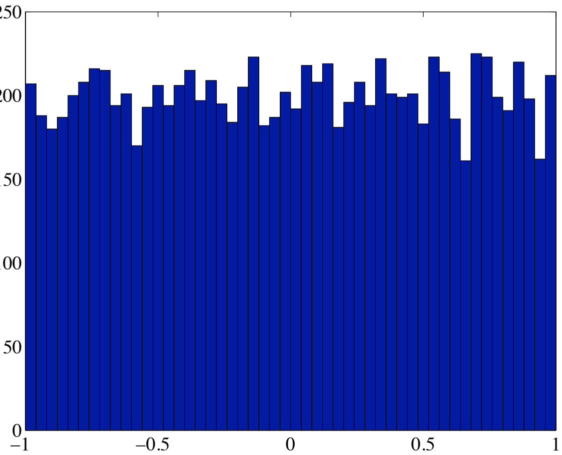
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Modelado del ruido térmico

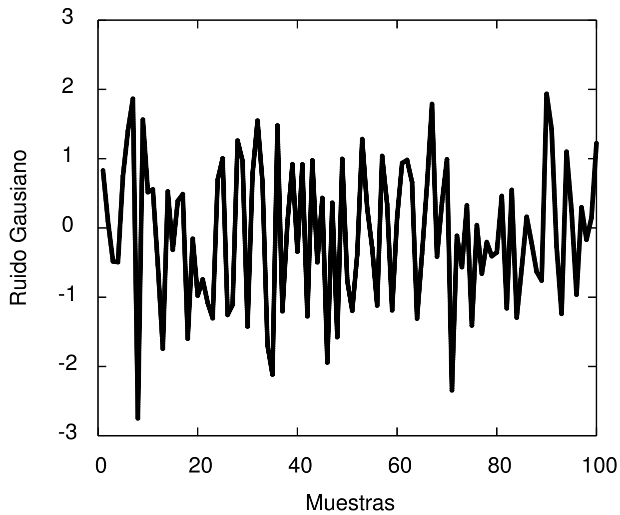
Ejemplo: Variable aleatoria uniforme

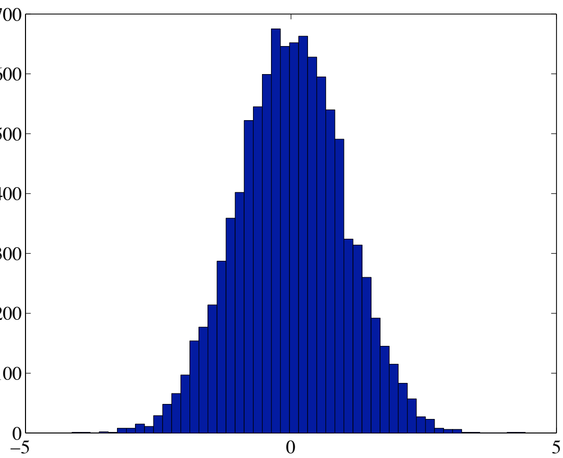




Histograma con 10000 muestras (50 barras).

Ejemplo: Variable aleatoria gausiana





Histograma con 10000 muestras (50 barras).

Función $Q(x)$

- Función tabulada (calculada numéricamente)
- Permite integrar distribuciones gausianas
- Función de distribución de una v.a. gausiana ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Función $Q(x) = 1 - \Phi(x) = P(X > x)$ para $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
  - $Q(-x) = 1 - Q(x)$
  - $Q(0) = \frac{1}{2}$
  - $Q(\infty) = 0$
  - Distribución (μ, σ^2)

$$P(X > x) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Momentos estadísticos

- Valor esperado (media, o esperanza matemática)

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

- Valor esperado de una función de X ($g(X)$)

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

- Momento de orden n

$$m_X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx$$

- Varianza

$$\sigma_X^2 = E\left[(x - m_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

NOTA: $\sigma_X^2 = E\left[(x - m_X)^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - (m_X)^2$

Propiedades de los momentos

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y] = m_X + m_Y$ (Operador lineal)
- $E[c] = c$ (para cualquier constante c)
- $E[c \cdot X] = c \cdot E[X]$
- $E[X + c] = E[X] + c$
- $\text{Var}(c) = 0$
- $\text{Var}(c \cdot X) = c^2 \cdot \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$

Variables aleatorias multidimensionales

- Se puede trabajar de forma conjunta con dos variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio muestral Ω
- Modelado probabilístico conjunto
  - Función de distribución conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

  - Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Propiedades de $F_{X,Y}(x,y)$ y $f_{X,Y}(x,y)$

- $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$
- $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$
- $P((X,Y)\in A) = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$
- $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv$

Función densidad de probabilidad condicionada

- Conocimiento del valor de una variable modifica las probabilidades de la otra

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Definición de independencia estadística:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

  - Implicación: para variables aleatorias independientes

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

Momentos estadísticos

- Valor esperado de una función $g(X, Y)$

$$E[g(X,Y)] = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

- Casos particulares
  - Correlación: $g(X, Y) = X \cdot Y$
  - Covarianza: $g(X, Y) = (X - m_X) \cdot (Y - m_Y)$
- Implicación de independencia: si $g(X, Y) = g_1(X) \cdot g_2(Y)$

$$E\left[g_1(X) \cdot g_2(Y)\right] = E\left[g_1(X)\right] \cdot E\left[g_2(Y)\right]$$

NOTA: Sólo bajo independencia !!!!

Incorrelación

- Coeficiente de correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \quad 0 \leq |\rho_{X,Y}| \leq 1$$

  - Si $\rho_{X,Y} = 0$: v.a.'s **incorreladas**
    - Independencia implica incorrelación
    - Incorrelación no implica independencia
  - Si $\rho_{X,Y} = \pm 1$: $Y = aX + b$
    $\rho_{X,Y} = +1 \rightarrow a > 0; \quad \rho_{X,Y} = -1 \rightarrow a < 0$
- Incorrelación sólo implica independencia para variables aleatorias conjuntamente gausianas
  NOTA: Salvo este caso, en general, incorrelación no implica independencia !!!

Variables aleatorias conjuntamente gausianas

- Dos variables: caracterizadas por una f.d.p. conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}-\frac{\rho(x-\mu_x)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}$$

- Para n variables aleatorias $\mathbf{X} = X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{C})}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T}$$

  - Vector de medias: $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n]^T$
  - Matriz de covarianzas: $\boldsymbol{C}$, dada por

$$C_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{i,j} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

Propiedades de v.a.'s conjuntamente gausianas

- Completamente caracterizadas por $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{C}$ (estadísticos de 2º orden)
- Si n variables aleatorias son conjuntamente gausianas, cualquier subconjunto también está distribuido de forma conjuntamente gausiana. En particular, todas las variables individuales son gausianas
- Cualquier subconjunto de v.a. conjuntamente gausianas, condicionadas a otro subconjunto de las mismas v.a. conjuntamente gausianas originales, tiene una distribución conjuntamente gausiana
- Cualquier conjunto de combinaciones lineales de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ es conjuntamente gausiano. En particular, individualmente cualquier combinación lineal Y_i es gausiana
- Dos variables incorreladas son independientes

Suma de variables aleatorias

- **Ley de los grandes números (débil)**: Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ están *incorreladas* y todas tienen la misma media m_X y varianza $\sigma_X^2 < \infty$, independientemente de su distribución, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\text{si } Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \lim_{n\to\infty} P(|Y - m_X| > \varepsilon) = 0$$

- **Teorema del límite central**: Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ son *independientes* con medias $m_1, m_2, \cdots, m_n$, y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2$, entonces la distribución de

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m_i}{\sigma_i}$$

converge a una distribución gausiana de media 0 y varianza 1, $\mathcal{N}(0, 1)$.

Suma de variables aleatorias (II)

- Caso particular: variables *independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d)*, es decir, que todas tengan la misma distribución con la misma media m y la misma varianza σ^2; el promedio

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

converge a una distribución $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Esto es así aunque la distribución original no sea gausiana.

- Recordatorio: condiciones a satisfacer
  - Ley de los grandes números (débil): incorrelación
  - Teorema del límite central: independencia