Representación geométrica de las señales
Espacios vectoriales

Un espacio vectorial (V) es un conjunto de elementos (vectores) que poseen las siguientes propiedades:

- Ley de composición interna: suma $+$

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\in V,\ \ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\ \in V$$

a) Conmutativa: $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \in V; \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
b) Asociativa: $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\ \in V; \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$
c) Existencia de elemento neutro

$$\exists\, \mathbf{0}\in V/\forall\, \boldsymbol{x}\in V; \boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

d) Existencia de elemento inverso

$$\forall\, \boldsymbol{x}\in V\exists(-\boldsymbol{x})/\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

Espacios vectoriales (II)

- Ley de composición externa: producto con escalares (C)

$$\alpha\in C,\ \boldsymbol{x}\in V,\ \ \alpha\cdot\boldsymbol{x}\in V$$

a) Asociativa: $\forall\, \alpha,\beta\in C; \forall\, \boldsymbol{x}\in V; \alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{x})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{x}$
b) Existencia de elemento neutro: $\exists e_1\in C/\forall\, \boldsymbol{x}\in V; e_1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$
c) Distributiva respecto a la suma:

$$\forall\, \alpha\in C; \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V; \alpha\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\cdot\boldsymbol{x}+\alpha\cdot\boldsymbol{y}$$

d) Distributiva respecto al producto por un escalar:

$$\forall\, \alpha,\beta\in C; \forall\, \boldsymbol{x}\in V; (\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{x}=\alpha\cdot\boldsymbol{x}+\beta\cdot\boldsymbol{x}$$

Espacios de Hilbert

- Espacio de Hilbert: espacio vectorial con producto escalar

$$f : (V, V) \to C, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

- Propiedades de la operación producto escalar
  1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*$
  2. $\langle (\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
  3. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$
  4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$

Norma para el espacio vectorial

- El producto escalar define una norma para el espacio vectorial

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

- Medida de distancia entre vectores

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$$

- Ángulo entre dos vectores se mide como

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{Re}\{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\}}{||\boldsymbol{x}|| \; ||\boldsymbol{y}||} \right)$$

- La definición del producto escalar no es única
  - Cada definición da lugar a un espacio de Hilbert distinto

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo continuo

- Producto escalar que define el espacio L_2

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) \; dt$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)]|^2 \; dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t)\}}$$

- Distancia entre dos señales

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 \; dt}$$

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo discreto

- Producto escalar que define el espacio ℓ_2

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n]\}}$$

- Distancia: distancia euclídea

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$$

- Se cumple la igualdad: $y[n] = K \cdot x[n]$ o $y(t) = K \cdot x(t)$
- Expresiones para L_2 y ℓ_2

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\, dt}$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n] \right| \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2}$$

Representación en una base del espacio vectorial

- Base para un espacio de Hilbert H (dimensión D):
  Subconjunto de elementos $\{\boldsymbol{b}_n\}_{n=0}^{D-1} \in H$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{D-1} c_n(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{b}_n$$

  - Coeficientes únicos $c_n(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in H$ (coordenadas)
- Base ortogonal:

$$\langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_m \rangle = 0, \ \forall\ n \neq m$$

- Base ortonormal: Base ortogonal con

$$\langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n \rangle = 1$$

  - Coeficientes en una base ortonormal: $c_n(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_n \rangle$

Procedimiento de otrogonalización de Gram-Schmidt

- Objetivo: encontrar una base ortonormal que permita representar un conjunto de M señales
  - Señales (M)
$$\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$$
  - Base ortonormal - N señales (dimensión N) - $N \leq M$
$$\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$$
  - Representación de las señales
$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$
  - Coordenadas de una señal en la base
$$a_{i,j} = \langle s_i(t), \phi_j(t) \rangle$$

Obtención de la base

- Paso 0: Elegir $s_0(t)$ con energía no nula
$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}},\ \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\{s_0(t)\} : \text{ Energía de } s_0(t)$$
- Paso 1
  - Proyección de $s_1(t)$ sobre $\phi_0(t)$
$$a_{1,0} = \langle s_1(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot \phi_0^*(t)\, dt$$
  - Ortogonalización - Se sustrae esta proyección
$$d_1(t) = s_1(t) - a_{1,0} \cdot \phi_0(t)$$
  - Normalización
$$\phi_1(t) = \frac{d_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}},\ \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\{d_1(t)\} \int_{-\infty}^{\infty} |d_1(t)|^2\, dt$$

Obtención de la base (II)

- Paso k
  - Proyección de $s_k(t)$ sobre los elementos de la base

$$a_{k,j} = \langle s_k(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) \cdot \phi_j^*(t)\ dt,\ j = 0, 1, \cdots, k-1$$

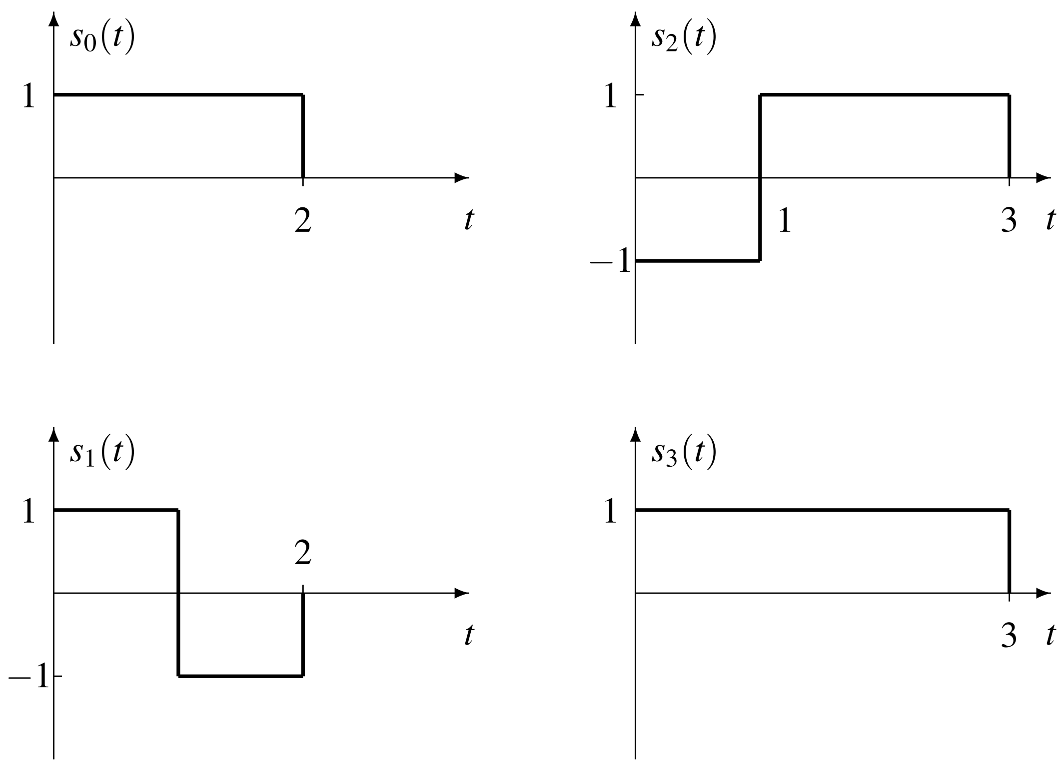
  - Ortogonalización - Sustracción de las proyecciones

$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j} \cdot \phi_j(t)$$

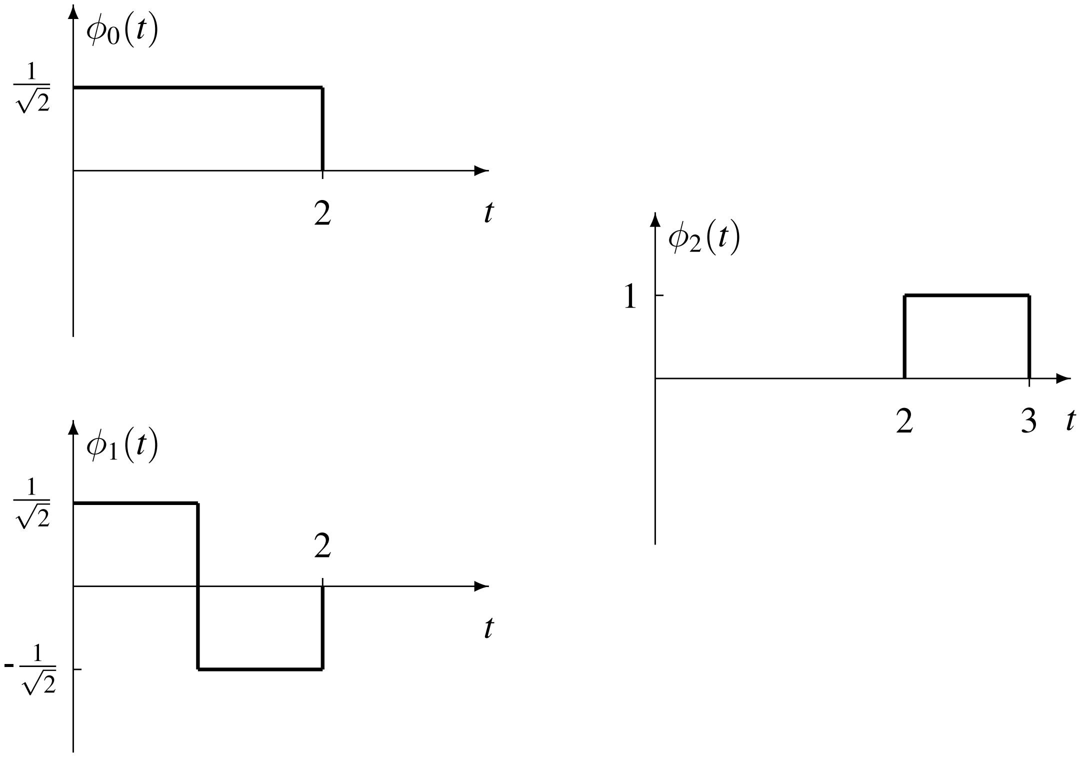
  - Normalización

$$\phi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}},\ \mathcal{E}_k = \mathcal{E}\{d_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_k(t)|^2\ dt$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Señales



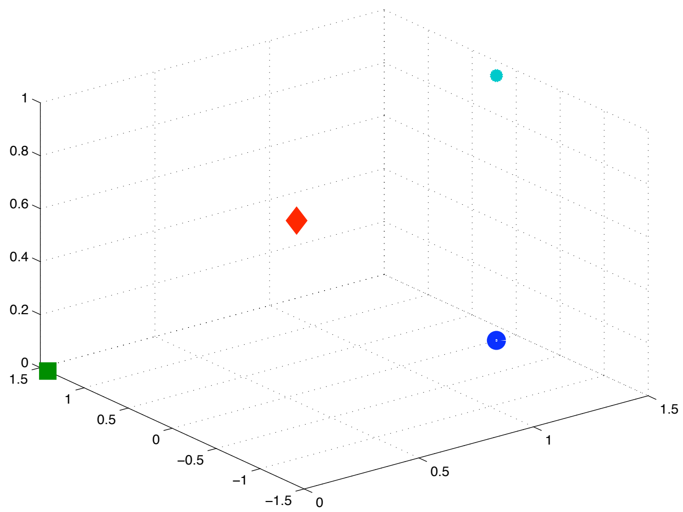
Ejemplo Gram-Schmidt - Base



Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas

- Representación vectorial de las señales

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram-Schmidt - Base alternativa

- Base

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

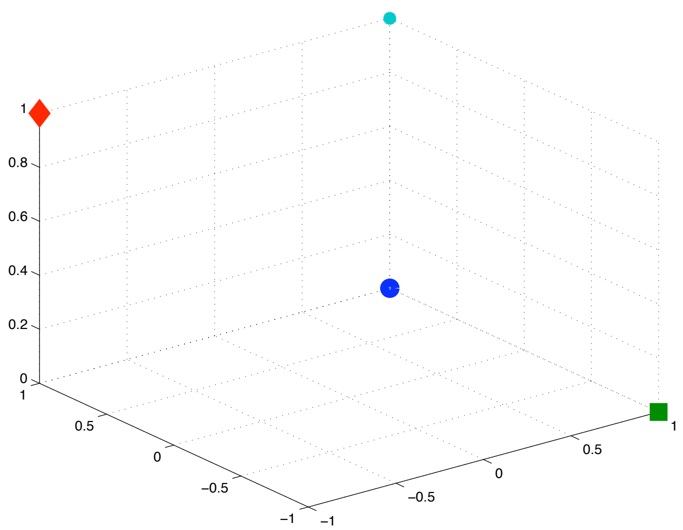
- Coordenadas en la base

$$\boldsymbol{a}'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas (base alternativa)

- Representación vectorial de las señales

$$\boldsymbol{a}'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram Schmidt - Energías y distancias

- Energía de una señal

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}\left\{s_i(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 \, dt = ||\boldsymbol{a}_i||^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2$$

- Distancia entre dos señales

$$\begin{aligned} d\left(s_i(t), s_\ell(t)\right) =& \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_\ell(t)|^2 \, dt} \\ =& ||\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_\ell|| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{\ell,j}|^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_0 = 2,\ \mathcal{E}_1 = 2,\ \mathcal{E}_2 = 3,\ \mathcal{E}_3 = 3$$

$$d(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1) = 2,\ d(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_2) = \sqrt{5},\ d(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_2) = 1$$