5.3 Modulaciones Angulares

- Representación de señales FM y PM

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\theta(t)), \qquad f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\theta(t)$$

- Señal modulada $s(t)$

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi(t)), \qquad f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t)$$

- Si $m(t)$ es la señal mensaje
  - Sistema PM

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t)$$

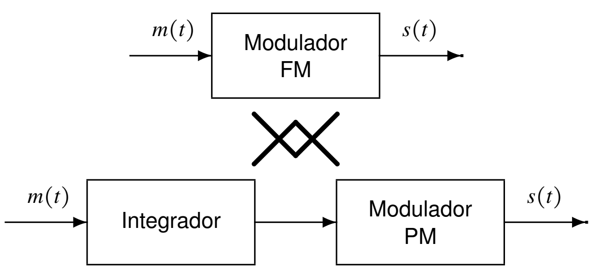
  - Sistema FM

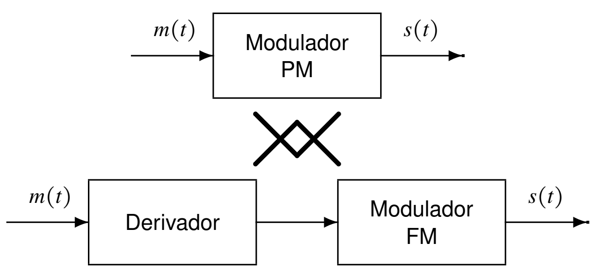
$$f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t) = k_f \cdot m(t)$$

Relación FM/PM

- k_p y k_f: *constantes de desviación* de fase y frecuencia

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau, & \text{FM} \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot \frac{d}{dt}m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot m(t), & \text{FM} \end{cases}$$





Índices de modulación

- PM: máxima desviación en fase

$$\Delta\phi_{\max} = k_p \cdot \max(|m(t)|)$$

- FM: máxima desviación de frecuencia

$$\Delta f_{\max} = k_f \cdot \max(|m(t)|)$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\max} = k_p \cdot \max(|m(t)|)$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\max}}{B} = \frac{k_f \cdot \max(|m(t)|)}{B}$$

Características espectrales de una modulación angular

- Modulación angular de banda estrecha ($\phi(t) << 1$)
  - Relación trigonométrica

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cdot \cos(B) \mp \sin(A) \cdot \sin(B)$$

  - Señal modulada

$$\begin{aligned} s(t) =& A_c \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \cos\phi(t) - A_c \cdot \sin(\omega_c t) \cdot \sin\phi(t) \\ \approx& A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \phi(t) \cdot \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

  - Ancho de banda (Similar AM convencional)

$$BW_{BE} \approx 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Modulación mediante una señal sinusoidal

- Señal moduladora sinusoidal $m(t) = \begin{cases} a \cdot \sin(\omega_m t), & \text{PM} \\ a \cdot \cos(\omega_m t), & \text{FM} \end{cases}$
- Señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \beta \cdot \sin(\omega_m t)) = \mathcal{R}e\left(A_c \cdot e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)}\right)$$

$$e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j\omega_m n t}$$

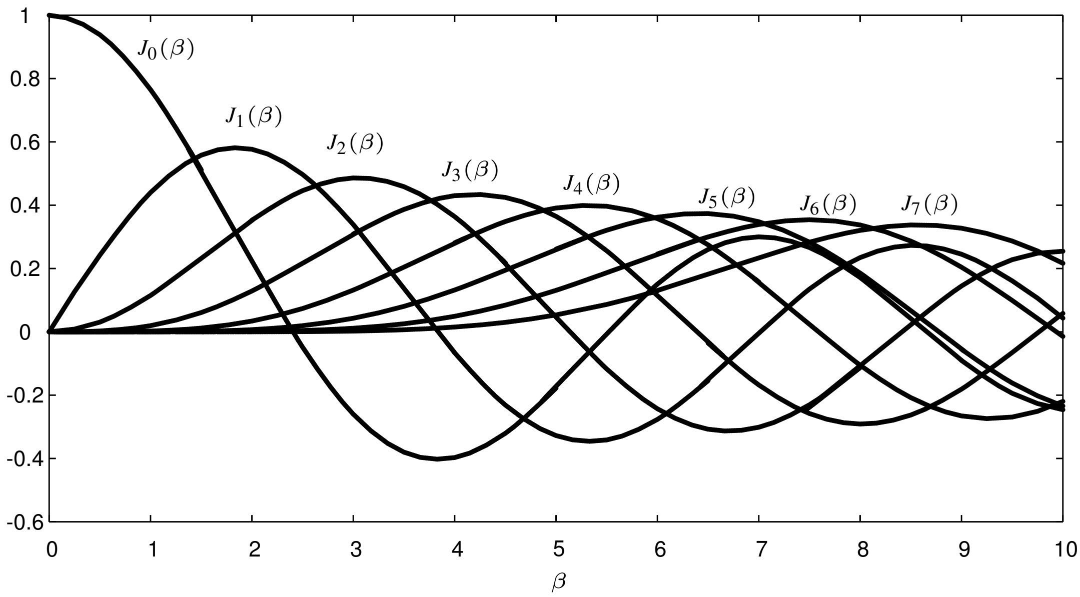
$J_n(\beta)$: función de Bessel de primera especie de orden n

- Expresión alternativa de la señal modulada

$$s(t) = \mathcal{R}e\left(A_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j\omega_m n t} e^{j\omega_c t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \cos\left((\omega_c + n \cdot \omega_m) \cdot t\right)$$

Funciones de Bessel $J_n(\beta)$

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}, \quad \text{Para } \beta \downarrow J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}, \quad J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta), & n \text{ par} \\ -J_n(\beta), & n \text{ impar} \end{cases}$$



Modulación mediante una señal sinusoidal (II)

- La señal modulada contiene las frecuencias

$$f_c + n \cdot f_m, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- Amplitudes: $J_n(\beta)$
- Ancho de banda efectivo: $B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m$ Hz.

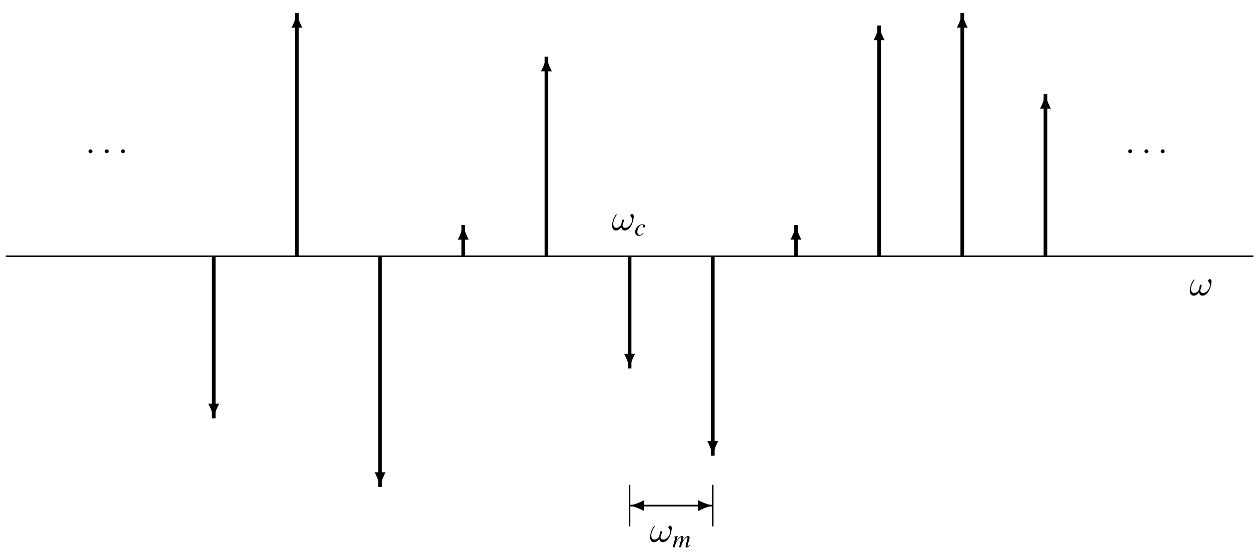
$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1) f_m, & \text{PM} \\ 2\left(\frac{k_f a}{f_m} + 1\right) f_m, & \text{FM} \end{cases} = \begin{cases} 2(k_p a + 1) f_m, & \text{PM} \\ 2\left(k_f a + f_m\right), & \text{FM} \end{cases}$$

- Número total de armónicos en B_e

$$M_e = 2\lfloor \beta \rfloor + 3 = \begin{cases} 2\lfloor k_p a \rfloor + 3, & \text{PM} \\ 2\lfloor \frac{k_f a}{f_m} \rfloor + 3, & \text{FM} \end{cases}$$

Ejemplo - Modulación con $\beta = 5$

$$J_0(5) = -0.18,\ J_1(5) = -0.32,\ J_2(5) = 0.05$$
$$J_3(5) = 0.37,\ J_4(5) = 0.39,\ J_5(5) = 0.26, \cdots$$



Otros tipos de moduladoras

- Modulación mediante una señal periódica

$$\text{Frecuencias } f_c + n \cdot f_m$$

- Modulación mediante una señal determinista no periódica
  - Análisis complicado debido a la no linealidad
  - Regla de Carson: moduladora con ancho de banda B Hz

$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot B \text{ Hz}$$

5.4 Ruido en sistemas de comunicaciones analógicos

- Premisas
  - Señal de ancho de banda B Hz
  - P_R: Potencia de la señal recibida
  - Ruido paso banda: componentes en fase y cuadratura

$$n(t) = n_c(t) \cdot \cos(\omega_c t) - n_s(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

- Efecto del ruido en banda base
  - Potencia del ruido y relación señal a ruido

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{N_o}{2}\, d\omega = N_o \cdot B, \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_o \cdot B}$$

Ruido en una DBL

- Señal recibida

$$\begin{aligned} r(t) =& s(n) + n(t) \\ =& A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) + n_c(t) \cdot \cos(\omega_c t) - n_s(t) \cdot \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

- Señal demodulada

$$\begin{aligned} x(t) =& r(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi) \\ =& A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \cdot \cos(\omega_c t + \phi) + n(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi) \\ =& \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c) + \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(2\omega_c t + \phi + \phi_c) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [n_c(t) \cdot \cos(\phi) + n_s(t) \cdot \sin(\phi)] \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [n_c(t) \cdot \cos(2\omega_c t + \phi) - n_s(t) \cdot \sin(2\omega_c t + \phi)] \end{aligned}$$

Ruido en una DBL (II)

- Señal Filtrada

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c) + \frac{1}{2} \cdot [n_c(t) \cdot \cos(\phi) + n_s(t) \cdot \sin(\phi)]$$

- Receptor síncrono o coherente: $\phi_c = \phi = 0$

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot [A_c \cdot m(t) + n_c(t)]$$

- Potencia de señal y de ruido

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} \cdot P_M, \quad P_{n_o} = \frac{1}{4} \cdot P_n, \quad P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(j\omega)\, d\omega = 2 \cdot N_o \cdot B$$

- Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DBLo} = \frac{P_o}{P_{n_o}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} 2 N_o B} = \frac{A_c^2 P_M}{2 N_o B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b, \quad P_R = \frac{A_c^2}{2} \cdot P_M$$

Ruido en una BLU

- Señal demodulada y filtrada (receptor coherente)

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) + \frac{1}{2} \cdot n_c(t)$$

- Potencia de señal y de ruido

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} \cdot P_M, \quad P_{n_o} = \frac{1}{4} \cdot P_n, \quad P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(j\omega)\, d\omega = N_o \cdot B$$

- Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BLUo} = \frac{P_o}{P_{n_o}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} \cdot P_M}{\frac{1}{4} \cdot N_o \cdot B} = \frac{A_c^2 \cdot P_M}{N_o \cdot B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b, \quad P_R = A_c^2 \cdot P_M$$

Ruido en AM convencional

- Utilizando demodulador síncrono

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot \{A_c[1 + m(t)] + n_c(t)\}$$

- Relación S/N (señal deseada $m(t)$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{AMo} = \frac{\frac{1}{4}A_c^2 P_M}{\frac{1}{4}P_{n_o}} = \frac{A_c^2 P_M}{2N_o B} = \frac{P_M}{1 + P_M} \frac{\frac{A_c^2}{2}[1 + P_M]}{N_o B}$$

$$= \frac{P_M}{1 + P_M} \frac{P_R}{N_o B} = \frac{P_M}{1 + P_M} \left(\frac{S}{N}\right)_b = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_b,$$

$$P_R = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + P_M], \qquad \eta = \frac{P_M}{1 + P_M}$$

η: eficiencia de la modulación.

Ruido en modulaciones angulares

- Salida del demodulador (con ruido)

$$d(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t) + Y_n(t), & \text{PM} \\ k_f \cdot m(t) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} Y_n(t), & \text{FM} \end{cases}$$

- Relación señal a ruido ($P_R = \frac{A_c^2}{2}$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \frac{k_p^2 A_c^2}{2} \frac{P_m}{N_o B} = P_M \left(\frac{\beta_p}{\max |m(t)|}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ \frac{3k_f^2 A_c^2}{2B^2} \frac{P_m}{N_o B} = 3P_M \left(\frac{\beta_f}{\max |m(t)|}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$

- Efecto umbral

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{bu} = 20 \cdot (\beta + 1)$$