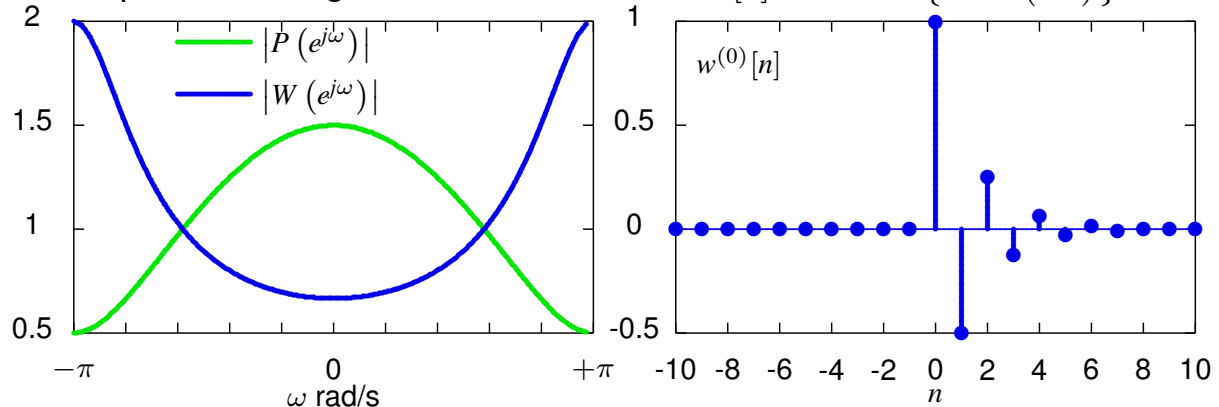


## Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal A

- Canal  $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \sum_n p[n] \cdot e^{-j\omega n} = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo:  $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



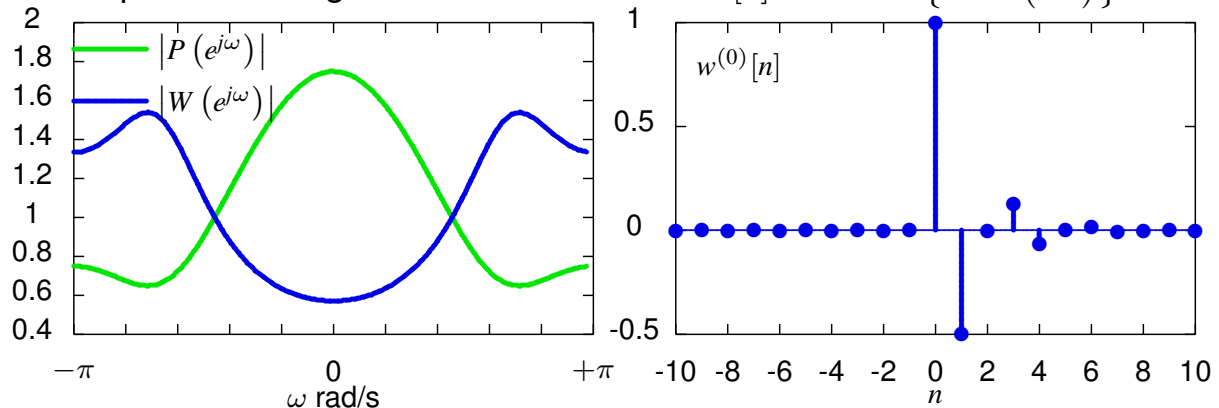
- ▶ Respuesta causal - Retardo  $d = 0$
- ▶ Coeficientes relevantes  $\approx 7$  ( $K_w \approx 6$ )

## Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal B

- Canal  $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \frac{1}{4} \cdot \delta[n - 2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{4} \cdot e^{-j\omega^2}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo:  $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



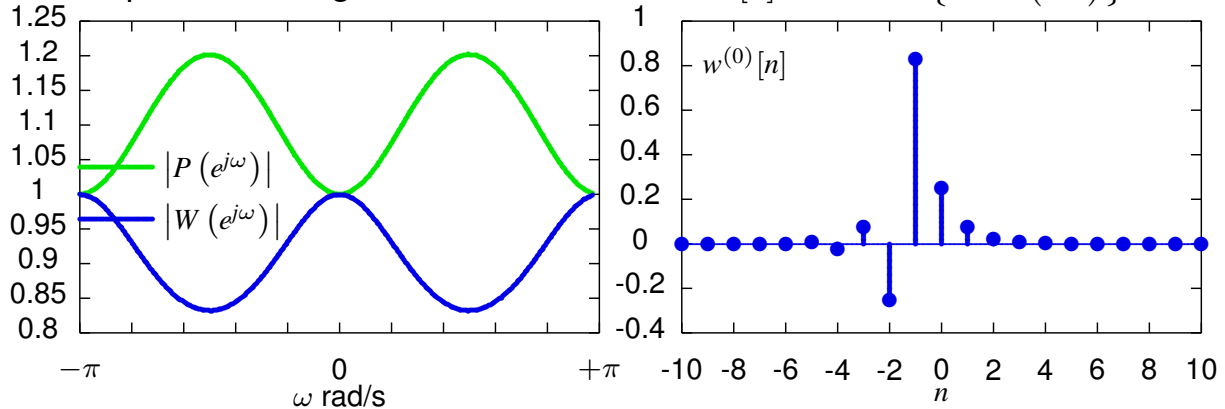
- ▶ Respuesta causal - Retardo  $d = 0$
- ▶ Coeficientes relevantes  $\approx 7$  ( $K_w \approx 6$ )

## Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal C

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] + \delta[n - 1] - \frac{1}{3} \cdot \delta[n - 2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} + e^{-j\omega} - \frac{1}{3} \cdot e^{-j2\omega}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo:  $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



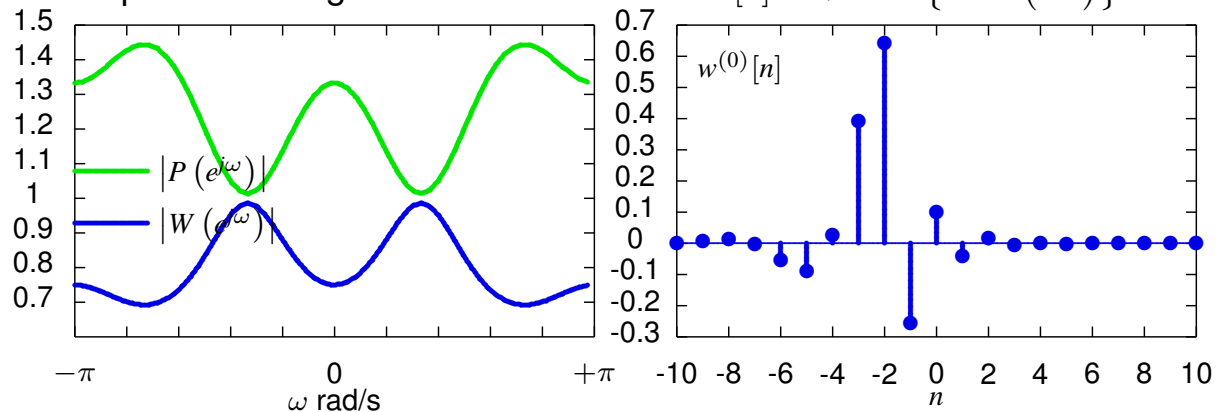
- ▶ Respuesta no causal - retardo  $d \approx 5$
- ▶ Coeficientes relevantes  $\approx 9$  ( $K_w \approx 8$ )

## Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal D

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j3\omega}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}$$

- Respuestas del igualador sin retardo:  $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



- ▶ Respuesta no causal - retardo  $d \approx 9$
- ▶ Coeficientes relevantes  $\approx 13$  ( $K_w \approx 12$ )

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 0$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 0$

$$c_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{7 \times 1}, \quad P = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{7 \times 4}$$

- Solución ZF proporcionada

$$w_d^{ZF} = P^\# \cdot c_d = \begin{bmatrix} +0,2123 \\ +0,0221 \\ -0,0112 \\ -0,0243 \end{bmatrix}, \quad c_d^{ZF} = P \cdot w = \begin{bmatrix} +0,0708 \\ -0,0988 \\ +0,1975 \\ +0,1257 \\ +0,0119 \\ -0,0299 \\ -0,0121 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0657$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,0463$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,1334$$

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 1$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 1$

$$c_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$w_d^{ZF} = P^\# \cdot c_d = \begin{bmatrix} -0,2963 \\ +0,1787 \\ +0,0364 \\ +0,0252 \end{bmatrix}, \quad c_d^{ZF} = P \cdot w = \begin{bmatrix} -0,0988 \\ +0,2077 \\ -0,3736 \\ +0,0207 \\ +0,1132 \\ +0,0434 \\ +0,0126 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1646$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,1217$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2471$$

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 2$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 2$

$$c_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \cdot c_d = \begin{bmatrix} +0,5925 \\ -0,2319 \\ +0,1488 \\ -0,0339 \end{bmatrix}, c_d^{ZF} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,1975 \\ -0,3736 \\ +0,7581 \\ -0,0213 \\ +0,0498 \\ +0,0405 \\ -0,0170 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1834$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,4281$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,7969$$

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 3$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 3$

$$c_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \cdot c_d = \begin{bmatrix} +0,3771 \\ +0,6278 \\ -0,2536 \\ +0,1092 \end{bmatrix}, c_d^{ZF} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,1257 \\ +0,0207 \\ -0,0213 \\ +0,9796 \\ +0,0057 \\ -0,0176 \\ +0,0546 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0200$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,6126$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,7181$$

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 4$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 4$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,0358 \\ +0,3933 \\ +0,6317 \\ -0,2690 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} +0,0119 \\ +0,1132 \\ +0,0498 \\ +0,0057 \\ +0,9629 \\ +0,0468 \\ -0,1345 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0357$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,6274$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,5341$$

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 5$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 5$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0896 \\ -0,0042 \\ +0,3838 \\ +0,6699 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,0299 \\ +0,0434 \\ +0,0405 \\ -0,0176 \\ +0,0468 \\ +0,8618 \\ +0,3349 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1191$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,6041$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,0170$$

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 6$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 6$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0364 \\ -0,0168 \\ +0,0331 \\ +0,3184 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,0121 \\ +0,0126 \\ -0,0170 \\ +0,0546 \\ -0,1345 \\ +0,3349 \\ +0,1592 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1339$   
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,1041$   
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2096$

## Canal D - Matriz pseudoinversa

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Matriz de canal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$7 \times 4 \equiv (K_p + K_w + 1) \times (K_w + 1)$

- Pseudo-inversa de Moore-Penrose

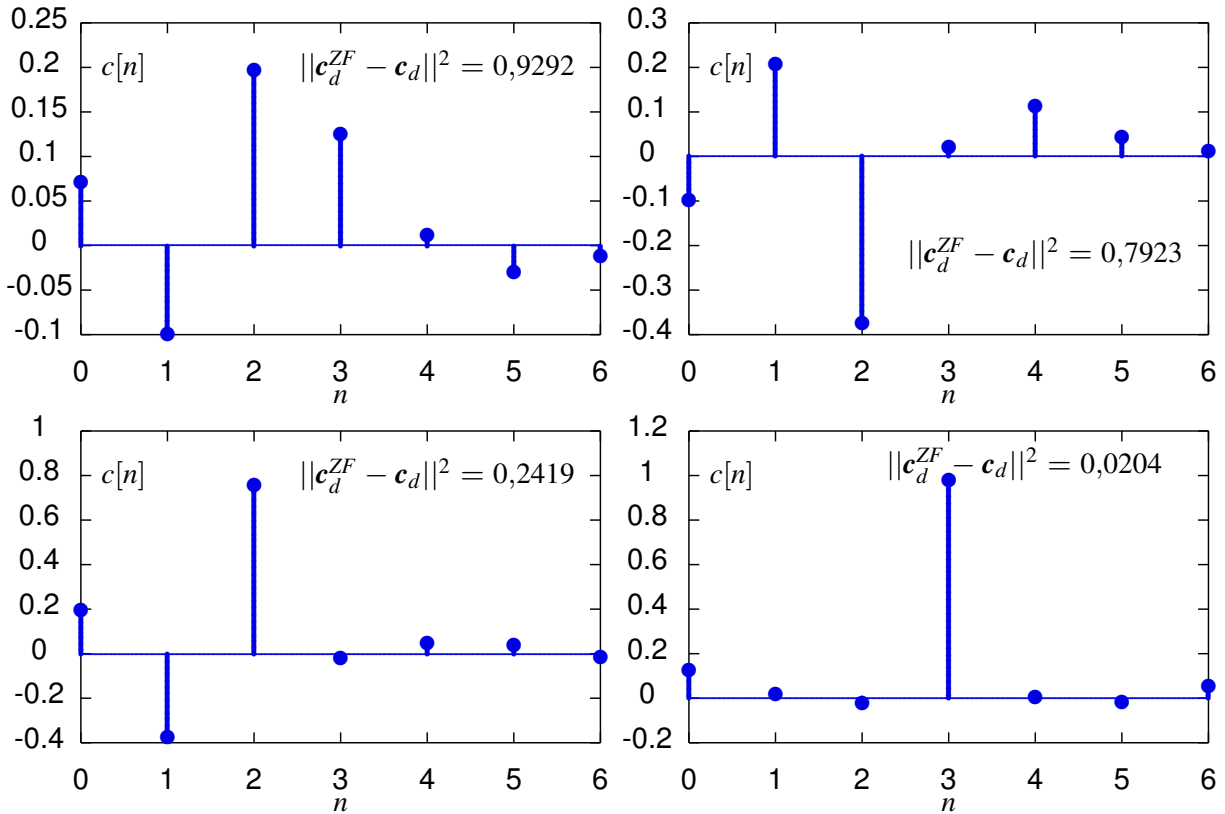
$$\mathbf{P}^\# = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H$$

$$= \begin{bmatrix} +0,2123 & -0,2963 & +0,5925 & +0,3771 & +0,0358 & -0,0896 & -0,0364 \\ +0,0221 & +0,1787 & -0,2319 & +0,6278 & +0,3933 & -0,0042 & -0,0168 \\ -0,0112 & +0,0364 & +0,1488 & -0,2536 & +0,6317 & +0,3838 & +0,0331 \\ -0,0243 & +0,0252 & -0,0339 & +0,1092 & -0,2690 & +0,6699 & +0,3184 \end{bmatrix}$$

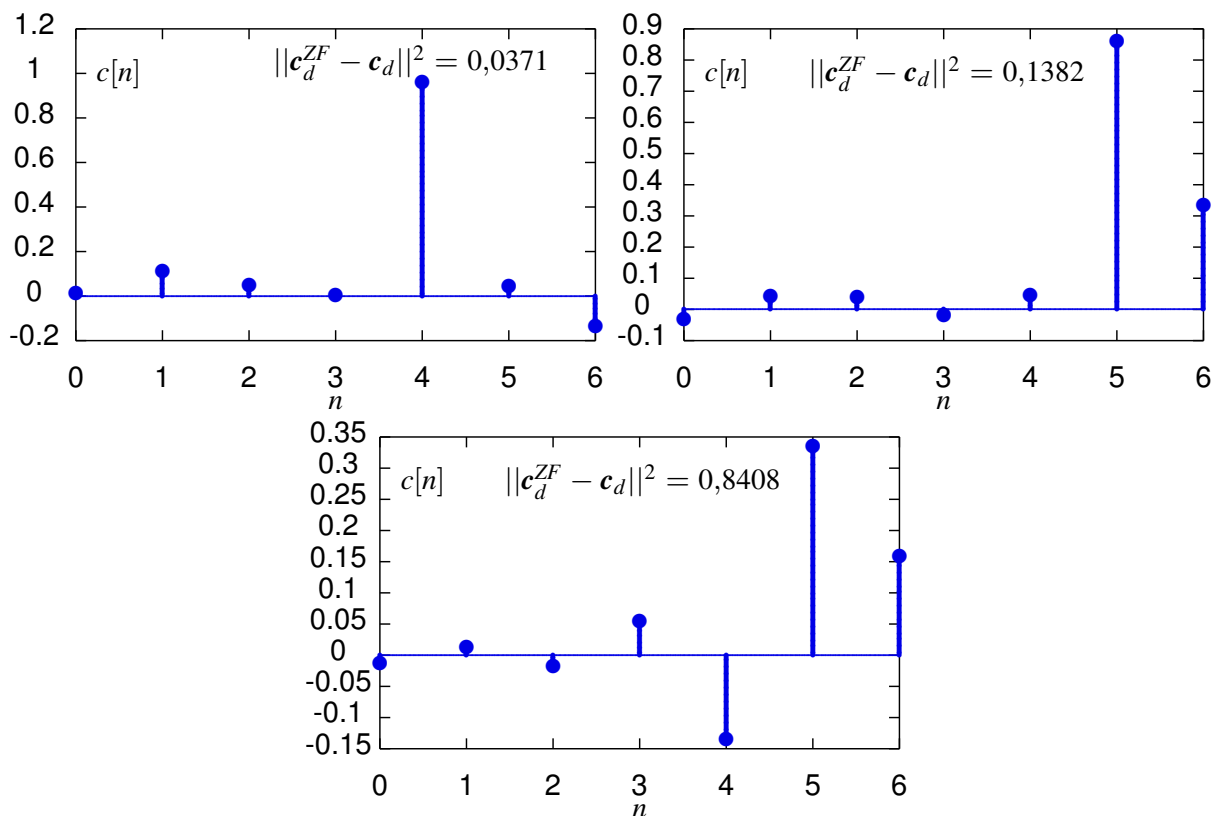
$4 \times 7 \equiv (K_w + 1) \times (K_p + K_w + 1)$

- Las soluciones ZF para distintos retardos coinciden con las columnas de esta matriz

## Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{0, 1, 2, 3\}$



## Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{4, 5, 6\}$

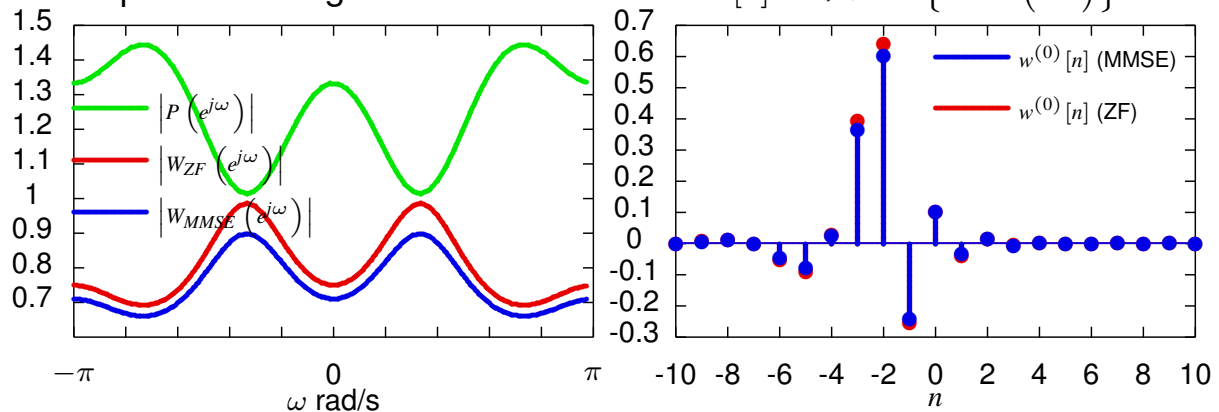


## Igualador MMSE sin limitaciones - Ejemplo - Canal D

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega 3}, \quad W^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Respuestas del igualador sin retardo:  $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



- ▶ Respuesta no causal - retardo  $d \approx 9$
- ▶ Coeficientes relevantes  $\approx 13$  ( $K_w \approx 12$ )

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 0$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 0$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,1993 \\ +0,0195 \\ -0,0099 \\ -0,0213 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,0664 \\ -0,0931 \\ +0,1862 \\ +0,1169 \\ +0,0105 \\ -0,0263 \\ -0,0107 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0579$   
 $\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,0406$   
 $\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,1334$   
(ZF: 0,1334)



## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 1$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 1$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,2794 \\ +0,1697 \\ +0,0323 \\ +0,0221 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,0931 \\ +0,1963 \\ -0,3535 \\ +0,0212 \\ +0,1061 \\ +0,0382 \\ +0,0110 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1469$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,1084$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2471$$

(ZF: 0,2471)

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 2$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 2$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,5587 \\ -0,2224 \\ +0,1430 \\ -0,0297 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,1862 \\ -0,3535 \\ +0,7176 \\ -0,0245 \\ +0,0467 \\ +0,0419 \\ -0,0148 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1644$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,3829$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,7970$$

(ZF: 0,7969)

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 3$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 3$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,3508 \\ +0,5898 \\ -0,2413 \\ +0,1084 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,1169 \\ +0,0212 \\ -0,0245 \\ +0,9220 \\ -0,0006 \\ -0,0122 \\ +0,0542 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0178$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,5409$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,7192$$

(ZF: 1,7181)

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 4$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 4$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,0316 \\ +0,3655 \\ +0,5936 \\ -0,2553 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} +0,0105 \\ +0,1061 \\ +0,0467 \\ -0,0006 \\ +0,9040 \\ +0,0415 \\ -0,1276 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0316$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,5522$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,5345$$

(ZF: 1,5341)

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 5$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 5$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0788 \\ -0,0035 \\ +0,3568 \\ +0,6270 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,0263 \\ +0,0382 \\ +0,0419 \\ -0,0122 \\ +0,0415 \\ +0,8054 \\ +0,3135 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1041$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,5267$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 1,0172$$

(ZF: 1,0170)

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal D - $d = 6$

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n - 3]$
- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 6$

$$\mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} -0,0320 \\ -0,0148 \\ +0,0292 \\ +0,2989 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,0107 \\ +0,0110 \\ -0,0148 \\ +0,0542 \\ -0,1276 \\ +0,3135 \\ +0,1494 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,1180$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 0,0914$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,2096$$

(ZF: 2096)

## Canal D - Matriz pseudoinversa regularizada

- Canal  $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-3]$
- Matriz de canal

$$P = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{2} & +1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$7 \times 4 \equiv (K_p + K_w + 1) \times (K_w + 1)$

- Pseudo-inversa regularizada, con  $\lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1$

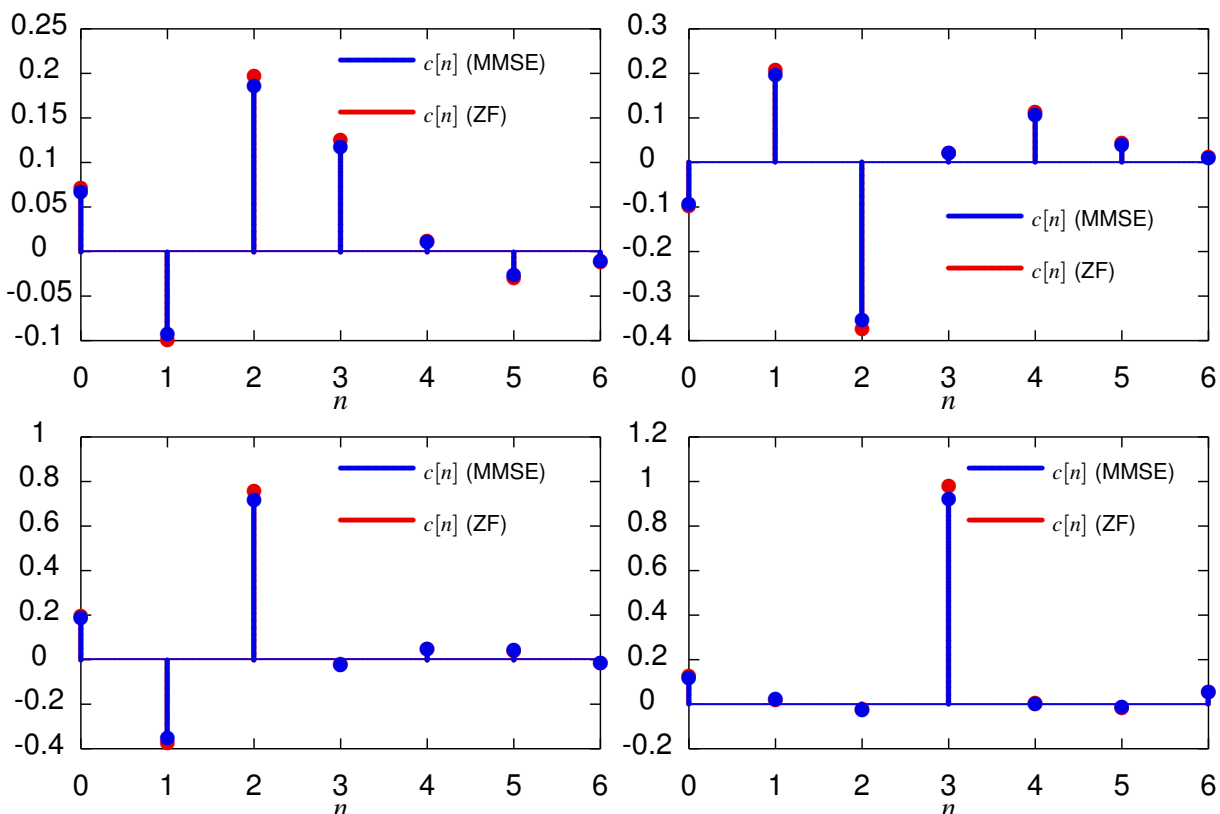
$$P_{\lambda}^{\#} = (P^H \cdot P + \lambda \cdot I)^{-1} \cdot P^H$$

$$= \begin{bmatrix} +0,1993 & -0,2794 & +0,5587 & +0,3508 & +0,0316 & -0,0788 & -0,0320 \\ +0,0195 & +0,1697 & -0,2224 & +0,5898 & +0,3655 & -0,0035 & -0,0148 \\ -0,0099 & +0,0323 & +0,1430 & -0,2413 & +0,5936 & +0,3568 & +0,0292 \\ -0,0213 & +0,0221 & -0,0297 & +0,1084 & -0,2553 & +0,6270 & +0,2989 \end{bmatrix}$$

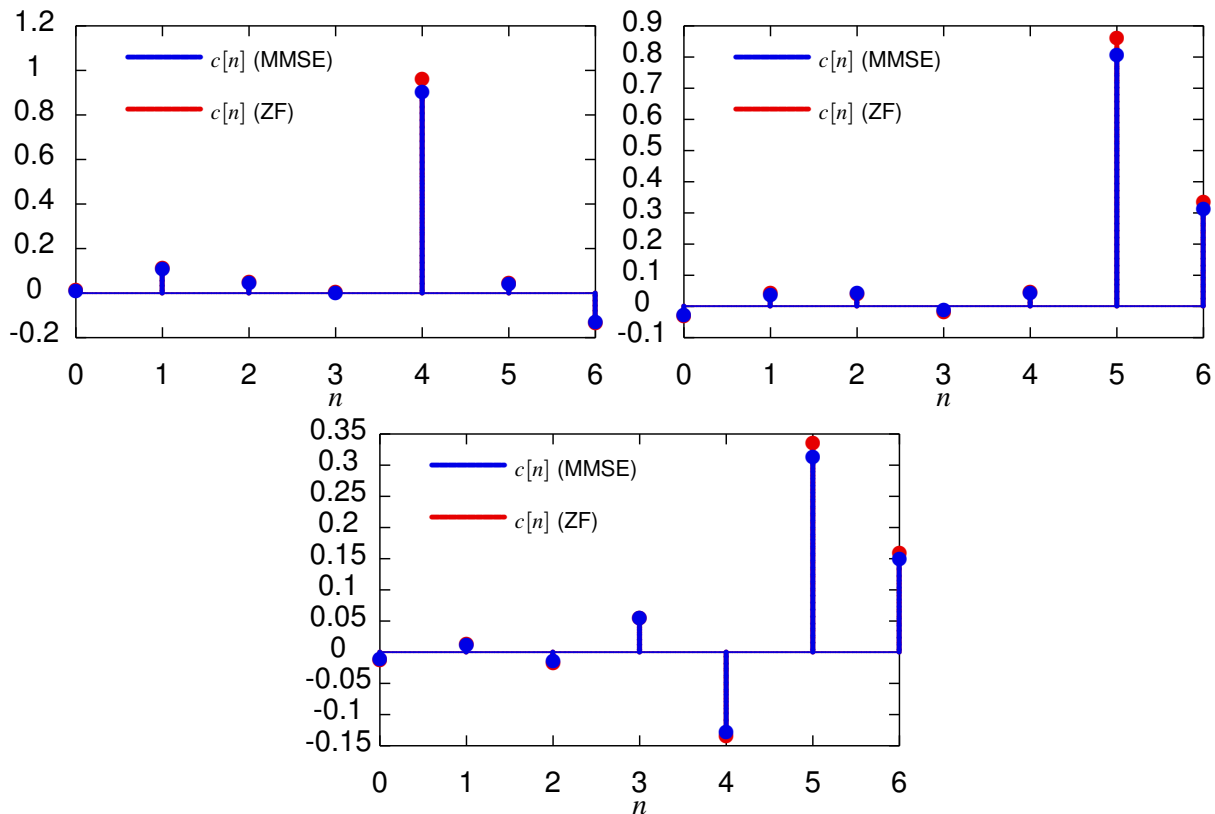
$4 \times 7 \equiv (K_w + 1) \times (K_p + K_w + 1)$

- Las soluciones MMSE para distintos retardos coinciden con las columnas de esta matriz

## MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{0, 1, 2, 3\}$



## MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{4, 5, 6\}$



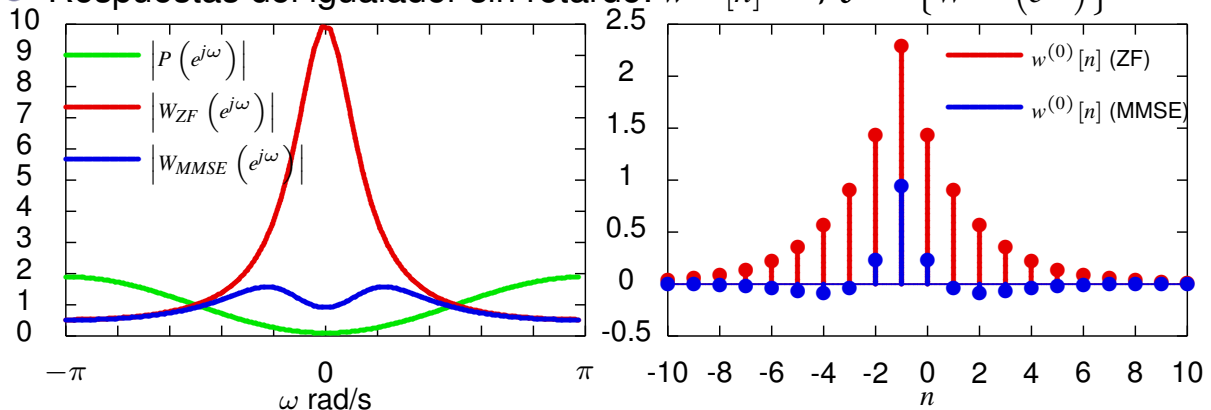
## Igualadores sin limitaciones - Ejemplo - Canal E

- Canal  $p[n] = -0,45 \cdot \delta[n] + \delta[n - 1] - 0,45 \cdot \delta[n - 2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P(e^{j\omega}) = -0,45 + e^{-j\omega} + e^{-j\omega} - 0,45 \cdot e^{-j\omega 2}$$

$$W_{ZF}^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{P(e^{j\omega})}, \quad W_{MMSE}^{(0)}(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Respuestas del igualador sin retardo:  $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1} \{W^{(0)}(e^{j\omega})\}$



- ▶ Respuesta no causal - retardo  $d \approx 9$
- ▶ Coeficientes relevantes  $\approx 19$  ( $K_w \approx 18$ )

## Igualador ZF con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal E - $d = 2$

- Canal  $p[n] = -0,45 \cdot \delta[n] + \delta[n - 1] - 0,45 \cdot \delta[n - 2]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 2$

$$\mathbf{c}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{6 \times 1}, \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,45 & 0 & 0 \\ -0,45 & 1 & -0,45 & 0 \\ 0 & -0,45 & 1 & -0,45 \\ 0 & 0 & -0,45 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,45 \end{bmatrix}}_{6 \times 4}$$

- Solución ZF proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{ZF} = \mathbf{P}^\# \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,4893 \\ +1,4097 \\ +0,6479 \\ +0,2118 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{ZF} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,2202 \\ -0,1450 \\ +0,8979 \\ -0,0818 \\ -0,0797 \\ -0,0953 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0917$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 2,6913$$

$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,7475$$

## Igualador MMSE con 4 coeficientes ( $K_w = 3$ ) - Canal E - $d = 2$

- Ruido con varianza  $\sigma_z^2 = 0,1$ , 2-PAM con  $E_s = 1$
- Canal  $p[n] = -0,45 \cdot \delta[n] + \delta[n - 1] - 0,45 \cdot \delta[n - 2]$
- Matrices y vectores involucrados - retardo  $d = 2$

$$\mathbf{c}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{6 \times 1}, \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,45 & 0 & 0 \\ -0,45 & 1 & -0,45 & 0 \\ 0 & -0,45 & 1 & -0,45 \\ 0 & 0 & -0,45 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,45 \end{bmatrix}}_{6 \times 4}, \lambda = \frac{\sigma_z^2}{E_s} = 0,1, \mathbf{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4 \times 4}$$

- Solución MMSE proporcionada

$$\mathbf{w}_d^{MMSE} = (\mathbf{P}^H \cdot \mathbf{P} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{c}_d = \begin{bmatrix} +0,2387 \\ +0,9566 \\ +0,2553 \\ +0,0239 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d^{MMSE} = \begin{bmatrix} -0,2202 \\ -0,1450 \\ +0,8979 \\ -0,0818 \\ -0,0797 \\ -0,0953 \end{bmatrix}$$

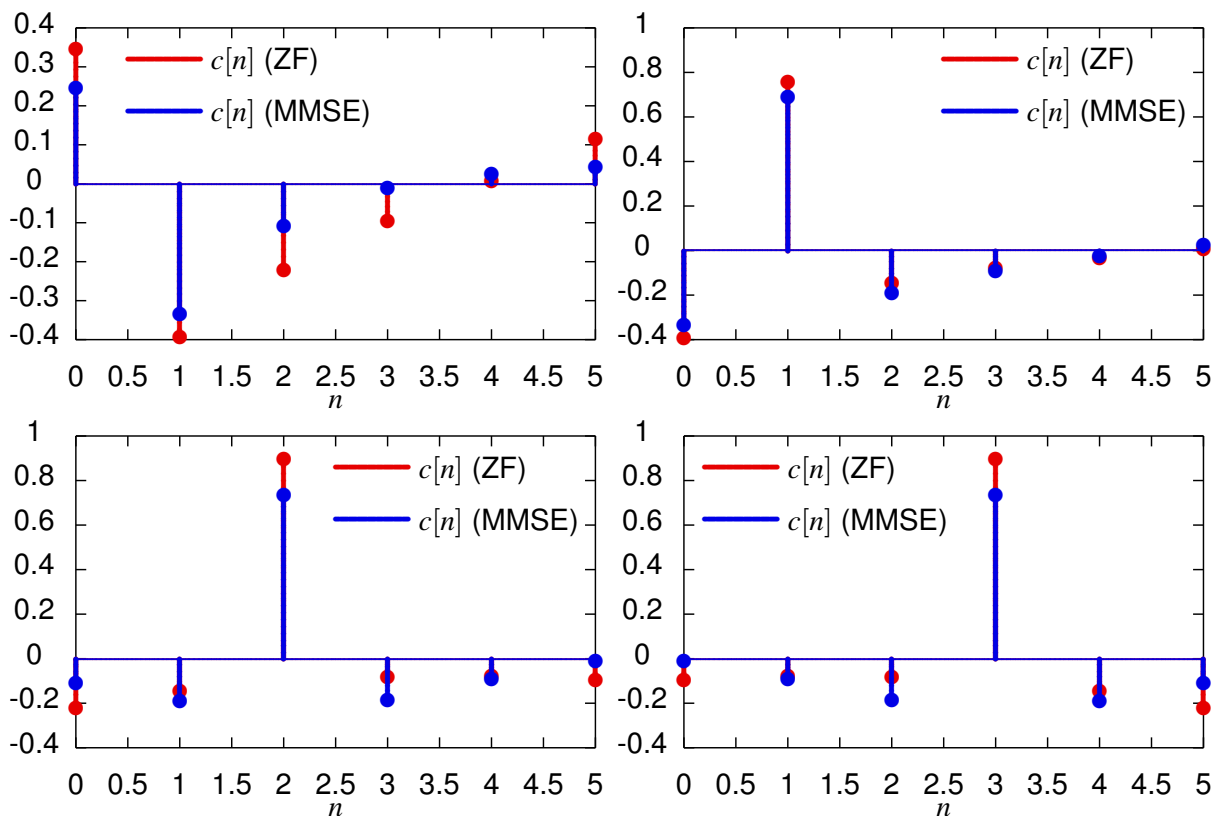
$$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0913$$

$$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 1,0379$$

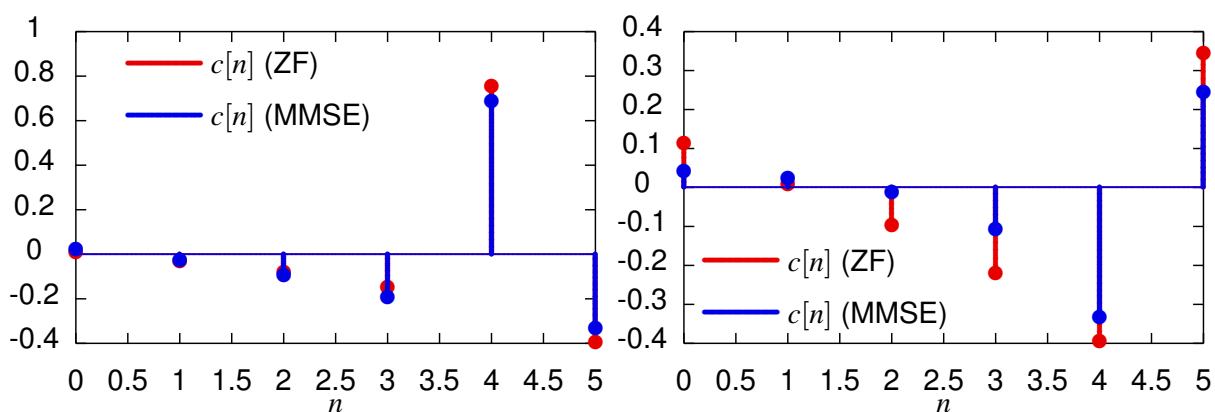
$$\frac{|c[d]|}{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,8313$$

(ZF: 0,7475)

## ZF/MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{0, 1, 2, 3\}$



## ZF/MMSE - Respuestas conjuntas para retardos $d \in \{4, 5\}$



## Igualadores con 17 coeficientes ( $K_w = 16$ ) - Canal E - $d = 9$

- En ese caso la solución se aproxima más a la solución sin limitaciones
- Solución ZF fuerza una respuesta conjunta prácticamente ideal
  - ▶ Amplificación severa del ruido

ZF	MMSE
$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0003$	$\sigma_{ISI}^2 = E_s \times 0,0895$
$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 11,8850$	$\sigma_{z'}^2 = \sigma_z^2 \times 1,0255$
$\frac{ c[d] }{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,4585$	$\frac{ c[d] }{2\sqrt{\sigma_{ISI}^2 + \sigma_{z'}^2}} = 0,8450$

## Respuestas conjuntas con 17 coeficientes - Canal E

