

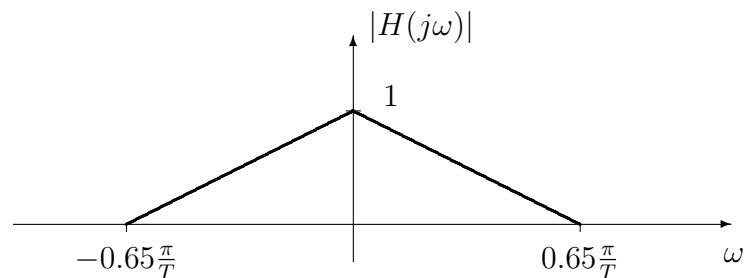
Comunicaciones Digitales - Ejercicios Tema 2

1. Considere un sistema PAM en banda base tal que la respuesta combinada transmisor-receptor, $p(t)$, es un pulso triangular de la forma¹

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

donde T es el periodo de símbolo. El ruido y la distorsión introducidos por el canal pueden considerarse despreciables.

- a) Demuestre que el pulso anterior cumple el criterio de Nyquist para la ausencia de ISI.
 - b) Represente la densidad espectral de potencia de la señal a la salida del filtro receptor, si $A[n]$ es blanca.
 - c) Para una constelación 2-PAM, represente el diagrama de ojo a la salida del filtro receptor.
 - d) Repita el apartado anterior para una constelación 4-PAM.
2. Sea un sistema de comunicaciones PAM en banda base con un período de símbolo T seg. y un pulso transmisor en raíz de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0.35$. El receptor utiliza un filtro adaptado de forma conjunta al transmisor y al canal, i.e., $f(t) = g_h(-t)$, con $g_h(t) = g(t) * h(t)$. El canal tiene la siguiente respuesta en frecuencia²



Si el ruido es blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz, represente la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del muestreador del receptor.

3. Considere la transmisión de una señal binaria antipodal (constelación 2-PAM) $A[n] \in \{\pm 1\}$, a través de un canal discreto equivalente con respuesta $p[n] = \delta[n] + 0.25 \cdot \delta[n-1]$. El ruido es blanco y gaussiano con varianza σ_z^2 . Calcule de forma exacta la expresión de la probabilidad de error si se utiliza un detector símbolo a símbolo sin memoria³.
4. Un sistema de comunicaciones utiliza una modulación PAM. La secuencia de información $A_b[n]$ es una secuencia blanca. Para introducir una cierta correlación en la secuencia transmitida $A[n]$, se filtra la secuencia blanca $A_b[n]$ con un filtro con una respuesta $c[n]$, es decir, $A[n] = A_b[n] * c[n]$. El filtro transmisor es un filtro en raíz de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0^4$.

- a) Escriba la expresión de $S_A(e^{j\omega})$ como una función de $S_{A_b}(e^{j\omega})$ y $C(e^{j\omega})$.

¹Problema 5.1 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

²Problema 5.3 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

³Problema 5.4 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

⁴Problema 5.6 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

b) Represente la densidad espectral de potencia de la señal PAM en banda base, $S_S(j\omega)$, en los siguientes casos:

I) $c[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$

II) $c[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$

III) $c[n] = \delta[n] - \delta[n - 2]$

c) Obtenga la potencia transmitida en todos los casos anteriores como una función de la energía media por símbolo de la secuencia $A_b[n]$.

5. La Figura 1 representa cuatro diagramas de dispersión a la salida del muestreador del receptor. La respuesta conjunta de los filtros transmisor y receptor es un coseno alzado y la constelación utilizada es una 4-QAM (o QPSK). Justifique, en cada caso, qué causa puede dar lugar al diagrama observado.⁵

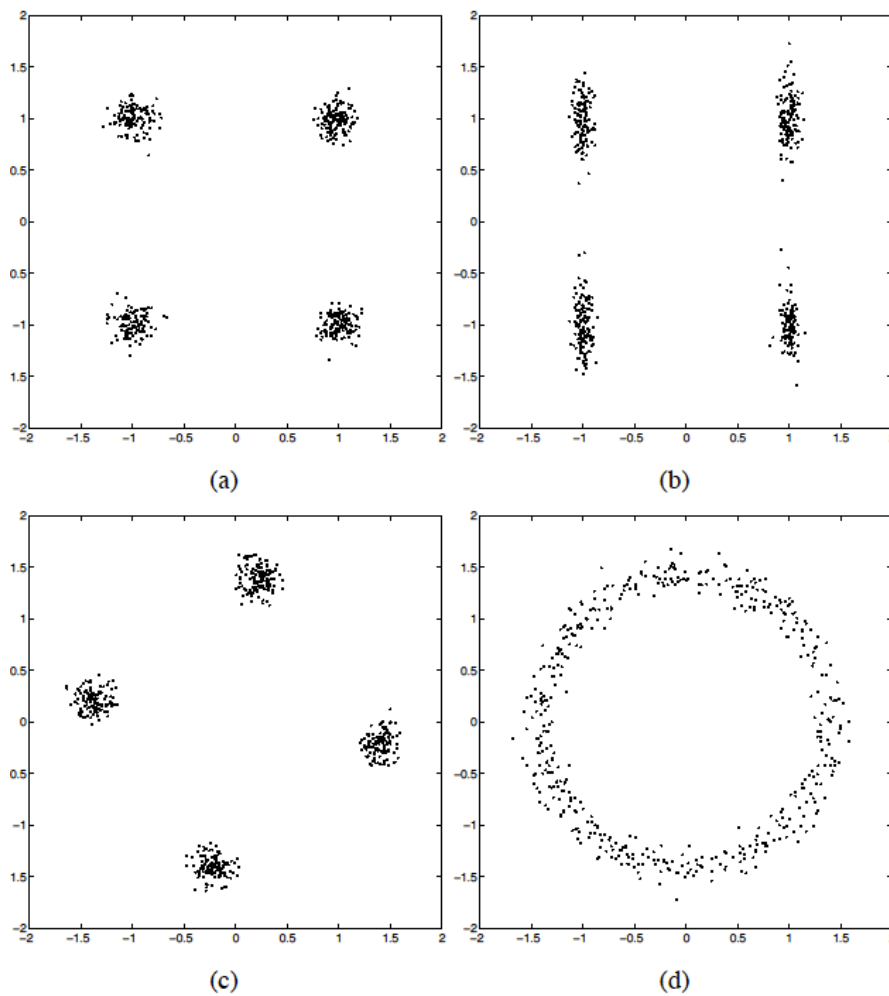
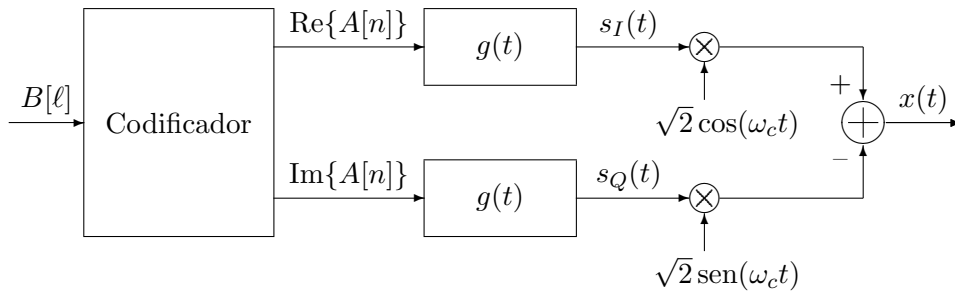


Figura 1: Diagramas de dispersión para el Problema 5.

6. Un sistema digital de comunicaciones emplea el modulador de la figura.

⁵Problema 5.12 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.



El sistema tiene asignada la banda de frecuencias entre 1 y 4 kHz. En esta banda de frecuencias el canal se comporta como un canal aditivo gaussiano. Diseñe el sistema completo: codificador (utilizando una constelación QAM), filtro transmisor, $g(t)$, y frecuencia de portadora, ω_c , para realizar la transmisión sin ISI a una velocidad binaria de 9600 bits/s ocupando al máximo la banda de frecuencias asignada.

7. Un sistema de comunicaciones en banda base utiliza una constelación BPSK, $A[n] \in [\pm 1]$, y el siguiente pulso conformador

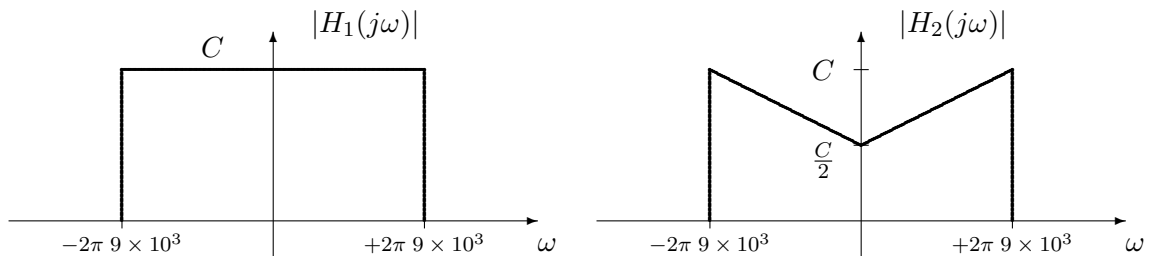
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

La señal modulada se transmite a través de un canal lineal con respuesta al impulso

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - T/2),$$

y el receptor emplea un filtro adaptado al filtro transmisor. El ruido a la entrada del receptor es blanco, gaussiano, y con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

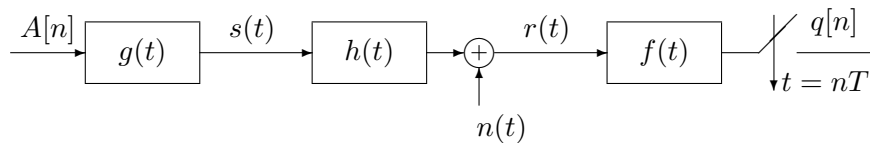
- Calcule el canal discreto equivalente del sistema, $p[n]$.
 - Obtenga la densidad espectral de potencia de la secuencia de ruido discreto $z[n]$ presente a la salida del demodulador (explique bien el procedimiento), y calcule la probabilidad de error con un decisor símbolo a símbolo.
8. Un sistema de transmisión en banda base envía la señal transmitida por uno de los dos canales siguientes. En el sistema, el filtro receptor será un filtro adaptado al filtro transmisor.



- Diseñe para el Canal 1 los filtros conformadores en transmisión y en recepción para que no exista interferencia intersimbólica y el ruido muestreado a la salida del filtro receptor sea blanco.
- Diseñe los filtros conformadores en transmisión y en recepción para que no exista interferencia intersimbólica en el Canal 2.

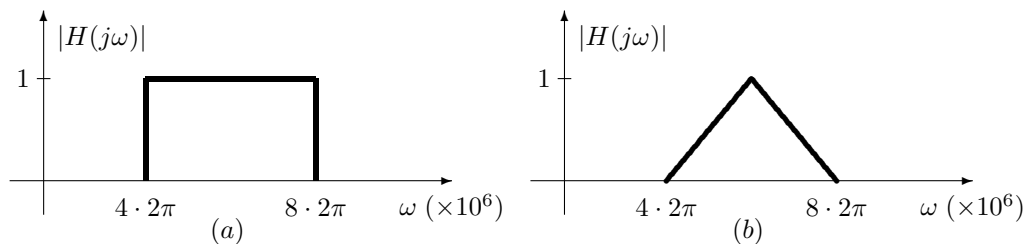
- c) Diseñe para el Canal 2 los filtros conformadores en transmisión y en recepción para que el ruido muestreado a la salida del filtro receptor sea blanco.
- d) Calcule la máxima velocidad de transmisión sin ISI en ambos canales.

9. La figura siguiente muestra el diagrama de bloques de un sistema de transmisión PAM en banda base. En este esquema, $A[n]$ representa la secuencia de símbolos transmitidos ($A[n] \in \{\pm 1\}$), $g(t)$ es un filtro en raíz de coseno alzado, $h(t)$ es la respuesta al impulso del canal lineal, $n(t)$ es ruido blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, $f(t)$ es el filtro receptor, T es el periodo de símbolo y $q[n]$ son las observaciones obtenidas en el receptor.



- a) Si $f(t)$ se diseña para que $k(t) = g(t) * f(t)$ cumpla el criterio de Nyquist, exprese $f(t)$ en función de $g(t)$ y calcule la densidad espectral de potencia del ruido filtrado discreto $z[n]$.
- b) Si $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{10}\delta(t - 2T)$, calcule la respuesta al impulso del canal discreto equivalente $p[n]$.
- c) En las condiciones del apartado (b), ¿existe interferencia intersimbólica en este sistema? Justifique su respuesta.
- d) Suponiendo que $g(t) = f(t) = 1/\sqrt{T}$ si $|t| \leq T/2$ y $f(t) = g(t) = 0$ en caso contrario (es decir, $f(t)$ y $g(t)$ son pulsos cuadrados normalizados e idénticos con soporte en $[-T/2, +T/2]$), dibuje el diagrama de ojo del sistema de transmisión en ausencia de ruido.

10. Se tienen las siguientes dos respuestas en frecuencia para un canal de comunicaciones.



- a) Indique si es posible, utilizando una modulación QAM, transmitir sin ISI y conseguir que el ruido a la salida del demodulador sea blanco utilizando en el receptor un filtro adaptado al transmisor y, en caso afirmativo, calcule la máxima velocidad de símbolo alcanzable y especifique los pulsos conformadores a utilizar, transmitiendo sobre el canal de la figura (a) y sobre el canal de la figura (b).
- b) Se desea transmitir a una velocidad de 10 Mbits/s utilizando una modulación PSK, sobre el canal de la figura (a), con filtros de raíz cuadrada de coseno alzado en el transmisor y receptor. Seleccione el menor número de símbolos posible de la constelación PSK para alcanzar dicha velocidad y calcule la tasa de símbolo resultante.
- c) Dada la constelación del apartado anterior, calcule el rango de posibles valores del factor de caída de los filtros en raíz cuadrada de coseno alzado teniendo en cuenta el ancho de banda disponible y, de entre los posibles valores, seleccione el adecuado para minimizar el efecto de posibles errores en el instante de muestreo en el receptor.

11. Un sistema de comunicaciones utiliza un filtro en coseno alzado en el transmisor para una modulación PAM en banda base con un factor de roll-off α . En el receptor hay un filtro adaptado al transmisor. Asuma que el canal es un canal gaussiano y el ruido tiene densidad espectral de potencia $N_0/2$. El ancho de banda del canal es de 4 kHz.
- Muestre que el ruido muestreado a la salida del filtro adaptado es blanco.
 - Obtenga la máxima tasa de transmisión sin que se presente ISI y obtenga el factor de roll-off necesario para obtener dicha tasa.
 - Dibuje la DEP del la señal transmitida para los siguientes dos casos:
 - La secuencia $A[n]$ es blanca con energía media por símbolo E_s
 - La secuencia $A[n]$ tiende una DEP $S_A(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega)$.
 - Si el factor de roll-off usado es $\alpha = 0.25$ transmitiendo a la máxima tasa de símbolo posible sin que haya ISI, obtenga el número de símbolos M necesario para obtener una tasa binaria de 19200 bits por segundo.
12. Un sistema de comunicaciones digital utiliza como filtro transmisor $g(t)$ un pulso en raíz de coseno alzado normalizado y con un factor de caída α . El receptor utiliza un filtro adaptado al filtro transmisor.
- Si la respuesta del canal por el que se transmite es $h(t) = \delta(t) + \frac{1}{4} \cdot \delta(t-2T)$, calcule el canal discreto equivalente para el sistema y la probabilidad de error si se utiliza una modulación en banda base con una constelación 2-PAM con niveles normalizados ($A[n] \in \{\pm 1\}$).
 - El canal es un canal en banda base con un ancho de banda de 10 kHz, y se desea transmitir a una velocidad binaria de 54 kbits/s utilizando una modulación M -PAM en banda base.
 - Calcule el mínimo orden de la constelación (número de símbolos M) que permite alcanzar dicha velocidad.
 - Calcule la velocidad de símbolo para obtener dicha tasa binaria con ese valor de M .
 - Calcule, para ese M , el valor de α que permite utilizar todo el ancho de banda disponible.
 - Repita el apartado anterior si el canal es paso banda y la constelación es una M -QAM.
13. Una modulación lineal en banda base utiliza en transmisión un pulso causal rectangular de duración T y normalizado en energía. Dicha modulación se transmite por un canal con respuesta impulsiva $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t - \frac{T}{2})$.

En el receptor se consideran dos escenarios diferentes para los pulsos conformadores. En el primer escenario se utiliza un filtro adaptado al pulso transmisor. En el segundo escenario se utiliza un filtro adaptado al pulso representado en la Figura 2

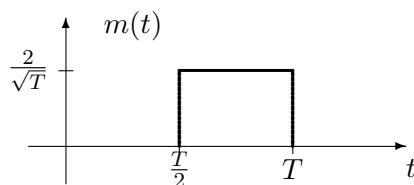


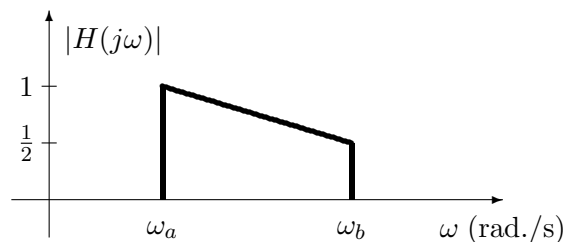
Figura 2: Pulso correspondiente al enunciado del ejercicio 13.

- Obtenga el canal discreto equivalente en ambos casos.

- b) En el segundo escenario, razone si el ruido muestreado a la salida del segundo receptor es blanco.
- c) Discuta, desde el punto de vista de ISI y ruido muestreado en el receptor cuál de los dos filtros receptores es más adecuado.
14. Un sistema de comunicaciones digital tiene asignado para su utilización el rango de frecuencias entre 30 y 40 MHz. El tipo de modulación que se empleará será una modulación M -QAM. Tanto el transmisor como el receptor utilizarán filtros en raíz de coseno alzado con factor de caída (*roll-off*) α .
- a) Obtenga la máxima velocidad de símbolo para la transmisión sin interferencia intersimbólica (ISI) por dicho canal, e indique el valor de α que permite obtener dicha velocidad.
- b) Si se desea sobre dicho canal transmitir a una velocidad binaria de 36 Mbits/seg, obtenga el mínimo orden de la constelación (número de símbolos, M , de la misma) necesario para su transmisión.
- c) Si se transmite a la máxima velocidad de símbolo posible sin ISI, represente la densidad espectral de potencia de la señal modulada en los siguientes casos:
- I) Si la secuencia transmitida, $A[n]$, es blanca
 - II) Si la secuencia transmitida tiene la siguiente función de autocorrelación

$$R_A[k] = 2 \cdot \delta[k] + \delta[k - 1] + \delta[k + 1].$$

15. Un sistema de comunicaciones digital tiene asignado para su utilización el rango de frecuencias entre 10 y 15 MHz. El tipo de modulación que se empleará será una modulación 16-QAM.
- a) Si el transmisor utiliza un filtro transmisor en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0.25$, el receptor utiliza un filtro adaptado al transmisor, y asumiendo que el comportamiento del canal en el rango de frecuencias utilizable es ideal
- I) Obtenga la máxima velocidad de símbolo y la máxima velocidad binaria para la transmisión sin interferencia intersimbólica (ISI).
 - II) Represente la densidad espectral de potencia de la señal modulada transmitida $x(t)$, si la secuencia de datos $A[n]$ es blanca.
- b) Si en el rango de frecuencias utilizable el canal tiene el comportamiento de la figura (con $\omega_a = 2\pi \times 10 \times 10^6$ y $\omega_b = 2\pi \times 15 \times 10^6$), y el filtro transmisor y el filtro receptor son los mismos del apartado anterior



- I) Demuestre si es posible o no la transmisión sin ISI.
- II) Indique si el ruido discreto a la salida del receptor, $z[n]$, es o no blanco y explique por qué.

- c) Para el canal del apartado anterior, cuya respuesta en frecuencia es la de la figura, y si el receptor utiliza un filtro adaptado al transmisor
- I) Diseñe el filtro transmisor para que no exista ISI (puede proporcionar la expresión en el dominio del tiempo, $g(t)$, o en el dominio de la frecuencia, $G(j\omega)$).
 - II) Indique si con dicho filtro el ruido discreto a la salida del receptor es o no blanco y explique por qué.

16. Un sistema de comunicaciones digital utiliza en transmisión un pulso rectangular causal y normalizado en energía de duración T segundos. En el receptor se utiliza un filtro adaptado a dicho pulso. La señal digital se transmite por un canal cuyo equivalente complejo en banda base es:

$$h_{eq}(t) = \delta(t) + j\delta\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Los pulsos elegidos en transmisión y recepción, sin considerar el efecto del canal (o lo que es lo mismo, si $h_{eq}(t) = \delta(t)$), cumplen el criterio de Nyquist? Razone su respuesta.
- b) Obtenga el canal discreto equivalente y la constelación recibida suponiendo que la constelación que se transmite es una constelación ortogonal con símbolos $A[n] \in \{+1, +j\}$
- c) Repita el apartado anterior si el canal es

$$h_{eq}(t) = j\delta(t - T)$$

Razone si en este caso existe interferencia intersimbólica o no.

17. Se tienen dos sistemas de comunicaciones digitales, uno de ellos en banda base, y el otro en paso banda. Para el primero, el rango de frecuencias utilizable es entre 0 y 20 kHz, y la constelación utilizada es una M -PAM. El segundo tiene asignado para su utilización el rango de frecuencias entre 20 y 40 kHz, y el tipo de modulación que se empleará será una modulación M -QAM. En ambos sistemas, tanto el transmisor como el receptor utilizarán filtros en raíz de coseno alzado con factor de caída (*roll-off*) α .

- a) Obtenga la máxima velocidad de símbolo para la transmisión sin interferencia intersimbólica (ISI) en el canal asignado si en el rango de frecuencias especificado el canal se comporta de forma ideal, e indique el valor o conjunto de valores de α que permite obtener dicha velocidad:
 - I) Para el sistema en banda base.
 - II) Para el sistema paso banda.
- b) Para un valor de $\alpha = 0.25$, represente la densidad espectral de potencia de la señal transmitida, etiquetando adecuadamente los ejes de las figuras
 - I) En el sistema banda base, utilizando una constelación 2-PAM.
 - II) En el sistema paso banda, utilizando una constelación 4-QAM.
- c) Para el sistema paso banda, se desea transmitir sin ISI a una velocidad binaria de 64 kbits/seg.
 - I) Indique la frecuencia de la portadora, ω_c , que utilizaría en la transmisión.

- II) Obtenga el mínimo orden de la constelación (número de símbolos, M , de la misma) necesario para su transmisión.
- III) Obtenga la tasa de transmisión de símbolo para obtener la tasa binaria especificada con la constelación del apartado anterior.
18. Un sistema de comunicaciones digitales tiene asignado para su uso el rango de frecuencias (canal) comprendido entre 800 MHz y 950 MHz. En este rango de frecuencias, el comportamiento del canal se considera ideal (no introduce ninguna distorsión lineal, sólo ruido aditivo blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$). La modulación transmitida es una 16-QAM con niveles normalizados, y la secuencia $A[n]$ es blanca. El filtro transmisor $g(t)$ es un filtro en raíz de coseno alzado, normalizado y con factor de caída (*roll-off*) α . Como filtro receptor, se consideran dos posibilidades:
- El filtro $f_a(t)$, un filtro en raíz de coseno alzado con factor de caída α .
 - El filtro $f_b(t)$ dado por la expresión $f_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ para $|t| \leq T/2$ y $f_b(t) = 0$ para $|t| > T/2$.
- a) Para $\alpha = 0.25$ y con filtro receptor $f(t) = f_a(t)$, calcule las máximas tasa de símbolo y tasa de bit posibles, indicando cual es el valor de la frecuencia de portadora ω_c que se debe utilizar para poder alcanzar dichas tasas transmitiendo en el canal especificado.
- b) Para $\alpha = 0.25$, represente la densidad espectral de potencia de la señal modulada transmitida $x(t)$. Debe etiquetar adecuadamente ambos ejes con los correspondientes valores numéricos, y puede representar únicamente el rango positivo de frecuencias (para $\omega \geq 0$ rad/s.).
- c) Para $\alpha = 0$, demuestre por un lado si existe o no interferencia intersimbólica (ISI) en la transmisión y por otro lado si el ruido muestreado en el receptor, $z[n]$, es o no blanco, en los siguientes casos:
- I) El filtro receptor es $f(t) = f_a(t)$.
 - II) El filtro receptor es $f(t) = f_b(t)$.
19. Una modulación PAM en banda base, transmite una secuencia de información $A[n] \in \{0, A\}$ no equiprobable donde $P(A[n] = 0) = 1 - p$ y $P(A[n] = A) = p$. La función de autocorrelación de la secuencia viene dada por:

$$R_A[k] = \mathbb{E} \{A[n]A[n+k]\} = A^2p(1-p) \cdot \delta[k] + A^2p^2$$

- a) Calcule la energía media por símbolo de la secuencia de símbolos transmitida.
- b) Obtenga y represente, etiquetando adecuadamente los ejes de la representación, la densidad espectral de potencia de la señal PAM si el filtro conformador es un pulso en raíz cuadrada de coseno alzado normalizado en energía y con factor de caída $\alpha = 0.25$, y se transmite a una velocidad de símbolo $R_s = 1$ kbaudios. ¿Cuál es el ancho de banda de la señal modulada?

NOTA: Algunas transformadas y relaciones:

$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega}) = 1$$

$$x[n] = 1, \forall n \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_k \delta(\omega + 2\pi k)$$