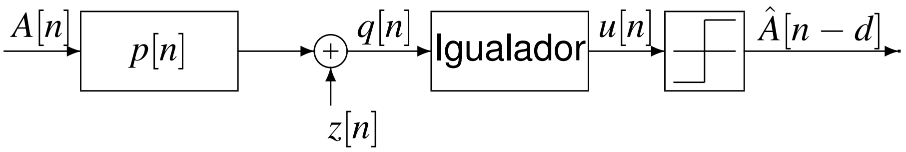
Igualadores de canal

- Solución más simple para un receptor bajo ISI
  - Detector símbolo a símbolo sin memoria (retardo óptimo + re-definición de regiones de decisión)
  - Prestaciones bajas para altos niveles de ISI
- Solución óptima
  - Detección de secuencias de máxima verosimilitud (MLSD)
  - Complejidad exponencial del algoritmo de Viterbi
    - ★ Hay M^{K_p} estados
    - ★ De cada estado salen M flechas, una por cada posible valor de $A[n]$
    - ★ A cada estado llegan M flechas, todas generadas por el mismo valor de $A[n]$
- Solución sub-óptima
  - Igualador de canal + decisor símbolo a símbolo
  - Prestaciones peores que MLSD, pero mejor que detector símbolo a símbolo sin memoria



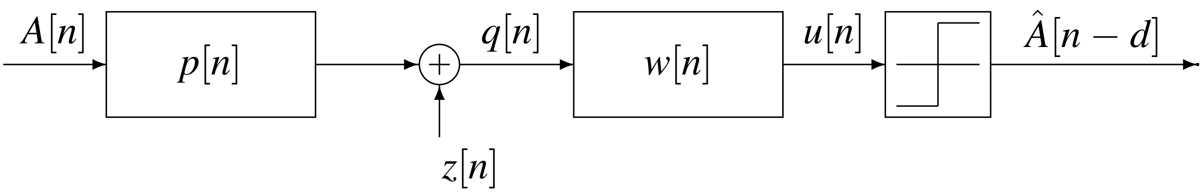
Estructuras de igualación

- Igualador lineal
  - LTE: *Linear Transversal Equalizer*
- Igualador con realimentación de decisiones
  - DFE: *Decision Feedback Equalizer*
- Otras estructuras no lineales
  - Igualador bayesiano
  - Redes neuronales (MLP. RBF, etc.)
  - Máquinas de vectores soporte
  - ...

Igualación no ciega / ciega

- Igualación no ciega
  - Se conoce el canal, o
  - Se dispone de una secuencia de referencia
- Igualación ciega
  - No se conoce el canal
  - No se dispone de una secuencia de referencia
  - Se dispone de información estadística sobre $A[n]$

Igualación no ciega lineal



- Se asume que se conoce el canal $p[n]$ (no ciega)
- Estructura del igualador (lineal)
  - Sistema lineal causal de $K_W + 1$ coeficientes (memoria K_w)

$$u[n] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot q[n-k] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{q}_n$$

- Obtención de los coeficientes del igualador: criterios de igualación
  - Forzador de ceros (ZF)
  - Mínimo error cuadrático medio (MMSE)

Igualador lineal

- Filtro lineal causal de $K_w + 1$ coeficientes, $w[n]$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot q[n-k] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{K_p} p[\ell] \cdot A[n-k-\ell] + z[n-k] \right)$$

- Respuesta conjunta de canal e igualador

$$c[n] = w[n] * p[n], \quad 0 \leq n \leq K_p + K_w$$

Respuesta causal de duración $K_p + K_w + 1$ coeficientes (memoria $K_p + K_w$ coeficientes)

$$u[n] = A[n] * c[n] + z[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{K_p+K_w} c[k] \cdot A[n-k] + \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot z[n-k]$$

- Salida del igualador - retardo d en la decisión

$$u[n] = \underbrace{c[d] \cdot A[n-d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq d}}^{K_p+K_w} c[k] \cdot A[n-k]}_{\text{ISI residual}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot z[n-k]}_{\text{ruido filtrado } z'[n]}$$

Criterios de diseño para igualadores lineales

- Criterio forzador de ceros (ZF, *Zero Forcing*)
  - Busca eliminar la interferencia intersimbólica (ISI)
  - Matemáticamente, se busca una respuesta conjunta canal-igualador

$$c[n] = p[n] * w[n] = \delta[n-d], \text{ para un retardo arbitrario } d$$

Se fuerzan ceros en la respuesta conjunta

- Criterio de mínimo error cuadrático medio (MMSE, *Minimum Mean Squared Error*)
  - Busca minimizar el efecto conjunto de ISI y ruido filtrado
  - Matemáticamente, MMSE minimiza la energía del error de observación para un retardo d, definido como

$$e_d[n] = A[n-d] - u[n]$$

Diferencia entre la salida del igualador y el símbolo a decidir (considerando d)

Diseño del igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Respuesta ideal (en el dominio temporal)

$$c[n] = p[n] * w[n] = \delta[n-d]$$

- El igualador ideal se puede obtener en el dominio frecuencial

$$C(e^{j\omega}) = P(e^{j\omega}) \cdot W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

- Selección del retardo d - Descomposición de $P(z)$ en sistemas de fase máxima y mínima

$$P(z) = P_0 \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^{K_1} \left(1 - \alpha_k \cdot z^{-1}\right)}_{P_{min}(z)} \cdot \underbrace{\prod_{\ell=1}^{K_2} \left(1 - \beta_\ell \cdot z^{-1}\right)}_{P_{max}(z)}$$

$$|\alpha_k| < 1, \text{ para } 1 \leq k \leq K_1, \ |\beta_\ell| > 1, \text{ para } 1 \leq \ell \leq K_2$$

  - $P_{min}(z)$, sistema de fase mínima, tiene respuesta estable causal
  - La inversa estable de $P_{max}(z)$, sistema de fase máxima, es no causal
  - Se elige d para tener una respuesta estable causal

Diseño del igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Procedimiento para obtener el igualador ZF sin limitaciones en K_W:
  - Se obtiene la inversa (en frecuencia) de la respuesta del canal $p[n]$

$$W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{P\left(e^{j\omega}\right)}$$

  - Se obtiene su correspondiente respuesta en el tiempo

$$w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\left\{W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

    - Si es una respuesta no causal, se evalúa la longitud del término no causal, i.e., se busca el máximo valor de k tal que $w^{(0)}[-k] \neq 0$
    - Entonces, se toma como retardo $d = k$
  - La respuesta estable causal del igualador es entonces

$$w[n] = w^{(0)}[n-d]$$

Principal inconveniente del igualador ZF

- El igualador ZF básicamente invierte la respuesta en frecuencia del canal
  - El igualador afecta a la señal transmitida, pero también al ruido
- Densidad espectral de potencia del ruido filtrado $z'[n]$

$$S_{z'}^{ZF}(e^{j\omega}) = S_z(e^{j\omega}) \cdot \left|W(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{\sigma_z^2}{|P(e^{j\omega})|^2}$$

- Potencia de la secuencia de ruido $z'[n]$ es

$$\sigma_{z'}^2|_{ZF} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{z'}^{ZF}(e^{j\omega})\, d\omega = \sigma_z^2 \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2}\, d\omega$$

  - Se puede producir una amplificación del ruido si el canal tiene fuertes atenuaciones en algunas frecuencias
    NOTA: Matemáticamente, se tiene potencia infinita si el canal tiene algún cero espectral

Diseño del igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- Sistema de ecuaciones para la respuesta conjunta canal-igualador

$$c[n] = \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot w[n-k]$$

  - Hay $K_p + K_w + 1$ ecuaciones, una para cada valor de n
- Sistema de ecuaciones en notación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c[0] \\ c[1] \\ \vdots \\ c[K_p+K_w] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}\equiv(K_p+K_w+1)\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} p[0] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p[1] & p[0] & 0 & \cdots & 0 \\ p[2] & p[1] & p[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p[K_p] & p[K_p-1] & p[K_p-2] & \cdots & 0 \\ 0 & p[K_p] & p[K_p-1] & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p[K_p] & \cdots & p[0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p[K_p] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}\equiv(K_p+K_w+1)\times(K_w+1)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[K_w] \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}\equiv(K_w+1)\times 1}$$

A la matriz $\boldsymbol{P}$ se le llama MATRIZ DE CANAL o MATRIZ DE CONVOLUCION DEL CANAL

Diseño del igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes (II)

- Respuesta conjunta deseada para retardo d

$$c[n] = \delta[n-d] \rightarrow \mathbf{c}_d = [\underbrace{00\cdots0}_{d}\,10\cdots0]^T$$

Sistema de ecuaciones para esta respuesta ideal $\mathbf{c}_d = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}$

- Es un sistema de ecuaciones sobredeterminado
  - $K_p + K_w + 1$ ecuaciones (una para cada n en $c[n]$)
  - $K_w + 1$ incógnitas (una por coeficiente del igualador $w[n]$)
- Solución de mínimos cuadrados

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \arg\min_{\mathbf{w}} ||\mathbf{c}_d - \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}||^2 = \boldsymbol{P}^{\#} \cdot \mathbf{c}_d$$

  - La solución está dada por la pseudo-inversa de Moore-Penrose

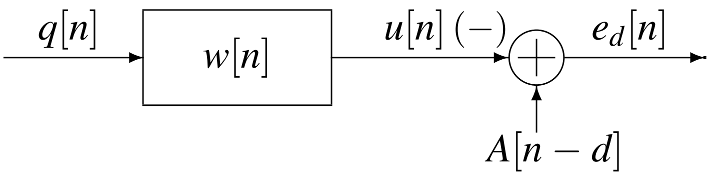
$$P^{\#} = (\boldsymbol{P}^H \cdot \boldsymbol{P})^{-1} \cdot \boldsymbol{P}^H$$

La solución obtenida no cumple todas las ecuaciones, i.e.

Respuesta conjunta $\boldsymbol{c}_d^{ZF} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}_d^{ZF} \neq \mathbf{c}_d$

Hay ISI residual debido a la limitación en el número de coeficientes

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes



- Secuencia de error a la salida del igualador para retardo d

$$e_d[n] = A[n-d] - u[n]$$

- MMSE - filtrado lineal óptimo : minimización de $E\left[|e_d[n]|^2\right]$
- Solución MMSE: Principio de ortogonalidad
  - El error $e_d[n]$ es ortogonal a la salida del sistema $u[n]$
  - El error $e_d[n]$ es ortogonal a la entrada del sistema $q[n]$

$$E[\underbrace{(A[n-d] - u[n])}_{e_d[n]} \cdot q^*[\ell]] = 0, \ \forall \ell$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$E[A[n-d] \cdot q^*[\ell]] = E[u[n] \cdot q^*[\ell]], \ \forall \ell$$

Principio de ortogonalidad - primer término

- Asunciones iniciales
  - Secuencia de datos $A[n]$ blanca: $R_A[k] = E_s \cdot \delta[k]$
  - Secuancia de ruido $z[n]$ blanca: $R_z[k] = \sigma_z^2 \cdot \delta[k]$
  - Secuencias de datos y ruido, $A[n]$ y $z[n]$, independientes

  Esto implica que $R_{A,z}[k] = E\left[A[n+k] \cdot z^*[n]\right] = 0, \ \forall k$
- Desarrollo del primer término del principio de ortogonalidad

$$\begin{aligned}
E[A[n-d] \cdot q^*[\ell]] =& E\left[A[n-d] \cdot \left(\sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot A[\ell-k] + z[\ell]\right)^*\right] \\
=& \sum_{k=0}^{K_p} p^*[k] \cdot \underbrace{E\left[A[n-d] \cdot A^*[\ell-k]\right]}_{R_A[n-d-\ell+k]} \\
&+ \underbrace{E\left[A[n-d] \cdot z^*[\ell]\right]}_{R_{A,z}[n-d-\ell]} \\
=& E_s \cdot p^*[\ell+d-n]
\end{aligned}$$

Note que como $R_A[k] = E_s \cdot \delta[n]$, $R_A[n-d-\ell+k] \neq 0$ sólo para $k = \ell+d-n$

Principio de ortogonalidad - segundo término

$$\begin{aligned}
E\left[u[n] \cdot q^*[\ell]\right] &= E\left[\left(\sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot q[n-k]\right) \cdot q^*[\ell]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot \underbrace{E[q[n-k \cdot q^*[\ell]]}_{R_q[n-k-\ell]} = \left.(w[k] * R_q[k])\right|_{k=n-\ell}
\end{aligned}$$

- Función de autocorrelaciónn de las observaciones $q[n]$

$$\begin{aligned}
R_q[n] &= E\left[q[\ell+n] \cdot q^*[\ell]\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot A[\ell+n-k] + z[\ell+n]\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{K_p} p[j] \cdot A[\ell-j] + z[\ell]\right)^*\right] \\
&= \sum_{k=0}^{K_p} \sum_{j=0}^{K_p} p[k] \cdot p^*[j] \underbrace{E\left[A[\ell+n-k] \cdot A^*[\ell-j]\right]}_{R_A[n-k+j]} + \underbrace{E\left[z[\ell+n] \cdot z^*[\ell]\right]}_{R_z[n]} \\
&= E_s \cdot \sum_{k=0}^{K_p} p[k] \cdot p^*[k-n] + \sigma_z^2 \cdot \delta[n] = E_s \cdot (p[n] * p^*[-n]) + \sigma_z^2 \cdot \delta[n]
\end{aligned}$$

Note que como $R_A[k] = E_s \cdot \delta[n]$, $R_A[n-k+j] \neq 0$ sólo para $j = k-n$

Principio de ortogonalidad - Igualador

- Combinando ambos términos

$$E_s \cdot p^*[\underbrace{\ell + d - n}_{-(n-\ell-d)}] = w[n] * \left[E_s \cdot (p[k] * p^*[-k])|_{k=n-\ell} + \sigma_z^2 \cdot \delta[n-\ell]\right]$$

- Haciendo el cambio de variable $k = n - \ell$, y dividiendo por E_s

$$p^*[-(k-d)] = w[k] * \left[(p[k] * p^*[-k]) + \frac{\sigma_z^2}{E_s} \cdot \delta[k]\right]$$

  - Esto es equivalente, en el dominio frecuencial, a

$$P^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega d} = W(e^{j\omega}) \times \left[P(e^{j\omega}) \cdot P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}\right]$$

- La expresión del igualador en el dominio de la frecuencia es

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega}) \cdot P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

Retardo d: implementación causal de la respuesta $w[n]$

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Expresión del igualador en el dominio de la frecuencia

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega}) \cdot P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} = \frac{P^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega d}}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

Retardo d: implementación causal de la respuesta $w[n]$

- Para $\lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0$ (potencia del ruido blanco $z[n]$ nula, $\sigma_z^2 = 0$)

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega}) \cdot P^*(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

El igualador MMSE coincide con el igualador ZF !!!

Diseño del igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Procedimiento para obtener el igualador MMSE sin limitaciones en K_W:
  - Se obtiene la respuesta del igualador sin considerar retardo

$$W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{P^*\left(e^{j\omega}\right)}{P\left(e^{j\omega}\right)\cdot P^*\left(e^{j\omega}\right)+\frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

  - Se obtiene su correspondiente respuesta en el tiempo

$$w^{(0)}[n]=\mathcal{TF}^{-1}\left\{W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

    - ★ Si es una respuesta no causal, se evalúa la longitud del término no causal, i.e., se busca el máximo valor de k tal que $w^{(0)}[-k]\neq 0$
    - ★ Entonces, se toma como retardo $d=k$
  - La respuesta estable causal del igualador es entonces

$$w[n]=w^{(0)}[n-d]$$

Igualador lineal MMSE con K_w+1 coeficientes

- Principio de ortogonalidad

$$R_{A,q}[n-d]=\sum_{k=0}^{K_w}w[k]\cdot R_q[n-k]$$

  Conjunto de infinitas ecuaciones (una para cada valor de n)

- Sistema de K_w+1 ecuaciones para las K_w+1 incógnitas

$$\boldsymbol{r}_{A,q}^{d}=\boldsymbol{R}_q\cdot\mathbf{w}\rightarrow\mathbf{w}_d^{MMSE}=(\boldsymbol{R}_q)^{-1}\cdot\boldsymbol{r}_{A,q}^{d}$$

  NOTA: definiciones de vectores y matrices en la siguiente diapositiva (incluyendo en este caso las ecuaciones para $0\leq n\leq K_w$)

- La solución puede expresarse tambien a través de la matriz $\boldsymbol{P}$

$$\mathbf{w}_d^{MMSE}=(\boldsymbol{P}^H\cdot\boldsymbol{P}+\lambda\cdot\boldsymbol{I})^{-1}\cdot\boldsymbol{P}^H\cdot\mathbf{c}_d$$

$$\lambda=\frac{\sigma_z^2}{E_s}$$

Sistema matricial de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{A,q}[-d] \\ R_{A,q}[-(d-1)] \\ R_{A,q}[-(d-2)] \\ \vdots \\ R_{A,q}[K_w - d] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}_{A,q}^{d}} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_q[0] & R_q^*[1] & R_q^*[2] & \cdots & R_q^*[K_W] \\ R_q[1] & R_q[0] & R_q^*[1] & \cdots & R_q^*[K_W - 1] \\ R_q[2] & R_q[1] & R_q[0] & \cdots & R_q^*[K_W - 2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_q[K_W] & R_q[K_w - 1] & R_q[K_w - 2] & \cdots & R_q[0] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{R}_q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ \vdots \\ w[K_w] \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

Prestaciones asintóticas para igualadores lineales

- Analisis basado en la caracterización de $e_d[n] = A[n-d] - u[n]$
- Salida del igualador

$$u[n] = A[n] * p[n] * w[n] + z[n] * w[n]$$

- Secuencia de error a la salida del igualador

$$e_d[n] = A[n] * (\delta[n-d] - w[n] * p[n])) - z[n] * w[n]$$

- Densidad espectral de potencia del error

$$S_{e_d}\left(e^{j\omega}\right) = S_A\left(e^{j\omega}\right) \cdot \left|e^{-j\omega d} - W\left(e^{j\omega}\right) \cdot P\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 + S_z\left(e^{j\omega}\right) \cdot \left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

- Para secuencias $A[n]$ blancas y ruido $z[n]$ blanco

$$S_{e_d}\left(e^{j\omega}\right) = E_s \cdot \left|e^{-j\omega d} - W\left(e^{j\omega}\right) \cdot P\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 + \sigma_z^2 \cdot \left|W\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

- Potencia de la secuencia de error

$$\sigma_{e_d}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{e_d}\left(e^{j\omega}\right)\, d\omega$$

Prestaciones asintóticas para igualadores lineales (II)

- Reemplazando $W\left(e^{j\omega}\right)$ para el criterio ZF

$$W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})},\ \sigma_{e_d}^2(ZF) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\left|P\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}\,d\omega$$

- Reemplazando $W\left(e^{j\omega}\right)$ para el criterio MMSE

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega})\cdot e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})\cdot P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}},\ \sigma_{e_d}^2(MMSE) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\left|P\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}\,d\omega$$

- Probabilidad de error - Aproximación para P_e

$$P_e \approx k\cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_{e_d}}\right)$$

  - d_{min}: mínima distancia entre símbolos de la constelación
  - k: máximo número de símbolos a d_{min} de un símbolo de la constelación

Prestaciones de igualadores lineales con $K_w + 1$ coeficientes

- Salida del igualador

$$u[n] = \underbrace{c[d]}_{\text{ganancia}} \cdot A[n-d] + \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k\neq d}}^{K+K_w} c[k]\cdot A[n-k]}_{\text{ISI residual}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{K_w} w[k]\cdot z[n-k]}_{\text{ruido filtrado } z'[n]}$$

- Asunciones
  - ISI residual y ruido filtrado son independientes
  - Distribución gausiana para la ISI residual
- Aproximación para la probabilidad de error

$$P_e \approx k\cdot Q\left(\frac{d_{min}\cdot|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{z'}^2 + \sigma_{ISI}^2}}\right)$$

k: máximo número de símbolos a mínima distancia de un símbolo sobre la constelación

Media y varianza del ruido filtrado $z'[n]$

- Media de $z'[n]$

$$E\left[z'[n]\right] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot E[z[n-k]] = 0$$

- Varianza de $z'[n]$

$$\sigma_{z'}^2 = E\left[\left(\sum_{k=0}^{K_w} w[k] \cdot z[n-k]\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{K_w} w^*[j] \cdot z^*[n-j]\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{K_w} \sum_{j=0}^{K_w} w[k] \cdot w^*[j] \cdot \underbrace{E\left[z[n-k] \cdot z^*[n-j]\right]}_{R_z[j-k]=\sigma_z^2 \cdot \delta[j-k]}$$

$$= \sigma_z^2 \cdot \sum_{k=0}^{K_w} |w[k]|^2$$

Media y varianza del término de ISI residual

- Media de la ISI residual

$$E\left[ISI\right] = \sum_{\substack{k=0\\k\neq d}}^{K_p+K_w} c[k] \cdot E[A[n-k]] = 0$$

- Varianza de la ISI residual

$$\sigma_{ISI}^2 = E\left[\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq d}}^{K_p+K_w} c[k] \cdot A[n-k]\right) \cdot \left(\sum_{\substack{j=0\\j\neq d}}^{K_p+K_w} c^*[j] \cdot A^*[n-j]\right)\right]$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\neq d}}^{K_p+K_w} \sum_{\substack{j=0\\j\neq d}}^{K_p+K_w} c[k] \cdot c^*[j] \cdot \underbrace{E\left[A[n-k] \cdot A^*[n-j]\right]}_{R_A[j-k]=E_s \cdot \delta[j-k]}$$

$$= E_s \cdot \sum_{\substack{k=0\\k\neq d}}^{K_p+K_w} |c[k]|^2$$