

TEMA 3

RECEPTORES DE COMUNICACIONES DIGITALES EN PRESENCIA DE INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA

Índice de contenidos

- Planteamiento del problema
 - ▶ Recuperación de la secuencia de datos transmitida bajo ISI
- Diseño de detectores símbolo a símbolo sin memoria
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión
 - ▶ Rediseño de las regiones de decisión
- Detección óptima bajo ISI
 - ▶ Detector de secuencias de máxima verosimilitud (MLSD)
 - ▶ Algoritmo de Viterbi
- Detectores sub-óptimos bajo ISI: igualadores de canal
 - ▶ Diseño de igualadores lineales no ciegos
 - ★ Criterio de diseño forzador de ceros (ZF)
 - ★ Criterio de diseño de mínimo error cuadrático medio (MMSE)

Detección bajo ISI - Planteamiento

- Receptor: $f(t) = g(-t)$, y $r_g(t) = g(t) * g(-t)$ cumple Nyquist

- ▶ $z[n]$ blanco y gaussiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \mathbf{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathbf{C} \end{cases}$

- Secuencia de símbolos $A[n]$: constelación de M puntos

- ▶ Secuencia estacionaria blanca con energía media $E_s = E[|A[n]|^2]$

$$R_A[k] = E[A[n+k] \cdot A^*[n]] = E_s \cdot \delta[n]$$

$$S_A(e^{j\omega}) = E_s$$

- Respuesta $p(t)$ causal y limitada en el tiempo (T_p s)

- ▶ $p[n]$ causal de longitud $K_p + 1$, $\Rightarrow K_p = \lfloor T_p/T \rfloor$
 - ▶ Observación a la salida del demodulador

$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n] = o[n] + z[n]$$

- ★ Salida sin ruido del canal discreto equivalente

$$o[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot A[n-k]$$

$K_p \equiv$ memoria (en muestras) del canal discreto equivalente

Detector símbolo a símbolo sin memoria - Retardo d

- Canal ideal con un retardo de d muestras: $p[n] = C \cdot \delta[n-d]$

- La observación $q[n]$ se usa para decidir $A[n-d]$

- ▶ Retardo d en el decisor

$$q[n] = \underbrace{p[d] \cdot A[n-d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{k \neq d} p[k] \cdot A[n-k]}_{\text{ISI}} + \underbrace{z[n]}_{\text{ruido}}$$

- Elección óptima del retardo d del decisor

- ▶ Normalización de la observación para compensar la ganancia $p[d]$

$$q'[n] = \frac{q[n]}{p[d]} = A[n-d] + \sum_{k \neq d} \frac{p[k]}{p[d]} \cdot A[n-k] + \frac{z[n]}{p[d]}$$

- ▶ Una vez fijado d , el término $p[d]$ divide a ISI y ruido

- ★ Elección óptima: elegir d tal que $|p[d]| \geq |p[n]|$ para todo n
 - Minimiza el efecto conjunto de ISI y ruido

Selección del retardo óptimo - Ejemplo

- Transmisión de 2-PAM sobre $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2} \cdot A[n] + A[n-1] + \frac{1}{4} \cdot A[n-2]$

Retardo $d = 0$				Retardo $d = 1$			
$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$	$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$	+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$	+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$
+1	-1	+1	$-\frac{1}{4}$	+1	-1	+1	$-\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$	+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$	-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$
-1	+1	-1	$+\frac{1}{4}$	-1	+1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$	-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$	-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$

Azul : $A[n-d] = +1$ Rojo : $A[n-d] = -1$

- El símbolo asociado al mayor valor de $|p[n]|$ es el que tiene mayor contribución sobre $o[n]$
 - ▶ El signo de $o[n]$ depende en este caso de $A[n-1]$

Nivel de ISI

- Cuantifica la distorsión de ISI introducida por un canal

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} \geq 0$$

- ▶ D_{pico} : distorsión de pico para un retardo d

$$D_{pico} = \sum_{k \neq d} \frac{|p[k]|}{|p[d]|} \geq 0$$

Depende del canal discreto equivalente y del retardo para la decisión (d)

- ▶ η : eficiencia de la constelación

$$\eta = \frac{(d_{min}/2)}{|A|_{max}} \geq 0$$

Depende de la constelación utilizada en la transmisión

- ★ $|A|_{max}$: máximo valor del módulo de un símbolo de la constelación

$$|A|_{max} = \max\{|A[n]|\}$$

- ★ d_{min} : mínima distancia entre dos símbolos de la constelación

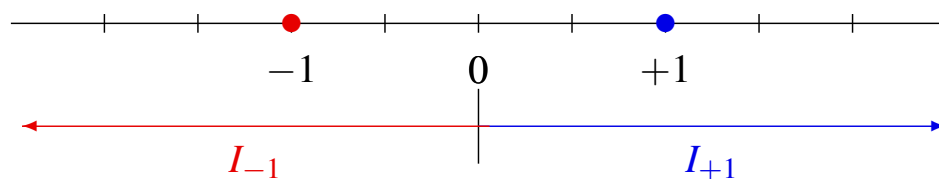
$$d_{min} = \min_{A[n] \neq A[k]} |A[n] - A[k]|$$

γ_{ISI} : efecto de la ISI sobre las regiones de decisión

- El nivel de ISI mide el efecto de la ISI en términos de como afecta a la constelación recibida (constelación extendida generada por la ISI)
- El valor $\gamma_{ISI} = 1$ indica el punto donde la constelación extendida alcanza los límites de la región de decisión original
 - ▶ $\gamma_{ISI} < 1$: ISI no mueve los símbolos fuera de su región de decisión
 - ★ Sin ruido, un detector símbolo a símbolo sin modificar no comete errores
 - ▶ $\gamma_{ISI} > 1$: ISI mueve los símbolos fuera de su región de decisión
 - ★ Un detector símbolo a símbolo sin modificar cometerá errores incluso sin ruido
 - ★ En este caso, es necesario redefinir las regiones de decisión teniendo en cuenta la ISI subyacente (para garantizar unas prestaciones mínimas utilizando un detector símbolo a símbolo sin memoria)

Ejemplo

- Se va a presentar el nivel de ISI para el siguiente caso
 - ▶ Constelación transmitida: 2-PAM ($A[n] \in \{\pm 1\}$)
 - ★ Eficiencia $\eta = 1$
 - ★ Constelación y regiones de decisión originales (I_{+1}, I_{-1})



- ▶ Canal discreto equivalente

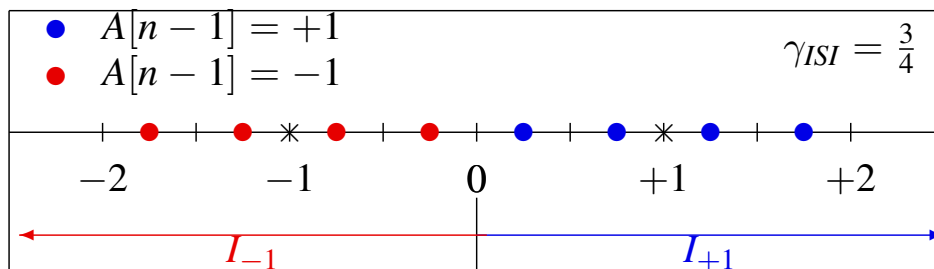
$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n - 1] + c \cdot \delta[n - 2]$$

- ★ Se evaluarán varios valores de c : $c = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, and $c = \frac{3}{4}$
 - En todos los casos, el retardo óptimo es $d = 1$.
- Puntos de la constelación extendida generada por la ISI

Gráfico con valores de $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n - 1] + c \cdot A[n - 2]$

Ejemplo - $c = \frac{1}{4}$

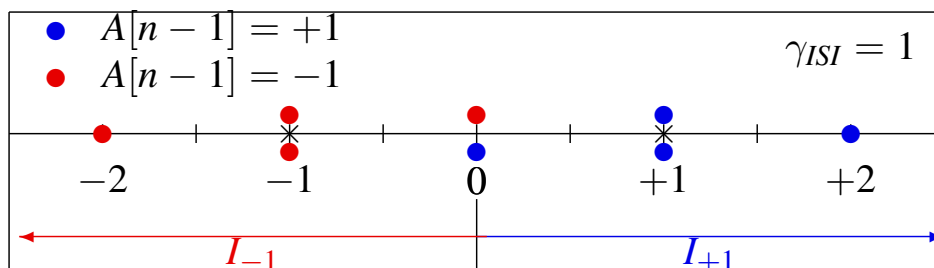
$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{7}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{5}{4}$
+1	-1	+1	$-\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{3}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{3}{4}$
-1	+1	-1	$+\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{5}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{7}{4}$



- Los símbolos aun están todos dentro de su región de decisión

Ejemplo - $c = \frac{1}{2}$

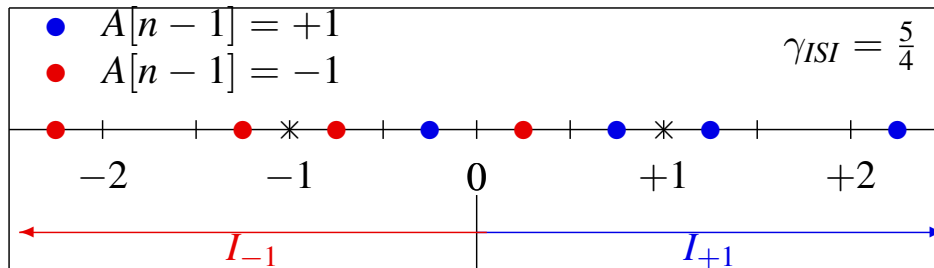
$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+2$
+1	+1	-1	$+1$
+1	-1	+1	0
+1	-1	-1	-1
-1	+1	+1	$+1$
-1	+1	-1	0
-1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-2



- Algunos símbolos llegan al límite de la región de decisión

Ejemplo - $c = \frac{3}{4}$

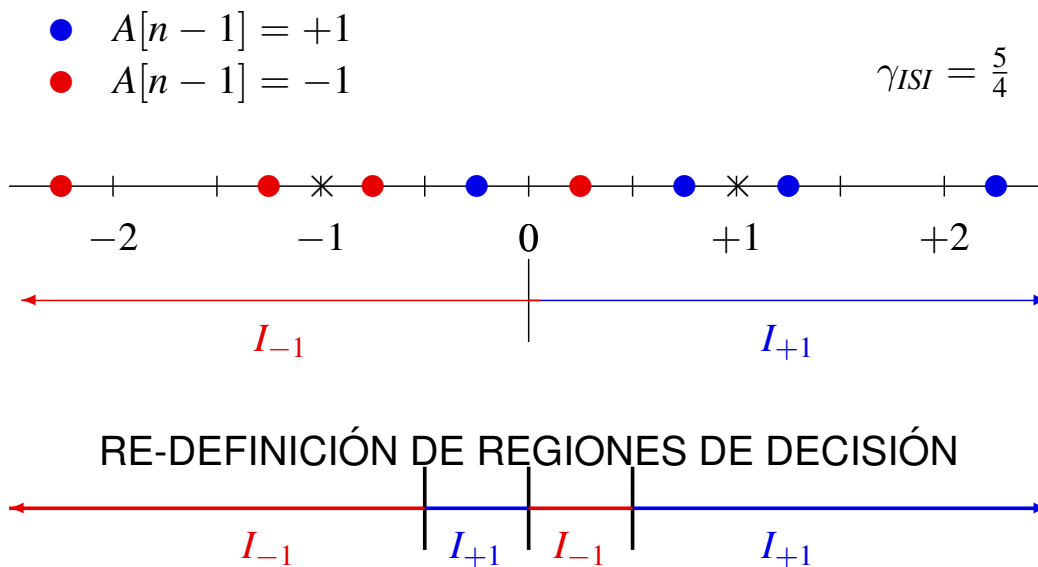
$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	$+\frac{9}{4}$
+1	+1	-1	$+\frac{3}{4}$
+1	-1	+1	$+\frac{1}{4}$
+1	-1	-1	$-\frac{5}{4}$
-1	+1	+1	$+\frac{5}{4}$
-1	+1	-1	$-\frac{1}{4}$
-1	-1	+1	$-\frac{3}{4}$
-1	-1	-1	$-\frac{9}{4}$



- Algunos puntos están fuera de la región de decisión

Redefinición de las regiones de decisión

- Se redefinen las regiones de decisión teniendo en cuenta la constelación extendida generada por la ISI



Detección de secuencias de máxima verosimilitud (MLSD)

- Detección óptima bajo ISI: MLSD
- Secuencia a detectar: L símbolos (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Canal: $\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K_p]]^T$
- Estadístico suficiente para la detección: $N_q = K_p + L$ observaciones

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K_p + L$$

$$o[0] = p[0] \cdot A[0] + p[1] \cdot A[-1] + p[2] \cdot A[-2] + \dots + p[K_p] \cdot A[-K_p]$$

$$o[1] = p[0] \cdot A[1] + p[1] \cdot A[0] + p[2] \cdot A[-1] \dots + p[K_p] \cdot A[-K_p]$$

...

$$o[K_p + L - 1] = p[0] \cdot A[K_p + L - 1] + p[1] \cdot A[K_p + L - 2] + \dots \\ + p[K_p - 1] \cdot A[L] + p[K_p] \cdot A[L - 1]$$

- Information adicional que es necesaria:

$$A[-1], A[-2], \dots, A[-K_p] \text{ y } A[L], A[L+1], \dots, A[L+K_p-1]$$

- ▶ Los K_p símbolos anteriores y K_p posteriores

Secuencia de máxima verosimilitud

- M^L posibles secuencias

$$\mathbf{a}_i = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T, \quad i = 0, 1, \dots, M^L - 1$$

- Secuencia con la máxima verosimilitud:

- ▶ Secuencia

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{a}_i = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T$$

cumpliendo la siguiente condición

$$f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) \geq f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_j), \quad j = 0, 1, \dots, M^L - 1, \quad \forall j \neq i.$$

Estimación de la secuencia de máxima verosimilitud

- Expresión analítica de la verosimilitud

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \prod_{n=0}^{N_q-1} f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i)$$

- Distribución condicional para cada observación (cada n)

$$f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i) = \mathcal{N}(o_i[n], \sigma_z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_z^2} \left| q[n] - \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot a_i[n-k] \right|^2 \right\}$$

- Verosimilitud total

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma_z^2)^{N_q/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_z^2} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2 \right\}$$

- Secuencia más verosímil

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{a}_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2, \quad o_i[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot a_i[n-k]$$

Detección de secuencia ML - Resumen

- Secuencia a detectar: L símbolos

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Estadístico suficiente

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q-1]], \quad N_q = K_p + L$$

- Information adicional: K_p símbolos anteriores y K_p posteriores

$$A[-1], A[-2], \dots, A[-K_p] \text{ y } A[L], A[L+1], \dots, A[L+K_p-1]$$

- Secuencia más verosímil

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{a}_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} \left| q[n] - \sum_{k=0}^{K_p} p[k] a_i[n-k] \right|^2$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{a}_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2$$

$$\mathbf{a} = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T$$

Ejemplo: 2-PAM $K_p = 1, L = 3$

- Constelación de símbolos: $A[n] \in \{\pm 1\}$
- Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1], K_p = 1$
- Secuencia a estimar: $A = [A[0], A[1], A[2]], L = 3$
- Estadístico para la decisión: $q = [q[0], q[1], q[2], q[3]]$

$$q[-1] = A[-1] + 0,5 \cdot A[-2] + z[-1]$$

$$q[0] = A[0] + 0,5 \cdot A[-1] + z[0]$$

$$q[1] = A[1] + 0,5 \cdot A[0] + z[1]$$

$$q[2] = A[2] + 0,5 \cdot A[1] + z[2]$$

$$q[3] = A[3] + 0,5 \cdot A[2] + z[3]$$

$$q[4] = A[4] + 0,5 \cdot A[3] + z[4]$$

- Premisa: Se conoce el valor de $A[-1] = A[3] = +1$
- Problema: decidir la secuencia de 3 símbolos cuando la observación es $q[0] = 1,4 - q[1] = -0,4 - q[2] = 0,6 - q[3] = 1,6$

Detección: Comparación con las salidas sin ruido

$$q[0] = 1,4 - q[1] = -0,4 - q[2] = 0,6 - q[3] = 1,6$$

- Evaluación de las salidas sin ruido, $o[n]$, generadas por las 8 posibles secuencias, y su correspondiente métrica de verosimilitud

$$\sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

$A[0]$	$A[1]$	$A[2]$	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	Métrica
-1	-1	-1	-0,5	-1,5	-1,5	+0,5	10,44
-1	-1	+1	-0,5	-1,5	+0,5	+1,5	4,84
-1	+1	-1	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5	6,84
-1	+1	+1	-0,5	+0,5	+1,5	+1,5	5,24
+1	-1	-1	+1,5	-0,5	-1,5	+0,5	5,64
+1	-1	+1	+1,5	-0,5	+0,5	+1,5	0,04
+1	+1	-1	+1,5	+1,5	-0,5	+0,5	6,04
+1	+1	+1	+1,5	+1,5	+1,5	+1,5	4,44

- Secuencia con la salida sin ruido “más parecida” (ML):
+1 -1 +1

Estima eficiente - Definición de estado del sistema $\psi[n]$

- El cálculo de la verosimilitud para cada posible secuencia es ineficiente
- La salida sin ruido es una máquina de estados finitos

$$o[n] = A[n] \cdot p[0] + \sum_{k=1}^{K_p} p[k] \cdot A[n - k]$$

- Definición de estado en el instante discreto n
Conjunto de K_p símbolos previos (pasado) que contribuyen en $o[n]$

$$\psi[n] = [A[n - 1], A[n - 2], \dots, A[n - K_p]]^T$$

Número de posibles estados es M^{K_p}

- Dependencias

$$o[n] = f(A[n], \psi[n])$$

$$o[n] = g(\psi[n], \psi[n + 1])$$

$$\psi[n + 1] = f(\psi[n], A[n])$$

Diagrama de estados

Representación de la evolución del estado del sistema bajo ISI

$$\psi[n] = [A[n - 1], A[n - 2], \dots, A[n - K_p + 1], A[n - K_p]]^T$$

$$\psi[n + 1] = [A[n], A[n - 1], A[n - 2], \dots, A[n - K_p + 1]]^T$$

- Hay M^{K_p} posibles estados
- M flechas salen de cada estado, una por cada posible valor de $A[n]$
- M flechas llegan a cada estado, todas asociadas al mismo valor de $A[n]$
- Cada flecha se etiqueta con la siguiente información

$$A[n] | o[n]$$

i.e., valor del símbolo actual que fuerza la transición entre estados, y la salida sin ruido que se genera en ese caso

Diagrama de estados - Ejemplo A

- $A[n] \in \{\pm 1\}, p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$

- ▶ Salida sin ruido

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n - 1]$$

- ▶ Estado

$$\psi[n] = A[n - 1], \quad \psi[n + 1] = A[n]$$

- ▶ Diagrama de estados

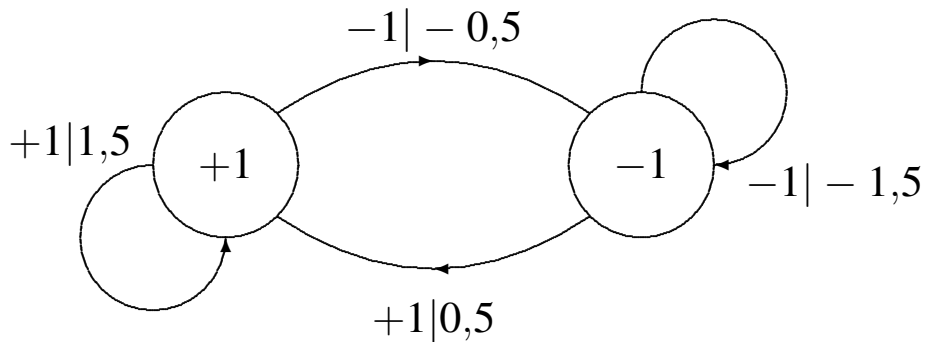


Diagrama de estados - Ejemplo B

- $A[n] \in \{\pm 1\}, p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1] + \frac{1}{4}\delta[n - 2]$

- $o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n - 1] + \frac{1}{4}A[n - 2]$

- $\psi[n] = [A[n - 1], A[n - 2]]^T, \psi[n + 1] = [A[n], A[n - 1]]^T$

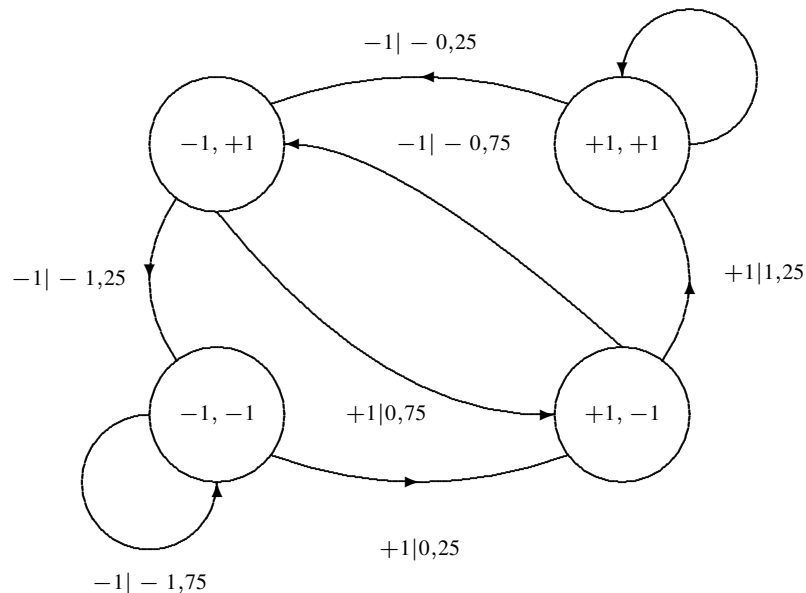


Diagrama de rejilla - Ejemplo A

- Representa la evolución del estado a lo largo del tiempo
- Ejemplo: $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$
- Definición de estado: $\psi[n] = A[n - 1]$
- Transición entre estados: $\psi[n] = A[n - 1] \rightarrow \psi[n + 1] = A[n]$
- Etiquetas: $A[n]|o[n]$, siendo $o[n] = A[n] * p[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n - 1]$

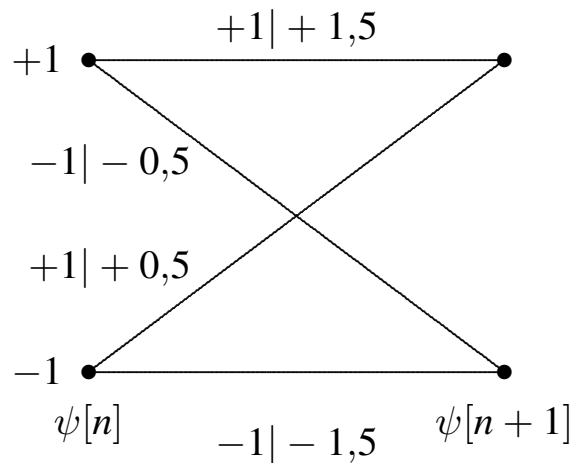


Diagrama de rejilla - Ejemplo B

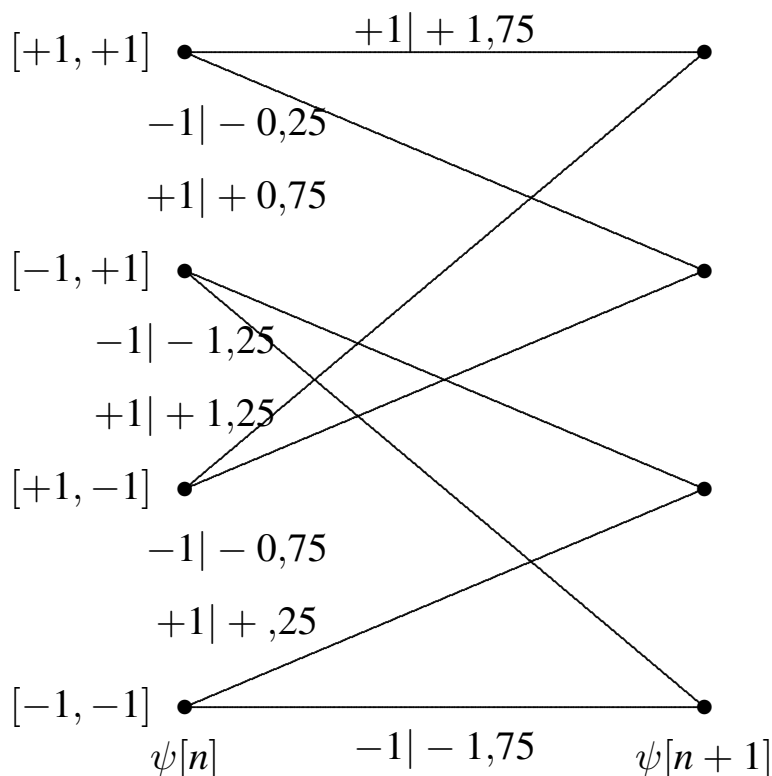
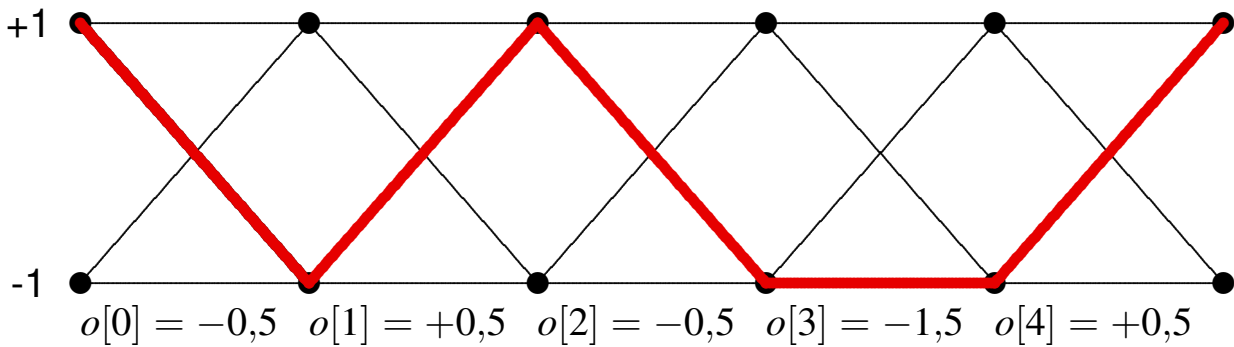


Diagrama de rejilla - Representación de una secuencia A

- Una secuencia se puede representar como un camino a través de la rejilla
 - ▶ Estado inicial = $\psi[0] = +1$
 - ▶ Ejemplo $A = [-1, +1, -1, -1, +1]$

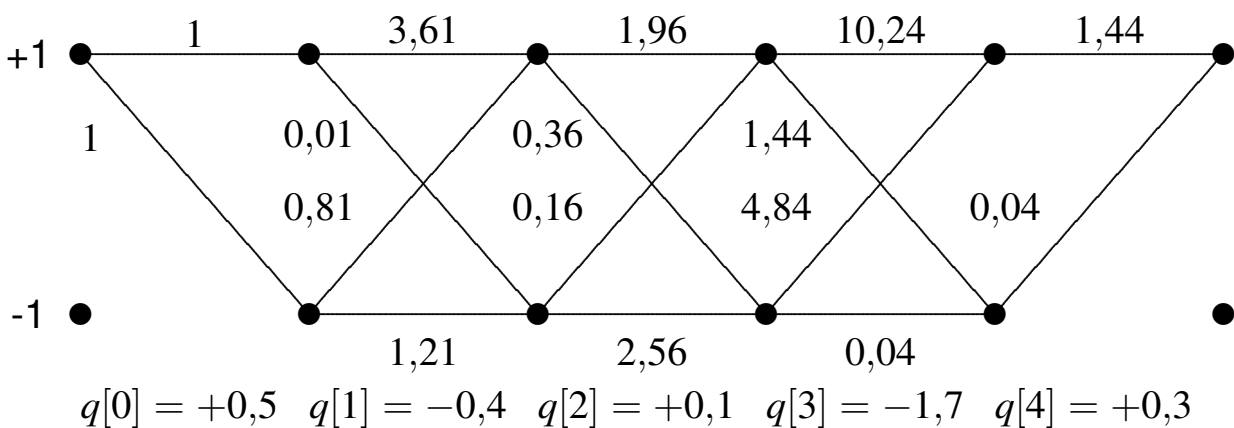


Detección de secuencias ML usando la rejilla

- Secuencia más verosímil

$$\hat{A} = \arg \min_{a_i} \sum_{n=0}^{N+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^N p[k] a_i[n-k]}_{o_i[n]} \right|^2$$

- ▶ Nuevas etiquetas en la rejilla - métrica de rama $|q[n] - o_i[n]|^2$
- ▶ Verosimilitud para una secuencia: suma de las métricas de rama de su camino a través de la rejilla



Detección de secuencias ML usando la rejilla

- Secuencia más verosímil

$$\hat{A} = \arg \min_{a_i} \sum_{n=0}^{N+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^N p[k] a_i[n-k]}_{o_i[n]} \right|^2$$

- ▶ Nuevas etiquetas en la rejilla - métrica de rama $|q[n] - o_i[n]|^2$
- ▶ Verosimilitud para una secuencia: suma de las métricas de rama de su camino a través de la rejilla

