Prestaciones - Suceso erróneo

- Un camino a través de la rejilla representa una secuencia transmitida
  - Se puede describir un camino (secuencia) mediante una secuencia de estados

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi[0], \psi[1], \psi[2], \cdots]$$

- Suceso erróneo: secuencia decidida distinta a la transmitida
  - Representación sobre la rejilla: dos caminos diferentes

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{\psi}, \hat{\boldsymbol{\psi}})$$

- Un suceso erróneo tiene asociados dos parámetros
  - Longitud del suceso ($\ell(\boldsymbol{e})$)
  - Número de símbolos erróneos asociados, o peso del suceso ($w(\boldsymbol{e})$)
- Definición de longitud del suceso $\ell(\boldsymbol{e})$
  Número de estados en que difieren ambos caminos: ejemplo, $\ell(\varepsilon) = \ell$
  - $\psi[m] = \hat{\psi}[m]$
  - $\psi[m+\ell+1] = \hat{\psi}[m+\ell+1]$
  - $\psi[n] \neq \hat{\psi}[n]$ para $m < n \leq m+\ell$
- El número de errores del suceso, $w(\boldsymbol{e})$, cumplirá $1 \leq w(\boldsymbol{e}) \leq \ell$

Probabilidad de que la secuencia detectada sea errónea

- La secuencia más verosímil es la que genera la salida sin ruido más similar a la observación (en sentido de distancia euclídea)
- Se puede interpretar el problema como el de detectar una de las secuencias como decidir uno entre M^L vectores de la dimensión del vector de observaciones ($K_p + L$ símbolos)
  - La solución ML es el vector de los posibles a mínima distancia euclídea
- Aproximación de la probabilidad de error para este problema

$$P\{\text{secuencia errónea}\} \approx k \cdot Q\left(\frac{D_{min}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - D_{min}: distancia euclídea mínima entre las salidas sin ruido de dos secuencias distintas$\{o_i[n], o_j[n]\}$, $j \neq i$
  - k: máximo número de secuencias cuyas salidas sin ruido están a distancia D_{min} de la salida sin ruido de una secuencia dada
- Cuando L crece, k crece, u por tanto la probabilidad de que la secuencia detectada sea errónea tiende a infinito cuando L tiende a infinito

Probabilidad de error de símbolo (P_e)

- En general es más útil estimar la probabilidad de error de símbolo

$$P_e = P\{\hat{A}[n] \neq A[n]\}$$

- Definición para detección de secuencias ML

$$P_e = \frac{1}{L} \cdot \sum_{\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}} w(\boldsymbol{e}) \cdot P\{\boldsymbol{e}\}$$

  donde
  - $P\{\boldsymbol{e}\}$: probabilidad de suceso erróneo $\boldsymbol{e}$
  - $\mathcal{E}$: conjunto de sucesos erróneos que pueden ocurrir en la rejilla

- Probabilidad del suceso erróneo $\boldsymbol{e} = (\psi, \hat{\psi})$

$$P\{\boldsymbol{e}\} = P\{\hat{\psi}|\psi\} \cdot P\{\psi\}$$

- Difícil de evaluar $\rightarrow$ Cotas y aproximaciones para P_e

Cotas y aproximación para P_e

- Cotas para la probabilidad de error

$$k_2 \cdot Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \leq P_e \leq k_1 \cdot Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - k_2 porcentaje de caminos en la rejilla que tienen asociado un suceso erróne a distancia D_{min}. Siempre cumple $k_2 \leq 1$
  - k_1 promedia el número de errores producido por sucesos erróneos a mínima distancia $k_1 = \sum_{\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_{min}} w(\boldsymbol{e}) \cdot P\{\psi\}$

- Aproximación for P_e

$$P_e \approx k_0 \cdot Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

  - k_0: constante tal que $k_2 \leq k_0 \leq k_1$. Ambos k_1 y k_2 son independientes de la varianza de ruido

Distancia euclídea mínima respecto a la salida sin ruido de una secuencia dada

- Secuencia de referencia $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_i$

$$D_{min}(\boldsymbol{a}_i) = \arg\min_{\substack{\boldsymbol{a}_j \\ j \neq i}} \sqrt{\sum_{n=0}^{N_q-1} \left| o_i[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^{K} p[k] \cdot a_j[n-k]}_{o_j[n]} \right|^2}$$

- Se puede encontrar a través de la rejilla (Viterbi)
  - Métrica de rama: $|o_i[n] - o_j[n]|^2$
  - Referencia: $o_i[n]$
  - El algoritmo busca la secuencia con salida sin ruido a mínima distancia

Distancia mínima D_{min}

- Valor mínimo de $D_{min}(\boldsymbol{a}_i)$, para $i = 0, 1, \cdots, M^L - 1$

$$D_{min} = \arg\min_{\substack{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \\ j \neq i}} \sqrt{\sum_{n=0}^{N_q-1} \left| \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot (a_i[n-k] - a_j[n-k]) \right|^2}$$

i.e., la mínima distancia entre salidas sin ruido producidas por dos secuencias distintas

- Si el diagrama de rejilla es simétrico
  - Cálculo respecto a una única secuencia
- En general, D_{min} depende del término $\left| \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot (a_i[n-k] - a_j[n-k]) \right|^2$
  - Salida sin ruido si se transmite una secuencia $\xi[n] = a_i[n] - a_j[n]$
- Rejilla definida sobre la constelación de error

$$\xi[n] = a_i[n] - a_j[n]$$

  - Referencia: secuencia de todo ceros (asociada a una detección sin errores)

Ejemplo: 2-PAM $K_p = 1$, $L = 3$

- Constelación de símbolos: $A[n] \in \{\pm 1\}$
- Canal: $p[n] = \delta[n] + 0{,}5 \cdot \delta[n-1]$, $K_p = 1$
- Secuencia a estimar: $\boldsymbol{A} = [A[0], A[1], A[2]]$, $L = 3$
- Estadístico para la decisión: $\boldsymbol{q} = [q[0], q[1], q[2], q[3]]$

$$q[n] = \underbrace{A[n] * p[n]}_{o[n]} + z[n]$$

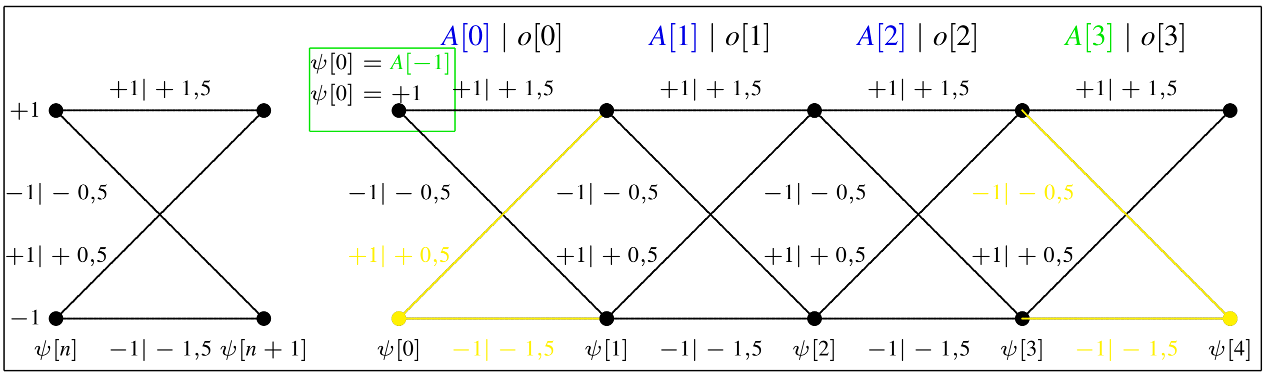
$$\begin{aligned}
o[-1] &= A[-1] + 0{,}5 \cdot A[-2] \\
o[0] &= A[0] + 0{,}5 \cdot A[-1] \\
o[1] &= A[1] + 0{,}5 \cdot A[0] \\
o[2] &= A[2] + 0{,}5 \cdot A[1] \\
o[3] &= A[3] + 0{,}5 \cdot A[2] \\
o[4] &= A[4] + 0{,}5 \cdot A[3]
\end{aligned}$$

- Premisa: Se conoce el valor de $A[-1] = A[3] = +1$
  - Cabecera cíclica de $K_p = 1$ símbolos

Salidas sin ruido asociadas a cada secuencia

i	$A[0]$	$A[1]$	$A[2]$	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$
0	$+1$	$+1$	$+1$	$+1{,}5$	$+1{,}5$	$+1{,}5$	$+1{,}5$
1	$+1$	$+1$	-1	$+1{,}5$	$+1{,}5$	$-0{,}5$	$+0{,}5$
2	$+1$	-1	$+1$	$+1{,}5$	$-0{,}5$	$+0{,}5$	$+1{,}5$
3	$+1$	-1	-1	$+1{,}5$	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$+0{,}5$
4	-1	$+1$	$+1$	$-0{,}5$	$+0{,}5$	$+1{,}5$	$+1{,}5$
5	-1	$+1$	-1	$-0{,}5$	$+0{,}5$	$-0{,}5$	$+0{,}5$
6	-1	-1	$+1$	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$+0{,}5$	$+1{,}5$
7	-1	-1	-1	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$-1{,}5$	$+0{,}5$

Representación de las 8 secuencias (y sus salidas sin ruido) sobre la rejilla (en negro)

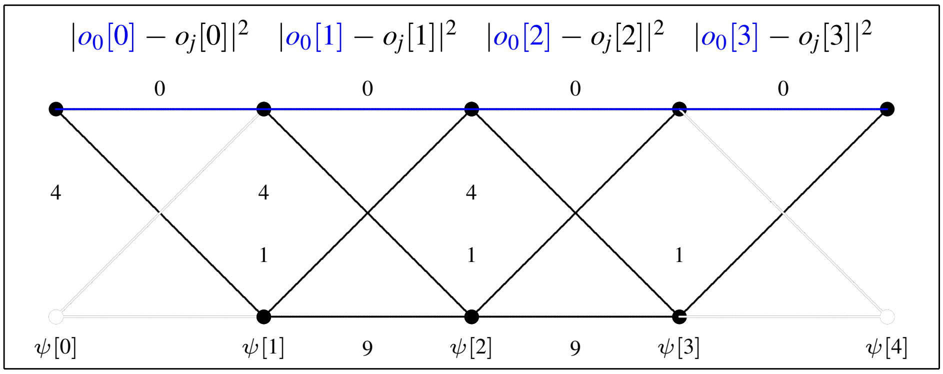


Distancia euclídea entre cada par de secuencias

Valor de $\sum_{n=0}^{Nq-1} |o_i[n] - o_j[n]|^2$

i	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
0	0	5	5	14	5	10	14	23
1	5	0	6	5	10	5	15	14
2	5	6	0	5	6	7	5	10
3	14	5	5	0	15	6	10	5
4	5	10	6	15	0	5	5	14
5	10	5	7	6	5	0	6	5
6	14	15	5	10	5	6	0	5
7	23	14	10	5	14	5	5	0

- Mínima distancia euclídea: $D_{min} = \sqrt{5}$
- Cálculo de $D_{min}(\boldsymbol{a}_0)$ sobre la rejilla
  - Referencia: $o_0[n]$ - Métrica $|o_0[n] - o_i[n]|^2$
  - Búsqueda del camino de menor métrica, exceptuando el de referencia (en azul)



Rejilla sobre constelación de error - Ejemplo

- Constelación de error para 2-PAM

$$\xi[n] \in \{+2, 0, -2\}$$

- Salidas sin ruido para $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1]$

$$o_\xi[n] = p[n] * \xi[n] = \xi[n] + \frac{1}{2} \cdot \xi[n-1]$$

- Estados sobre la constelación de errores

$$\psi_\xi[n] = \xi[n-1], \ \psi_\xi[n+1] = \xi[n]$$

$\xi[n]$	$\xi[n-1]$	$o_\xi[n]$
$+2$	$+2$	$+3$
$+0$	$+2$	$+1$
-2	$+2$	-1
$+2$	$+0$	$+2$
$+0$	$+0$	$+0$
-2	$+0$	-2
$+2$	-2	$+1$
$+0$	-2	-1
-2	-2	-3