Procesos aleatorios

- Extensión de v.a. incluyendo dependencia temporal
  - Variable aleatoria
$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$
  - Proceso aleatorio
$$\omega \longrightarrow X(t,\omega)$$
- Particularizaciones
  - $X(t_i,\omega_j)$: realización individual
  - $X(t,\omega_i)$: señal temporal asociada a ω_i, $x_i(t)$
  - $X(t_i,\omega)$: variable aleatoria ($X(\omega)$)
- Notación: $X(t)$ o $X[n]$
- Interpretación: Conjunto indexado de variables aleatorias
  - Índice continuo ($t \in \mathbb{R}$): Proceso aleatorio continuo
  - Índice discreto ($n \in \mathbb{Z}$): Proceso aleatorio discreto

Descripción de un proceso aleatorio

- Descripción analítica

$$X(t) = f(t,\boldsymbol{\theta})$$

$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$: vector de variables aleatorias
  - Ecuación $f(t,\boldsymbol{\theta})$ y descripción estadística de $\boldsymbol{\theta}$
- Descripción estadística
  - Completa: $\forall\ (t_1,t_2,\cdots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ n$
$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
  - De orden M: $\forall\ n \leq M$, $\forall\ (t_1,t_2,\cdots,t_n) \in \mathbb{R}^n$
$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

Esperanzas de los procesos (promedios estadísticos)

- Media de un proceso

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X(t)}(x)dx$$

- Función de autocorrelación de un proceso

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

Estacionariedad y cicloestacionariedad

- Estacionariedad en sentido estricto: $\forall\ (t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $\forall n$, $\forall \Delta$

$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta),\cdots,X(t_n+\Delta)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

  - Estacionariedad de orden M: para $n \leq M$

- Estacionariedad en sentido amplio
  1. $m_X(t) = m_X$ (no depende de t)
  2. $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ (definiendo $\tau = t_1 - t_2$)
     También se suele denotar $R_X(t + \tau, t) = R_X(\tau)$

- Cicloestacionariedad
  1. $m_X(t + T_o) = m_X(t)$
  2. $R_X(t + \tau + T_o, t + T_o) = R_X(t + \tau, t)$, para todo t y τ

Autocorrelación de procesos estacionarios

La función de autocorrelación de un proceso estacionario $X(t)$, $R_X(\tau)$, tiene las siguientes propiedades:

- Es una función par

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau)$$

- El máximo en módulo se obtiene en $\tau = 0$

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$

- Si para algún T_o se cumple $R_X(T_o) = R_X(0)$, entonces para todo entero k

$$R_X(kT_o) = R_X(0)$$

- Es una función semidefinida positiva (se verá más tarde)

Ergodicidad

- Promedios para un proceso $X(t)$ y una función $g(x)$:
  1. Promedio estadístico

$$E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X(t)}(x) \cdot dx$$

  Este valor es, en general, dependiente de t.

  2. Promedio temporal de $x(t, \omega_i)$

$$< g(x) >_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \omega_i)) \cdot dt$$

  Independiente de t, pero en general dependiente de ω_i

- $X(t)$ estacionario es ergódico, si $\forall\ g(x)$ y $\forall\ \omega_i \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \omega_i)) \cdot dt = E[g(X(t))]$$

Potencia y Energía

- Energía del proceso aleatorio $X(t)$, E_X

$$E_X = E[\mathcal{E}_X], \quad \mathcal{E}_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) \cdot dt$$

- Potencia del proceso aleatorio $X(t)$, P_X

$$P_X = E[\mathcal{P}_X], \quad \mathcal{P}_X = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) \cdot dt$$

  - Un proceso aleatorio es de energía si $E_X < \infty$
  - Un proceso aleatorio es de potencia si $0 < P_X < \infty$

Potencia y energía (II)

$$E_X = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) \cdot dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)] \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t,t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned} P_X &= E\left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) \cdot dt\right] \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X^2(t)] \cdot dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(t,t) \cdot dt \end{aligned}$$

Para *procesos aleatorios estacionarios* $R_X(t,t) = R_X(0)$

$$P_X = R_X(0), \quad E_X = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(0) \cdot dt$$

Procesos estacionarios de interés: de potencia

Procesos aleatorios multidimensionales (múltiples)

- Independencia: $X(t)$ e $Y(t)$ son *independientes* si $\forall\ t_1, t_2$, $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes
- Incorrelación: $X(t)$ e $Y(t)$ están *incorreladas* si $\forall\ t_1, t_2$, $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ están incorreladas
- Función de correlación cruzada

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)]$$

En general

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_2, t_1)$$

- Estacionariedad conjunta: $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente estacionarios* si
    - Ambos son individualmente estacionarios
    - $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau)$, con $\tau = t_1 - t_2$

Procesos aleatorios y sistemas lineales

$$\xrightarrow{X(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{Y(t)}$$

Teorema: $X(t)$ es estacionario, de media m_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. El proceso pasa a través de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)$. En este caso, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios*, siendo

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot dt$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

Además, se puede comprobar que

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

Media del proceso de salida

Se parte de que

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t-s) \cdot ds$$

Por tanto

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t-s) \cdot ds\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)] \cdot h(t-s) \cdot ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m_X \cdot h(t-s) \cdot ds \\ &\overset{u=t-s}{=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot du \end{aligned}$$

Correlación cruzada $R_{XY}(\tau)$

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] \\ &= E\left[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t_2 - s) \cdot ds\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1) \cdot X(s)] \cdot h(t_2 - s) \cdot ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - s) \cdot h(t_2 - s) \cdot ds \\ &\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - t_2 - u) \cdot h(-u) \cdot du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - u) \cdot h(-u) \cdot du \\ &= R_X(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}$$

Correlación de salida $R_Y(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)] \\
&= E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\cdot h(t_1-s)\cdot ds\right)\cdot Y(t_2)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)\cdot Y(t_2)]\cdot h(t_1-s)\cdot ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(s-t_2)\cdot h(t_1-s)\cdot ds \\
&\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(u)\cdot h(t_1-t_2-u)\cdot du \\
&= R_{XY}(\tau) * h(\tau) \\
&= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)
\end{aligned}
$$

Procesos aleatorios en el dominio de la frecuencia

- Espectro de una de las señales del proceso aleatorio

$$x_i(t) = X(t,\omega_i) \longrightarrow X_i(j\omega) = TF[x_i(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

- Espectro de una de las señales truncada

$$x_{T_i}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| < T/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \longrightarrow X_{T_i}(j\omega) = TF[x_{T_i}(t)]$$

- Densidad espectral de potencia de $X(t)$

$$S_X(j\omega) \overset{def}{=} E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(j\omega)|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{T}$$

Teorema de Wiener-Khinchin

Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo $\mathcal{A}$, de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau, t) dt \right| < \infty$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier de

$$< R_X(t+\tau, t) > \stackrel{def}{=} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau, t) dt$$

Teorema de Wiener-Khinchin - Corolarios

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau \cdot R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = TF[R_X(\tau)]$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_o} R_X(t+\tau, t) \cdot dt \right| < \infty$$

entonces

$$S_X(j\omega) = TF[\widetilde{R}_X(\tau)]$$

donde

$$\widetilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} R_X(t+\tau, t) \cdot dt$$

y T_o es el período del proceso cicloestacionario

Transmisión por un canal lineal e invariante

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \cdot H(0)$$

- Densidad espectral del proceso de salida

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2$$

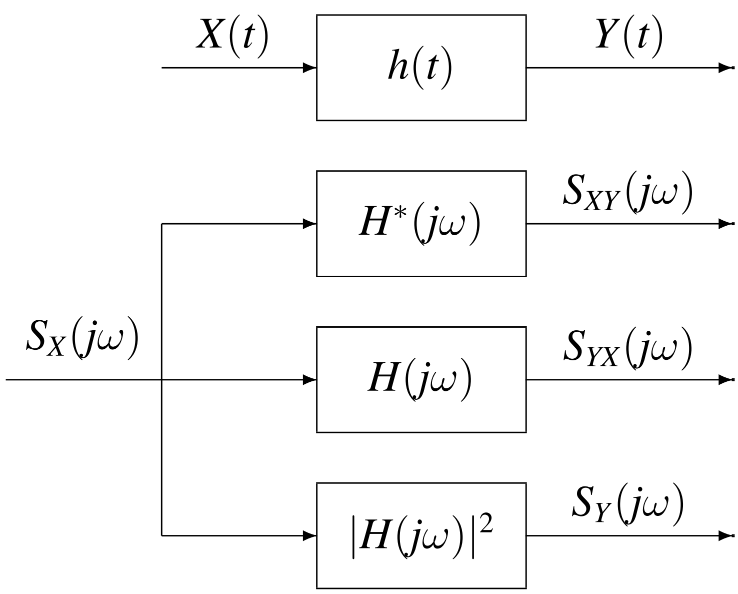
- Densidades espectrales cruzadas

$$S_{XY}(j\omega) \stackrel{def}{=} TF[R_{XY}(\tau)]$$

$$S_{XY}(j\omega) = S_X(j\omega)H^*(j\omega)$$

$$S_{YX}(j\omega) = S_{XY}^*(j\omega) = S_X(j\omega)H(j\omega)$$

Relaciones entre densidades espectrales de potencia



Procesos aleatorios discretos

- Notación: $X[n]$
- Promedios estadísticos
  - Media: $m_X[n] = E\left[X[n]\right]$
  - Autocorrelación: $R_X[n+k,n] = E\left[X[n+k] \cdot X[n]\right]$
- Estacionariedad:
  - Estadísticos independientes del índice temporal n
  - Media: $m_X[n] = m_X$
  - Autocorrelación: $R_X[n+k,n] = R_X[k]$
- Cicloestacionariedad:
  - Estadísticos periódicos de período N
  - Media: $m_X[n+N] = m_X[n]$
  - Autocorrelación: $R_X[n+k+N,n+N] = R_X[n+k,n]$

Procesos aleatorios discretos - Espectro y potencia

- Densidad espectral de potencia
  - Procesos estacionarios

$$S_X(e^{j\omega}) = TF\left[R_X[n]\right]$$

  - Procesos cicloestacionarios

$$S_X(e^{j\omega}) = TF\left[\tilde{R}_X[n]\right], \qquad \tilde{R}_X[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} R_X[n+k,n]$$

  - Potencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega}) \cdot d\omega = R_X[0] \text{ (ó } \tilde{R}_X[0])$$

Procesos aleatorios discretos - Sistemas lineales

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \cdot \sum_n h[n] = m_X \cdot H(0)$$

- Autocorrelación del proceso de salida

$$R_Y[n] = R_X[n] * h[n] * h[-n]$$

- Densidad espectral de potencia del proceso de salida

$$S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega}) \cdot \left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

- Estadísticos cruzados

$$R_{X,Y}[k] = R_X[k] * h[-k]$$

$$S_{X,Y}(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})$$