

Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de variables aleatorias (proceso aleatorio)

- ▶ $E[A[n]] = m$
- ▶ $E[|A[n]|^2] = E_s$
- ▶ $E[A[k] \cdot A^*[j]] = R_A[k - j] = R_A[j - k]$
- ▶ La densidad espectral de potencia es

$$S_A(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- Sea $g(t)$ cualquier señal determinista con transformada de Fourier $G(j\omega)$

Teorema de Wiener-Khinchin

- Densidad espectral de potencia

$$S_X(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{T}.$$

- Teorema de Wiener-Khinchin

Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo \mathcal{A} , de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_X(t + \tau, t) dt \right| < \infty,$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier de

$$\langle R_X(t + \tau, t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t + \tau, t) \cdot dt.$$

Corolarios Teorema de Wiener-Khinchin

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = TF[R_X(\tau)].$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es cicloestacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_o} R_X(t + \tau, t) dt \right| < \infty,$$

entonces

$$S_X(j\omega) = TF[\tilde{R}_X(\tau)],$$

donde

$$\tilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} R_X(t + \tau, t) \cdot dt,$$

y T_o es el período del proceso cicloestacionario.

Espectro de una PAM banda base

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n]g(t - nT)$$

$$m_X(t) = E \left[\sum_n A[n]g(t - nT) \right] = \sum_n E[A[n]]g(t - nT) = m \sum_n g(t - nT)$$

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[X(t)X^*(t + \tau)] \\ &= E \left[\left(\sum_k A[k]g(t - kT) \right) \left(\sum_j A^*[j]g^*(t + \tau - jT) \right) \right] \\ &= \sum_k \sum_j E[A[k]A^*[j]]g(t - kT)g^*(t + \tau - jT) \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k - j]g(t - kT)g^*(t + \tau - jT) \end{aligned}$$

Cicloestacionariedad

$$\begin{aligned}
 m_X(t+T) &= m \sum_n g(t+T-nT) = m \sum_n g(t-(n-1)T) \\
 &= m \sum_j g(t-jT) = m_X(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_X(t+T, t+\tau+T) &= \\
 &= \sum_k \sum_j R_A[k-j]g(t+T-kT)g^*(t+T+\tau-jT) \\
 &= \sum_k \sum_j R_A[k-j]g(t-(k-1)T)g^*(t-(j-1)T+\tau) \\
 &= \sum_m \sum_n R_A[m+1-(n+1)]g(t-mT)g^*(t-nT+\tau) \\
 &= \sum_m \sum_n R_A[m-n]g(t-mT)g^*(t-nT+\tau) = R_X(t, t+\tau)
 \end{aligned}$$

Promedio temporal de la autocorrelación

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T R_X(t, t+\tau) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_k \sum_j R_A[k-j]g(t-kT)g^*(t+\tau-jT) dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[-m] \int_0^T g(t-kT)g^*(t+\tau-(k+m)T) dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kT}^{-(k-1)T} g(u)g^*(u+\tau-mT) du \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m] \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g^*(u+\tau-mT) du \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n]r_g(nT-\tau),
 \end{aligned}$$

$$r_g(t) = g(t) * g^*(-t),$$

Densidad Espectral de Potencia

$$\begin{aligned}\tilde{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot r_g(nT - \tau) \\ &= \frac{1}{T} r_g(\tau) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot \delta(\tau - nT) \\ &= \frac{1}{T} g(\tau) * g^*(-\tau) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot \delta(\tau - nT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_X(j\omega) &= \frac{1}{T} \cdot G(j\omega) \cdot G^*(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot e^{-j\omega nT} \\ &= \frac{|G(j\omega)|^2}{T} \cdot S_A(e^{j\omega T})\end{aligned}$$