

# TEMA 4

## MODULACIONES NO LINEALES: MODULACIONES DE FASE Y DE FRECUENCIA

### Índice

- Modulaciones de fase (lineales)
  - ▶ Modulación por desplazamiento de fase (PSK)
  - ▶ Modulación PSK en cuadratura (QPSK)
  - ▶ Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)
  - ▶ Modulaciones PSK diferenciales (DPSK)
- Modulaciones no lineales
  - ▶ Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)
  - ▶ Modulaciones MSK
  - ▶ Modulaciones de fase continua (CPM)

## Modulaciones de fase

- Modulación PSK (Phase Shift Keying)
  - ▶ Modulación lineal
  - ▶ Constelaciones de módulo constante - Información en la fase de los símbolos
    - ★ Símbolos

$$A[n] = \sqrt{E_s} \cdot e^{j\varphi[n]}$$

- ★ Señal compleja banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT) = \sqrt{E_s} \sum_n e^{j\varphi[n]} \cdot g(t - nT)$$

- ★ Señal modulada paso banda

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ s(t) \cdot e^{j\omega_c t} \} = \sqrt{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n g(t - nT) \cdot e^{j(\omega_c t + \varphi[n])} \right\} \\ &= \underbrace{\sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT)}_{\text{envolvente}} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi[n]) \end{aligned}$$

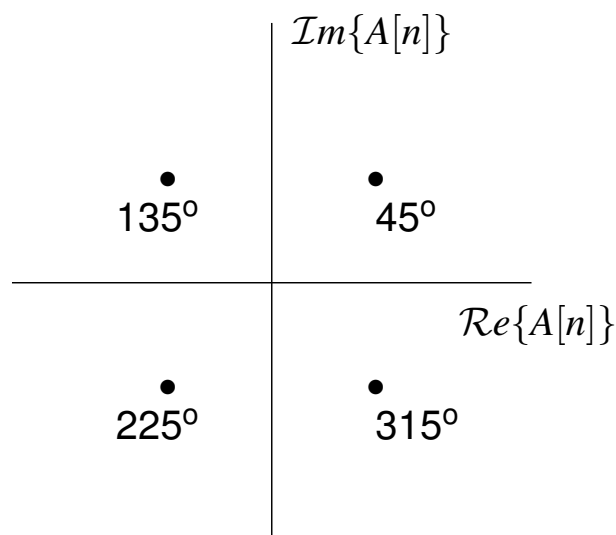
- Modulación de envolvente constante se puede conseguir usando

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot w_T(t), \quad w_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Inconveniente: ancho de banda elevado (saltos de fase en  $t = nT$ )

$$S_s(j\omega) = E_s \cdot \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega T}{2\pi} \right)$$

## Modulación QPSK - $M = 4$ - Constelación



- $\phi[n] = 45^\circ: A[n] = +1 + j$
- $\phi[n] = 135^\circ: A[n] = -1 + j$
- $\phi[n] = 225^\circ: A[n] = -1 - j$
- $\phi[n] = 315^\circ: A[n] = +1 - j$

## Saltos de fase en señal QPSK

- Señal PSK

$$\begin{aligned}x(t) &= \sqrt{2}s_I(t) \cdot \cos(\omega_c t) - \sqrt{2}s_Q(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t) \\ &= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT) \cos(\omega_c t + \varphi[n]).\end{aligned}$$

siendo

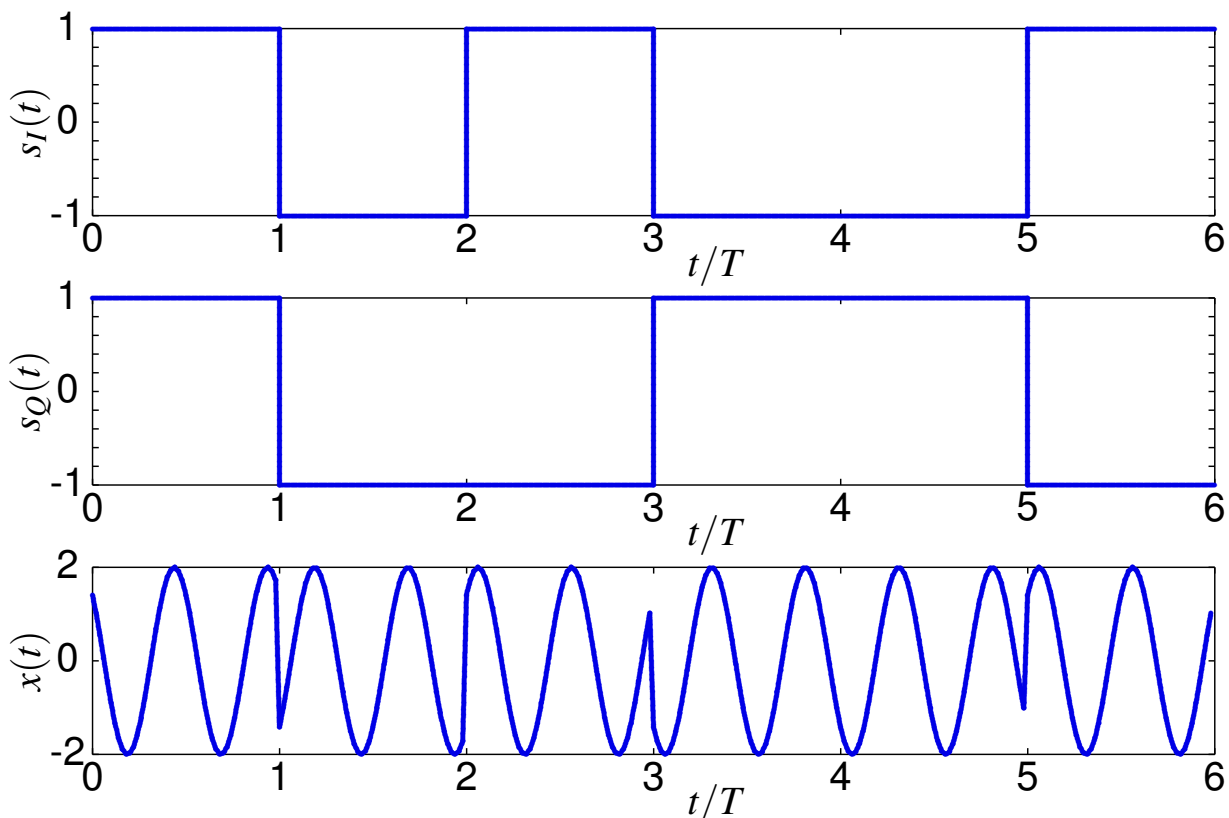
$$s_I(t) = \sum_n \text{Re}\{A[n]\}g(t - nT)$$

$$s_Q(t) = \sum_n \text{Im}\{A[n]\}g(t - nT)$$

- Saltos de fase

- ▶  $\pm 90^\circ$ : cambia  $s_I(t)$  o  $s_Q(t)$
- ▶  $180^\circ$ : cambian  $s_I(t)$  y  $s_Q(t)$  simultáneamente

## Modulación QPSK



## Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)

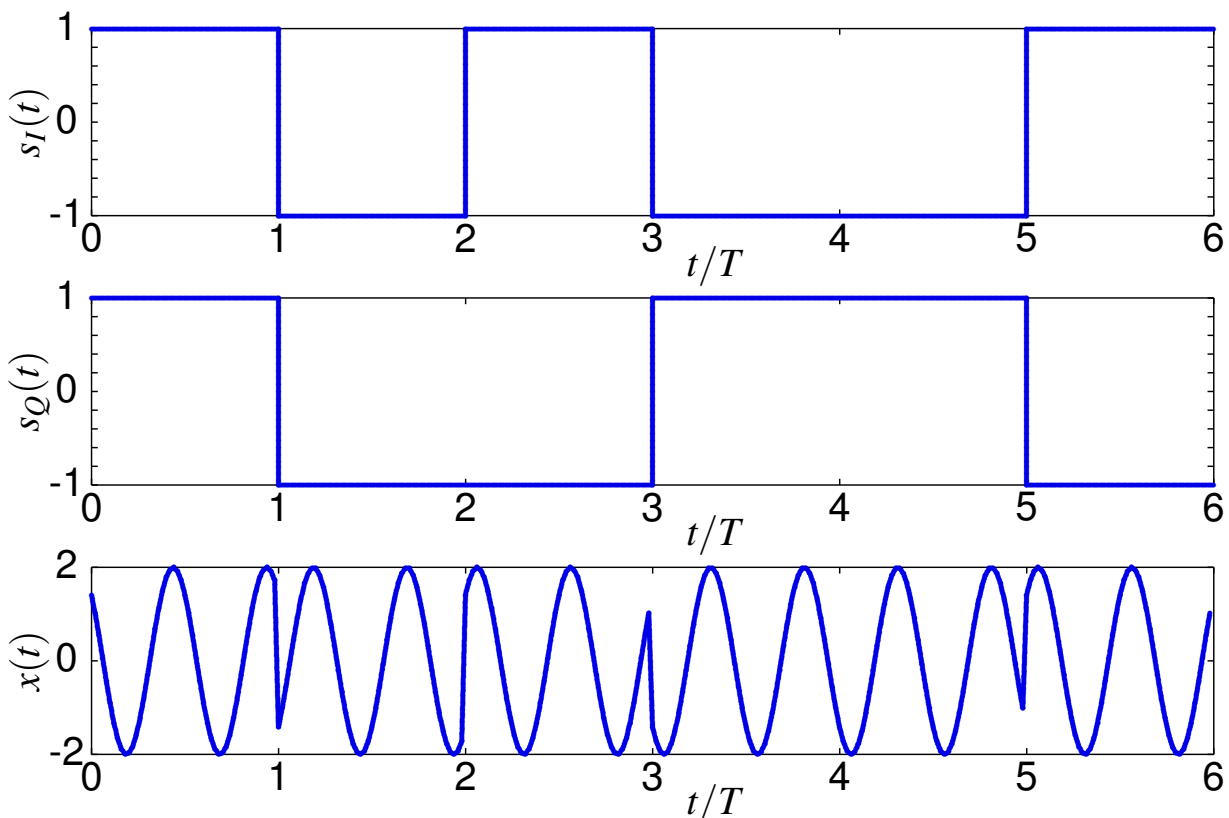
- Se eliminan los saltos de  $180^\circ$ 
  - ▶ Evitar que coincidan las transiciones de  $s_I(t)$  y  $s_Q(t)$
- Señal OQPSK
  - ▶ Se retarda la componente en cuadratura  $T/2$
  - ▶ Saltos sólo de  $\pm 90^\circ$
  - ▶ Saltos más frecuentes (cada  $T/2$ )

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot s_I(t) \cdot \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} \cdot s_Q(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

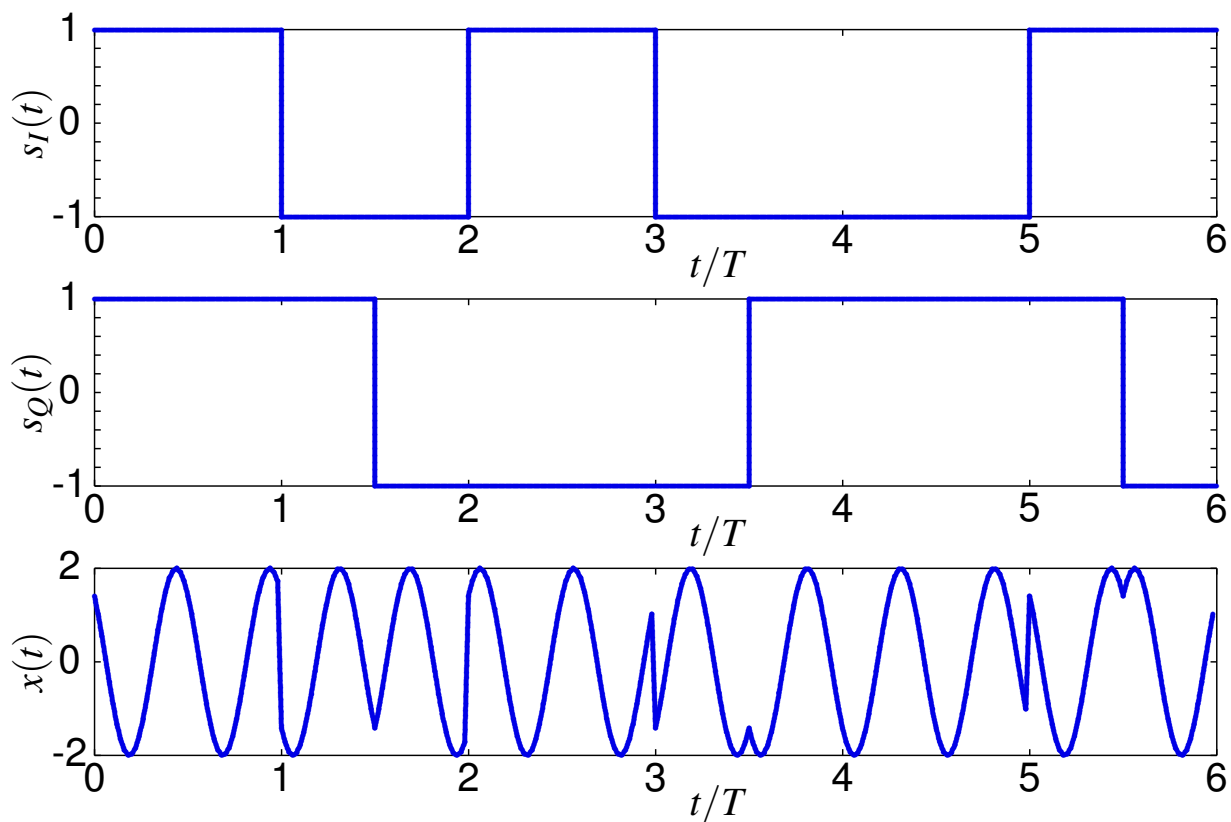
$$s_I(t) = \sum_n \mathcal{R}e\{A[n]\} \cdot g(t - nT)$$

$$s_Q(t) = \sum_n \mathcal{I}m\{A[n]\} \cdot g(t - nT - T/2)$$

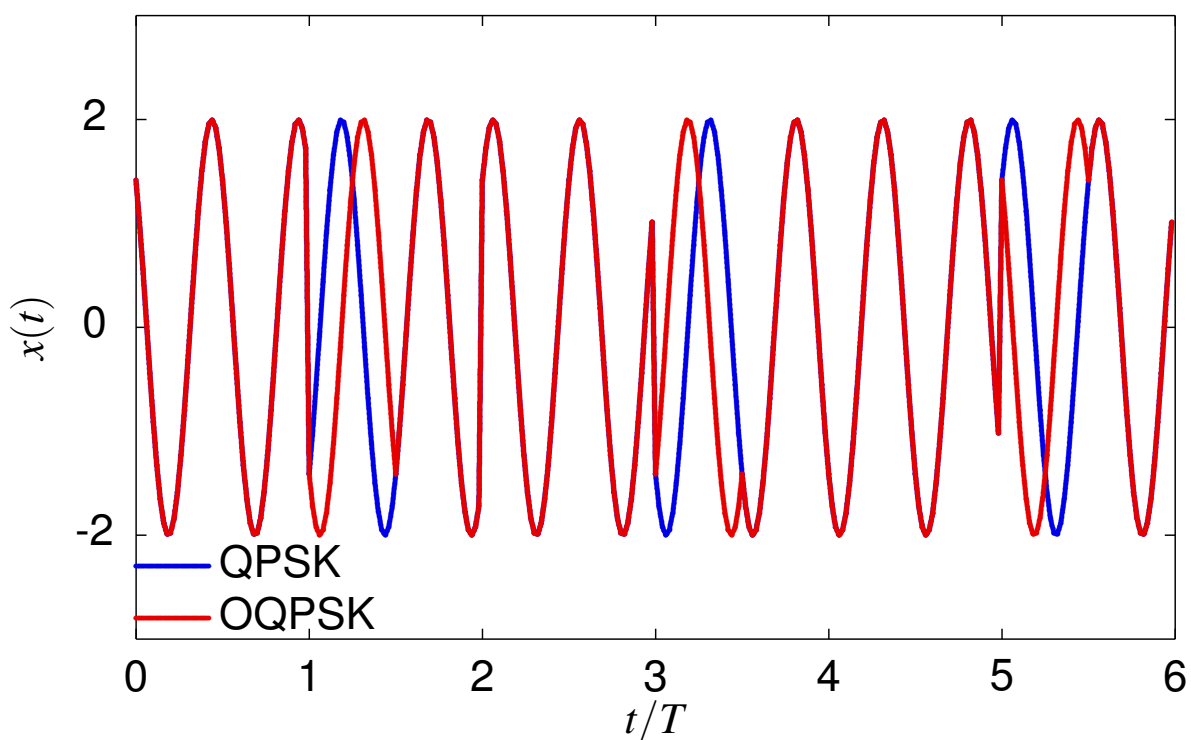
## Modulación QPSK



## Modulación OQPSK - Retardo de $s_Q(t)$



## Modulación QPSK vs OQPSK



## Espectro de la señal OQPSK

- Definición

$$x_I(t) = \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t), \quad x_Q(t) = \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

- Espectro de cada componente ( $s_k, k \in \{I, Q\}$ )

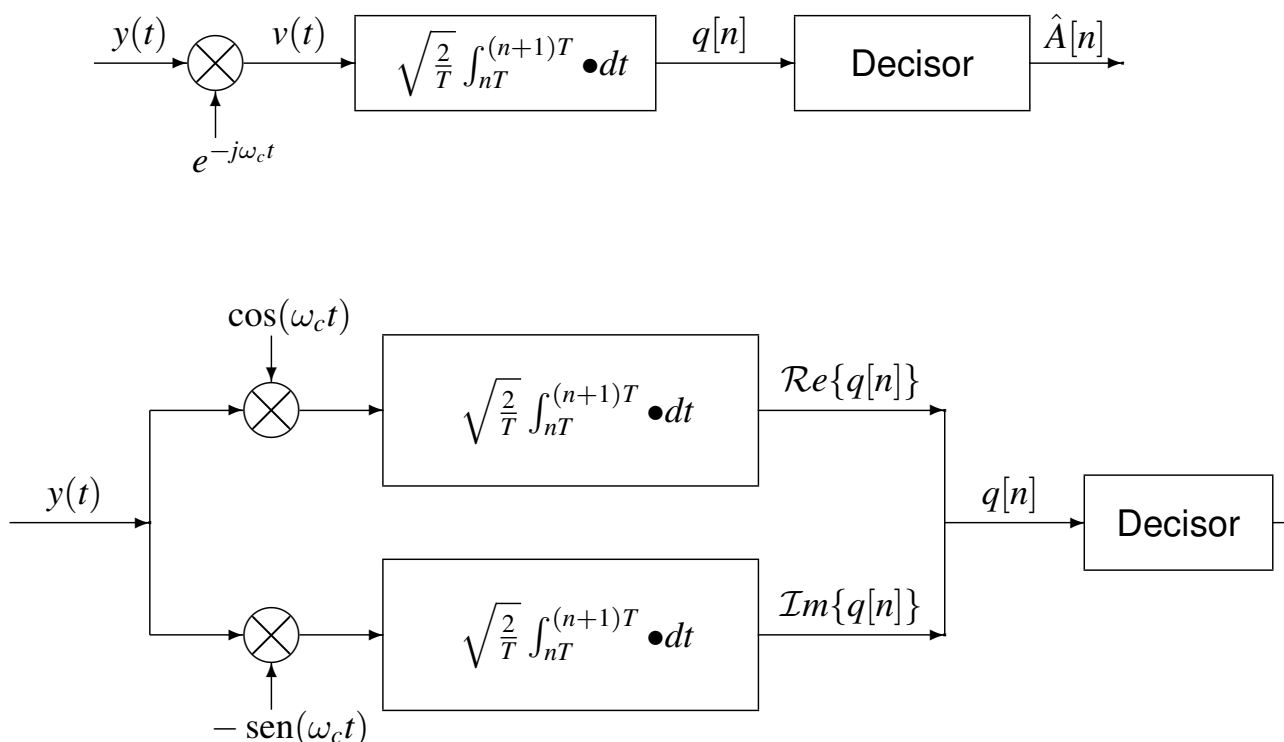
$$S_{s_k}(j\omega) = \frac{1}{2} [S_{s_k}(j\omega - j\omega_c) + S_{s_k}^*(-j\omega - j\omega_c)]$$

$$S_{s_I}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\text{Re}\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2, \quad S_{s_Q}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\text{Im}\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2$$

- Espectro OQPSK

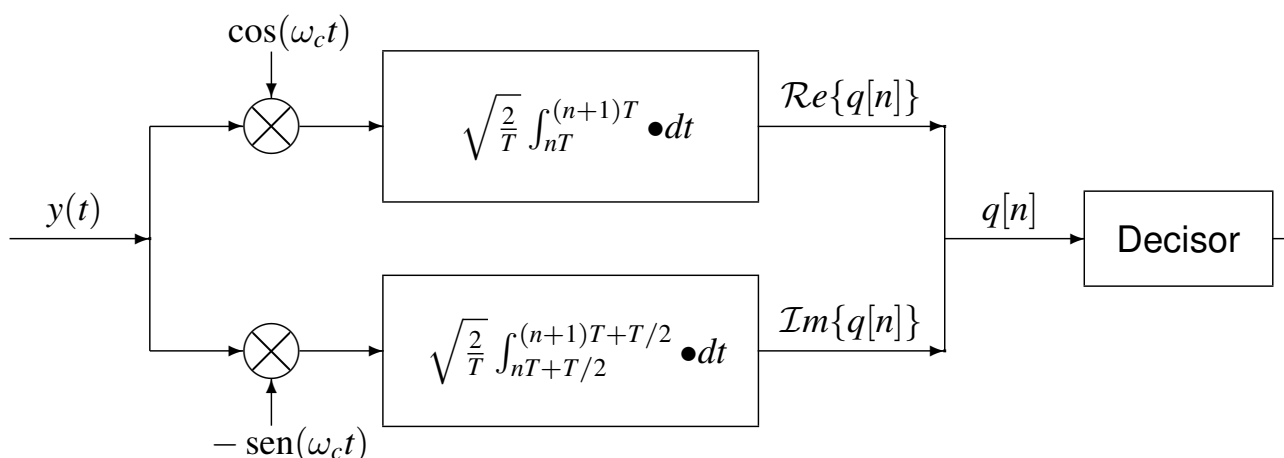
$$S_x(j\omega) = \frac{E_s}{2T} [ |G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(-j\omega - j\omega_c)|^2 ]$$

## Receptores para modulaciones de fase PSK



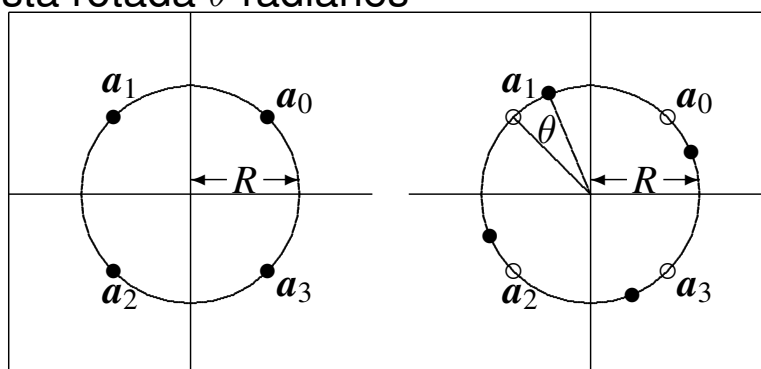
## Receptores para modulaciones OQPSK

Hay que tener en cuenta el retardo de  $T/2$  en la componente en cuadratura: retardo en el correlador



## Efecto de un receptor no coherente en modulaciones PSK

- En un receptor no coherente, las fases de las portadoras usadas para demodular es distinta de la fase de las portadoras utilizadas en el transmisor para modular
  - ▶ Diferencia de  $\theta$  radianes
- El efecto de esta diferencia de fase es que la constelación recibida está rotada  $\theta$  radianes

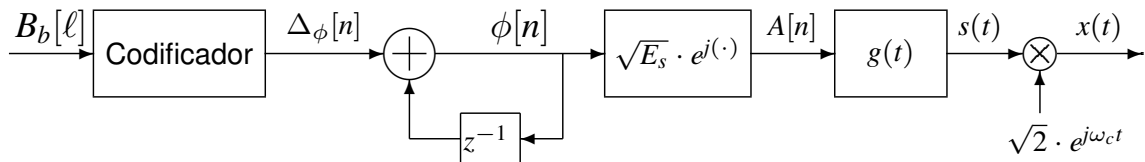


- ▶ Este efecto puede afectar seriamente al rendimiento
- ▶ Sin embargo, receptores no coherentes tienen menor coste
  - ★ Modulaciones PSK diferenciales (DPSK) permiten usar receptores no coherentes

## Moduladores de fase diferencial

- No requieren un receptor coherente
- Modulación PSK con codificación diferencial

$$\phi[n] = \phi[n - 1] + \Delta\phi[n]$$



- Codificador para modulación  $M$ -ária ( $M$  símbolos)

$$\Delta\phi[n] \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \dots, \frac{2\pi(M-1)}{M} \right\}$$

Asignación binaria se realiza sobre  $\Delta\phi[n]$

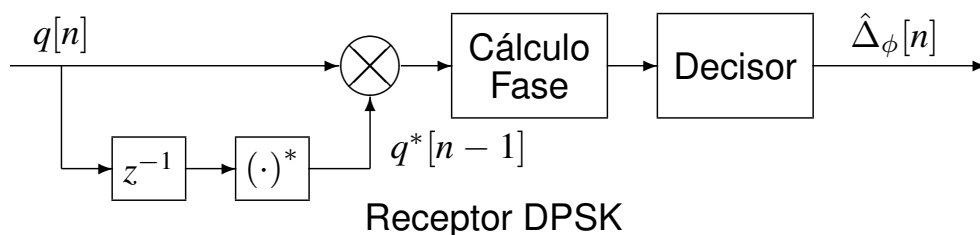
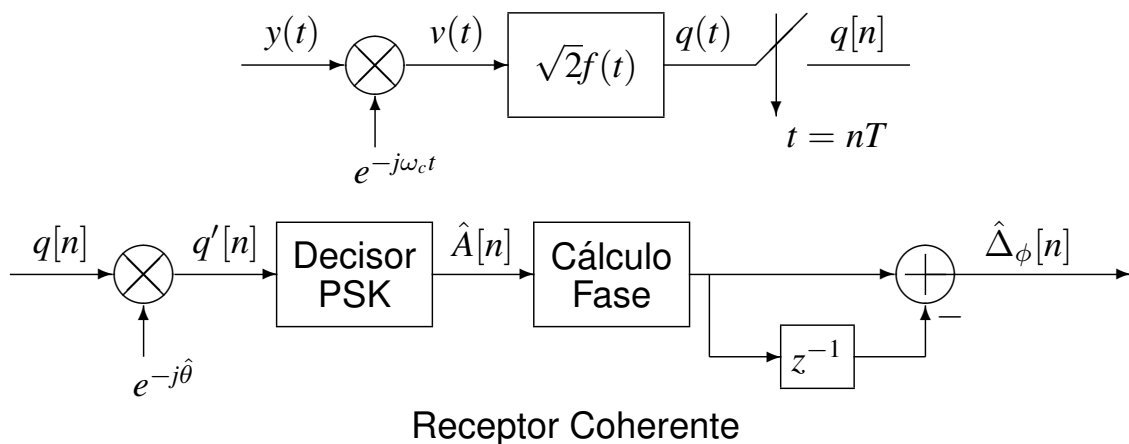
Ejemplo: 4-PSK 

$\Delta\phi[n]$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
Bits	00	10	11	01

 (Codificación Gray)

- Inicialización: selección de un valor arbitrario (conocido) para  $\phi[-1]$ 
  - ▶ No hay propagación de errores debido a la inicialización

## Demodulador PSK (Diferencial)





## Receptor DPSK

- Observación

$$q[n] = \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n]+\theta)} + z[n]$$

- ▶ Observación anterior conjugada

$$q^*[n-1] = \sqrt{E_s} \cdot e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} + z^*[n-1]$$

- Multiplicador

$$\begin{aligned} q[n] \times q^*[n-1] &= E_s \cdot e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])} + \sqrt{E_s} \cdot e^{j(\phi[n]+\theta)} \cdot z^*[n-1] \\ &\quad + \sqrt{E_s} e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} \cdot z[n] + z[n] \cdot z^*[n-1]. \end{aligned}$$

- Decisión

$$\hat{\Delta}_\phi[n] = \angle\{q[n] \times q^*[n-1]\}$$

## Probabilidad de error para DPSK

- Probabilidad de error usando receptores coherentes

$$P_e \approx 2 \cdot P_e^{PSK}$$

Un error en un símbolo decidido  $\hat{A}[n]$  afecta a dos incrementos de fase  $\Delta_\phi[n]$  y  $\Delta_\phi[n+1]$

- Probabilidad de error con receptores no-coherentes

- ▶ Estadístico para la decisión

$$\begin{aligned} \frac{q[n] \times q^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} &= \sqrt{E_s} \cdot \underbrace{e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])}}_{\text{Fase } \Delta_\phi[n]} \\ &\quad + e^{j(\phi[n]+\theta)} \cdot z^*[n-1] + e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} \cdot z[n] \\ &\quad + \frac{z[n] \cdot z^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} \end{aligned}$$

- ▶ Términos de ruido (tres)

- ★ El último es despreciable para  $E_s/\sigma_z^2$  alto
      - ★ Los otros dos: independientes, circularmente simétricos

- ▶ Relación señal a ruido: pérdida de 3 dB

- ★ Señal:  $E_s$
      - ★ Ruido:  $2\sigma_z^2$

## Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- Información: pulsos de frecuencia discreta de una portadora
- $M$  pulsos (para mapear  $M$  símbolos)

$$g_i(t) = \text{sen}(\omega_i t) \cdot w_T(t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1$$

- Codificador: define el índice del pulso transmitido en el instante  $n$

$$A[n] \in \{i = 0, 1, \dots, M - 1\}$$

- Señal FSK en el dominio del tiempo

$$x(t) = K \cdot \sum_n g_{A[n]}(t - nT)$$

- FSK de fase continua (CPFSK)

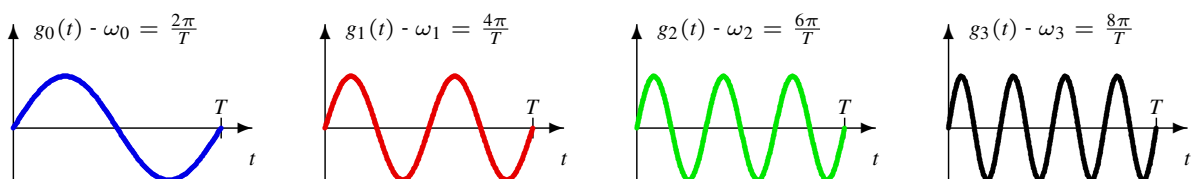
- ▶ Continuidad de fase: pulsos con un número entero de períodos en  $T$  segundos

$$\text{Frecuencias: } \omega_i = \frac{2\pi}{T} \times N_i, \quad N_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, \dots, M - 1$$

- ▶ Ancho de banda mínimo:  $N_i$  consecutivos (espectro de  $g_i(t)$  está en torno a  $\omega_i$ )

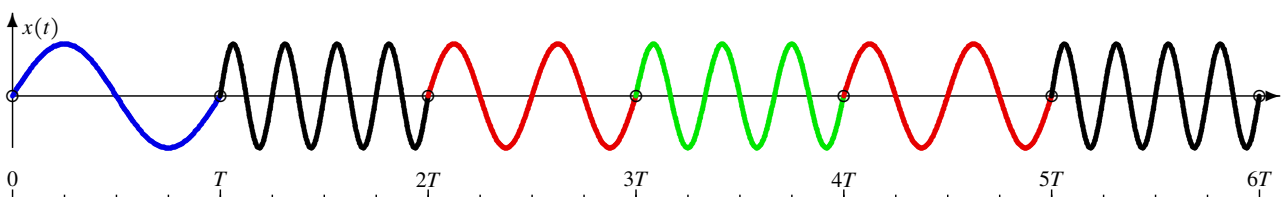
## Formas de onda CPFSK - Ejemplo para $M = 4$

- Pulsos CPFSK para  $M = 4$  (un posible ejemplo)



- Forma de onda para secuencia de datos

$n$	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



## Ortogonalidad de los pulsos CPFSK

- Producto escalar entre dos pulsos

$$\begin{aligned}\langle g_i(t), g_\ell(t) \rangle &= \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \underbrace{\cos((\omega_i - \omega_\ell) \cdot t)}_{(N_i - N_\ell) \frac{2\pi}{T}} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \underbrace{\cos((\omega_i + \omega_\ell) \cdot t)}_{(N_i + N_\ell) \frac{2\pi}{T}} dt = 0\end{aligned}$$

## Pulsos CPFSK son ortogonales

- Funciones base ortonormales (dimensión  $M$ )

$$\phi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen}(\omega_i t) \cdot w_T(t) \quad i = 0, 1, \dots, M - 1$$

- Señal CPFSK como expansión en la base ortonormal

$$x(t) = \sqrt{E_s} \cdot \sum_n \phi_{A[n]}(t - nT)$$

## Espectro de la señal FSK

- La media de la señal es periódica
- Espectro discreto (espectro de la media periódica)

$$S_{xd}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{(MT)^2} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \sum_k \delta \left( \omega - \frac{2\pi k}{T} \right)$$

- Espectro continuo

$$S_{xc}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{MT} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} |G_i(j\omega)|^2 - \frac{1}{M} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \right\}$$

- FSK - Densidad espectral de potencia

$$S_x(j\omega) = S_{xc}(j\omega) + S_{xd}(j\omega)$$

## Receptores para FSK

- Receptor coherente con filtros adaptados o correladores

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- Efecto de los errores de fase - Ejemplo:  $n = 0, A[n] = i$ , error de fase  $\theta$

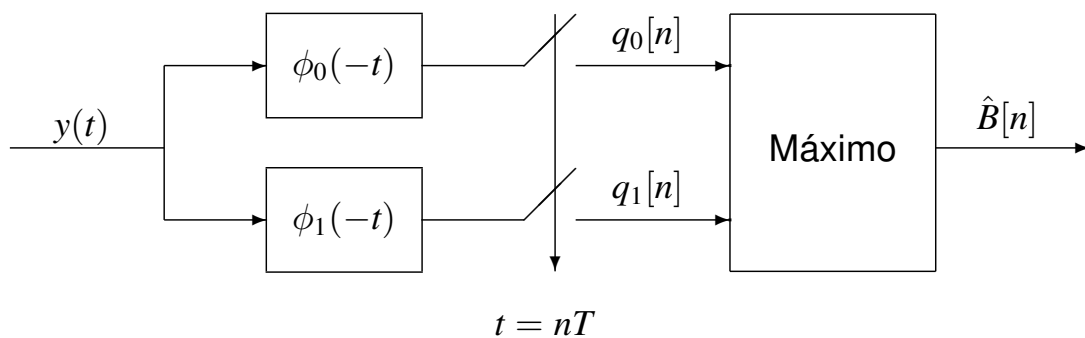
$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen}(\omega_i t + \theta) \cdot w_T(t)$$

Salida del demodulador de índice  $\ell$  (producto escalar de  $y(t)$  con  $\phi_\ell(t)$ )

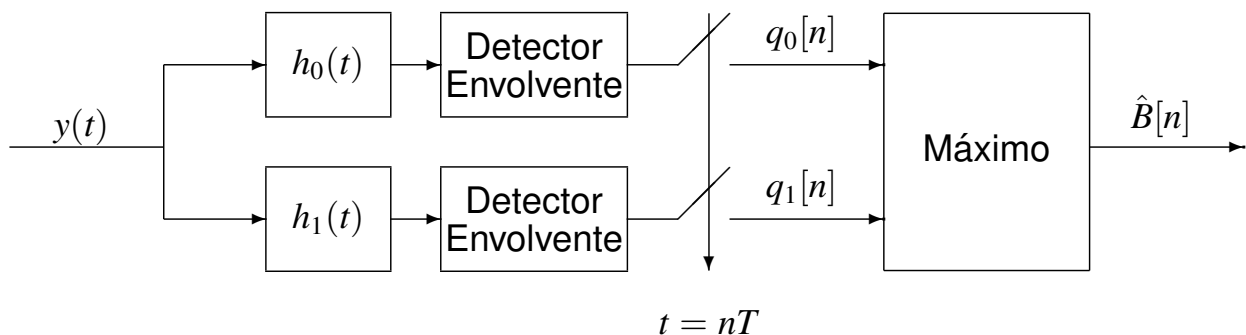
$$\begin{aligned} q_\ell[0] &= \int_0^T y(t) \cdot \phi_\ell(t) dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen}(\omega_i t + \theta) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{\sqrt{E_s}}{T} \int_0^T [\cos((\omega_i - \omega_\ell)t + \theta) - \cos(\omega_i + \omega_\ell)t + \theta)] dt \\ &= \sqrt{E_s} \cdot \cos(\theta) \cdot \delta[i - \ell]. \end{aligned}$$

- ▶ Valor ideal:  $\sqrt{E_s}$
- ▶ Término de atenuación:  $\cos(\theta)$
- ▶ Necesidad de receptores coherentes

## Receptor coherente FSK binaria

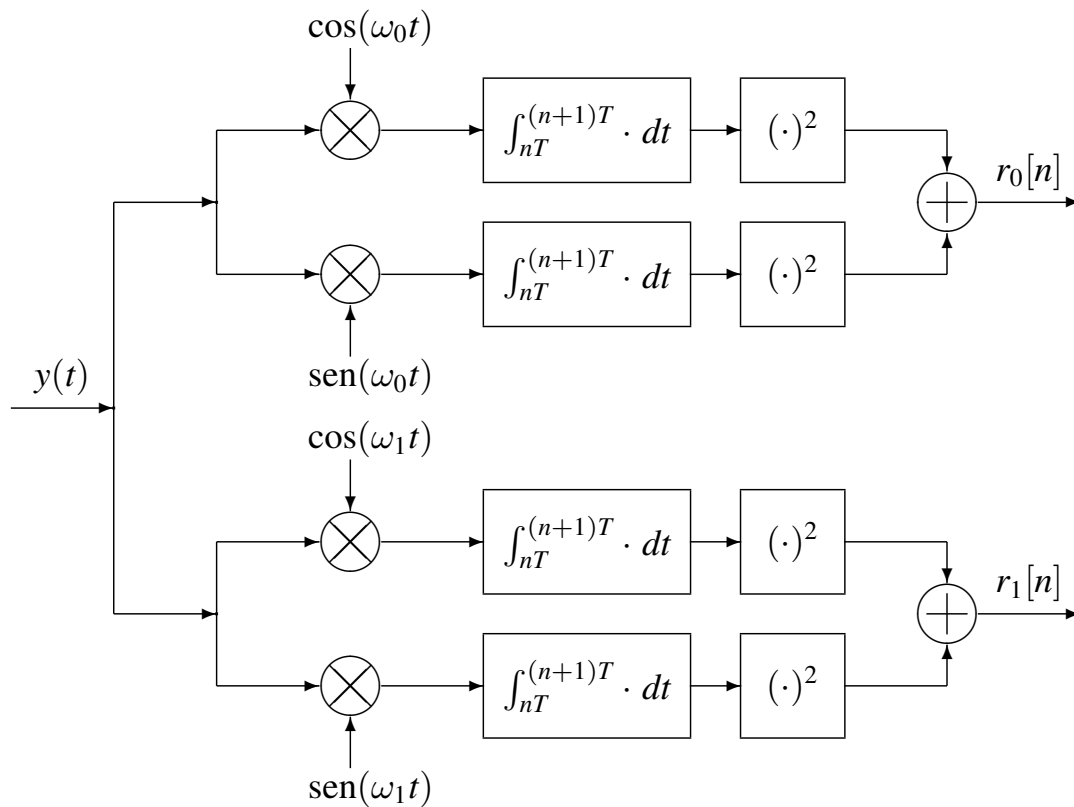


Receptor Coherente



Receptor Incoherente

## Receptor incoherente para FSK (ley cuadrática)



## FSK como desplazamiento en frecuencia

- Definición de frecuencia central

$$\omega_c = \frac{\omega_0 + \omega_{M-1}}{2} = \frac{\pi}{T} \cdot C, \quad C \in \mathbb{Z}, \quad C \text{ impar}$$

- Valor de la frecuencia central  $\omega_c$ : múltiplo impar de  $\frac{\pi}{T}$
- Frecuencia del pulso del símbolo en el instante discreto  $n$

$$\omega_c + I[n] \cdot \frac{\pi}{T}$$

- Codificador

$$I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

- Expresión FSK como desplazamientos desde  $\omega_c$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \text{sen} \left( \omega_c t + I[n] \times \frac{\pi}{T} \cdot t \right) w_T(t - nT)$$

## Modulación MSK (Minimum shift keying)

- Información: cambios de frecuencia en la frecuencia de una portadora
- Mínima separación de frecuencia entre portadoras ortogonales
- Producto escalar de pulsos  $g_i(t)$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_\ell \rangle &= \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cdot \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i - \omega_\ell)t] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i + \omega_\ell)t] dt \\ &= \frac{T \text{sen}[(\omega_i - \omega_\ell)T]}{2(\omega_i - \omega_\ell)T} - \frac{T \text{sen}[(\omega_i + \omega_\ell)T]}{2(\omega_i + \omega_\ell)T}\end{aligned}$$

- Separación mínima (sistemas de banda estrecha)

- ▶ Asunción:  $\frac{\text{sen}[(\omega_i + \omega_\ell)T]}{(\omega_i + \omega_\ell)}$  se puede despreciar (denominador elevado)

$$\omega_i - \omega_\ell = \frac{\pi}{T} \times N_{i,\ell}, \quad \text{con } N_{i,\ell} \in \mathbb{Z}, \quad i, \ell = 0, 1, \dots, M-1, \quad i \neq \ell$$

## Modulación MSK (II)

- Diferencias clave con la modulación CPFSK

- ▶ Separación entre frecuencias consecutivas es la mitad para MSK

- ★ MSK:  $\Delta_\omega = \omega_i - \omega_{i-1} = \frac{\pi}{T}$

- ★ CPFSK:  $\Delta_\omega = \omega_i - \omega_{i-1} = \frac{2\pi}{T}$

- ▶ Valores para  $\omega_i$  no restringidos a múltiplos enteros de  $\frac{2\pi}{T}$  como en CPFSK (ni tampoco a ser múltiplos de  $\frac{\pi}{T}$ )

- ★ Selección de frecuencias no garantiza automáticamente continuidad de fase
- ★ Es preciso introducir memoria para tener continuidad de fase

- Señal MSK en notación con frecuencia central

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \sin\left(\omega_c t + I[n] \times \frac{\pi}{2T} t + \theta[n]\right) \cdot w_T(t - nT)$$

- ▶ Codificador:  $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$

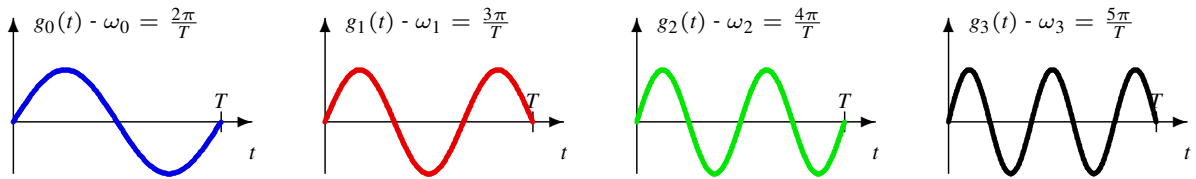
- ▶ Continuidad de fase: se introduce el término de memoria  $\theta[n]$

$$\theta[n] = \theta[n-1] + \frac{\pi n}{2} \cdot (I[n-1] - I[n]), \quad \text{mod } 2\pi$$

Estimación recursiva de la fase acumulada al final de cada intervalo de símbolo

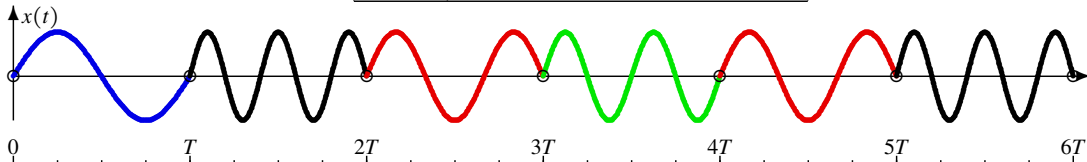
## Formas de onda MSK - Ejemplo para $M = 4$

- Pulsos para  $M = 4$  (un posible ejemplo)

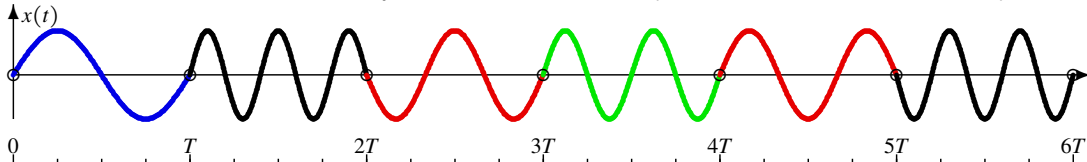


- Forma de onda para

$n$	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



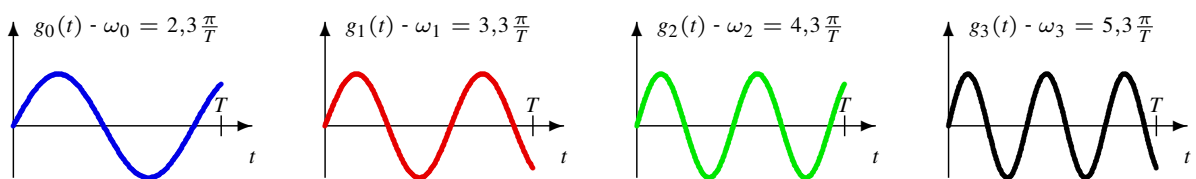
Sin memoria, saltos de fase pueden darse en  $nT$  (cuando cambia el símbolo)



Identificación de la fase al final de cada intervalo de símbolo ( $\theta[n]$ ) permite la continuidad

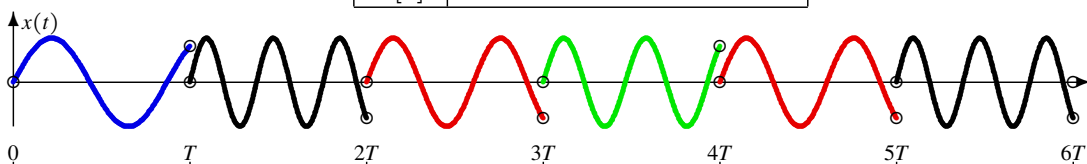
## Formas de onda MSK - Ejemplo para $M = 4$ (II)

- Otro ejemplo con frecuencias que no son múltiplos enteros de  $\frac{\pi}{T}$

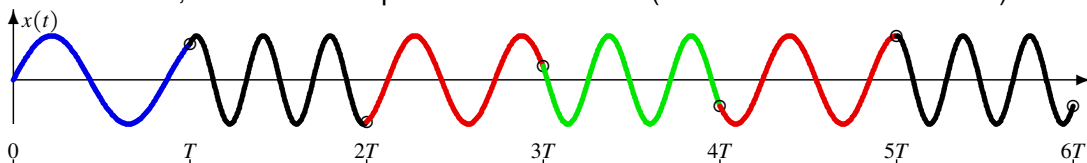


- Forma de onda para

$n$	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



Sin memoria, saltos de fase pueden darse en  $nT$  (cuando cambia el símbolo)



Identificación de la fase al final de cada intervalo de símbolo ( $\theta[n]$ ) permite la continuidad

## Espectro MSK

- Expresión alternativa para MSK

$$x(t) = \sqrt{2E_s} \cos(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} I[n] \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT) \\ + \sqrt{2E_s} \sin(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT + T)$$

- Similar a OQPSK

- ▶ Nuevos símbolos
- ▶ Pulso:  $g(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_{2T}(t)$ ,  
 $|G(j\omega)|^2 = 16T\pi^2 \left(\frac{\cos(\omega T)}{\pi^2 - 4\omega^2 T^2}\right)^2$

- Espectro MSK

$$S_x(j\omega) = 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega - \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega - \omega_c)^2 T^2}\right)^2 + 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega + \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega + \omega_c)^2 T^2}\right)^2$$

## Receptores para MSK

- Demodulador basado en el receptor ML para FSK
- Demodulador basado en el ML para OQPSK
- Probabilidad de error

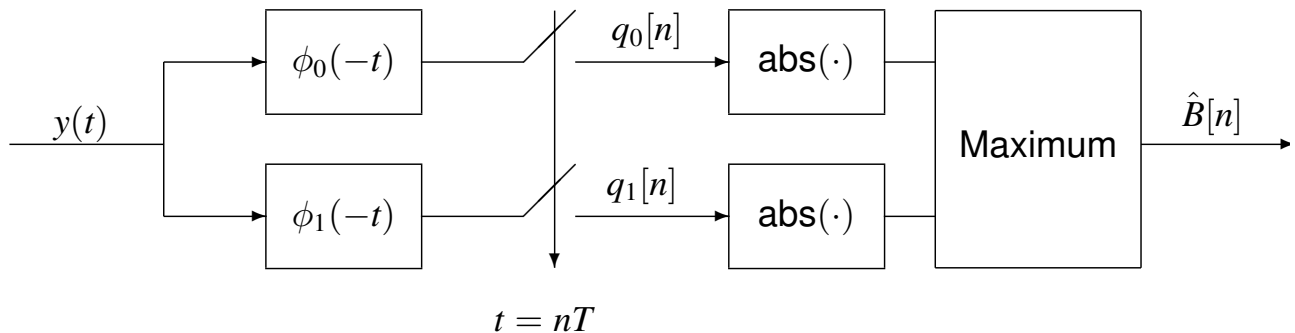
$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- ▶ No se tiene en cuenta la memoria del sistema
- ▶ Demodulador óptimo más complejo



## Receptor MSK binario

- Receptor MSK sub-óptimo basado en receptor para FSK donde la evaluación del valor absoluto para cada posible frecuencia se introduce para considerar diferentes fases iniciales



## Modulaciones de fase continua (CPM)

- Familia que incluye a la CPFSK y MSK
- Características básicas
  - ▶ Envolvente constante
  - ▶ Continuidad de fase
  - ▶ Reducción del ancho de banda: suavizando la evolución de la fase instantánea
- Señal CPM: expresión analítica en el dominio temporal

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \text{sen} [\omega_c t + \theta_0 + \theta(t, \mathbf{I})]$$

- ▶  $\mathbf{I}$ : Secuencia de símbolos transmitidos
- ▶  $\omega_c$ : frecuencia nominal de la portadora
- ▶  $\theta_0$ : fase inicial de la portadora
- ▶  $E_s$ : energía transmitida durante un período de símbolo

## Generación de la señal CPM

- Codificador:  $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$

- Señal PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n I[n] \cdot g(t - nT)$$

- Pulso  $g(t)$  rectangular de duración  $T$  y normalizado

$$\text{Normalización: } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \frac{1}{2}$$

- Señal CPM: frecuencia instantánea  $\omega_c + 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot s(t)$

- Fase instantánea para esa frecuencia (integral de la frecuencia)

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$

- ▶  $\omega_d$ : desviación de frecuencia de pico

## Expresión CPM en el dominio temporal

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen} \left[ \omega_c t + \theta_0 + 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot \int_{-\infty}^t \underbrace{\sum_n I[n] \cdot g(\tau - nT)}_{s(\tau)} d\tau \right]$$

- Fase  $\theta(t, \mathbf{I})$  en el intervalo  $[nT, (n+1)T]$  (intervalo asociado a  $I[n]$ )

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \theta[n] + \theta(t, n)$$

- ▶  $\theta[n]$ : fase acumulada hasta  $t = nT$ :

- ★ Debida a los símbolos transmitidos anteriormente (hasta  $I[n-1]$ )

$$\theta[n] = \omega_d \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m]$$

- ▶  $\theta(t, n)$ : fase incremental desde  $nT$  hasta  $t$ :

- ★ Debida al símbolo actual  $I[n]$

$$\theta(t, n) = 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot I[n] \cdot q_g(t - nT), \text{ siendo } q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

## Expresión CPM en el dominio temporal - Índice de modulación

- Expresión alternativa introduciendo un parámetro diferente (que reemplaza a la desviación de frecuencia de pico)
- Definición del índice de modulación  $h$ :

$$h = \omega_d \cdot \frac{T}{\pi}$$

- Valor de fase asociado al intervalo para  $I[n]$ :
  - ▶  $\theta[n]$ : fase acumulada hasta  $t = nT$ :

$$\theta[n] = \pi \cdot h \cdot \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m]$$

- ▶  $\theta(t, n)$ : incremento de fase desde  $nT$  hasta  $t$ :

$$\theta(t, n) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot I[n] \cdot q_g(t - nT)$$

## Identificación de CPFSK binaria como CPM

- Expresión analítica para una CPFSK binaria

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \text{sen} \left( \omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{T} \right) w_T(t - nT).$$

- CPFSK binaria como CPM:  $\omega_d = \frac{\pi}{T}$ ,  $h = 1$
- Considerando  $\theta[0] = 0$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] + 2\pi I[n] \frac{(t - nT)}{2T} = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] + \frac{\pi t}{T} I[n]$$

- ▶ Considerando que la expresión

$$\pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] = K \cdot 2\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

- ▶ La fase  $\theta(t, \mathbf{I})$  es, en módulo  $2\pi$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \frac{\pi t}{T} I[n] = \pm \frac{\pi t}{T}$$

## Identificación de la MSK como una CPM

- Señal MSK

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \text{sen} \left( \omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{2T} + \theta[n] \right) w_T(t - nT).$$

- Identificación como CPM

$$\omega_d = \frac{\pi}{2T}, \quad h = \frac{1}{2}$$

## Árboles de fase en modulaciones CPM

- Representan la posible evolución temporal de la fase desde un punto inicial
- Transición en el intervalo de símbolo
  - ▶ Encremento de fase en cada intervalo

$$\theta((n+1)T) - \theta(nT) = \theta[n+1] - \theta[n] = \pi \cdot h \cdot I[n]$$

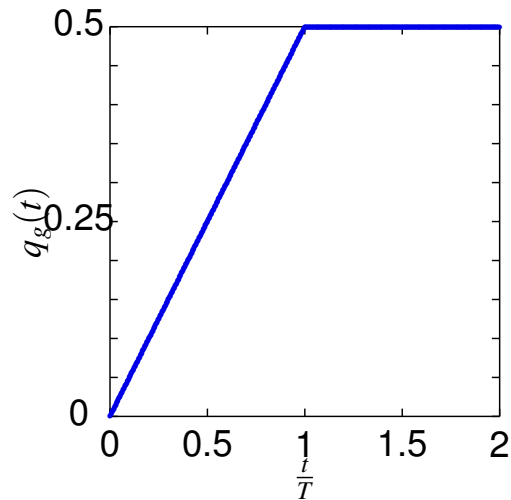
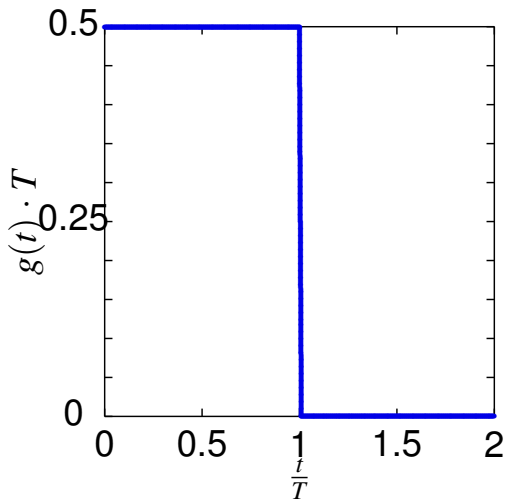
- ▶ Forma para moverse desde el valor de fase en el inicio del intervalo hasta el valor de fase al final del intervalo
  - ★ Proporcional a la integral del pulso  $g(t)$ , i.e.,  $q_g(t)$

$$\theta(t, n) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot I[n] \cdot q_g(t - nT)$$

## Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular

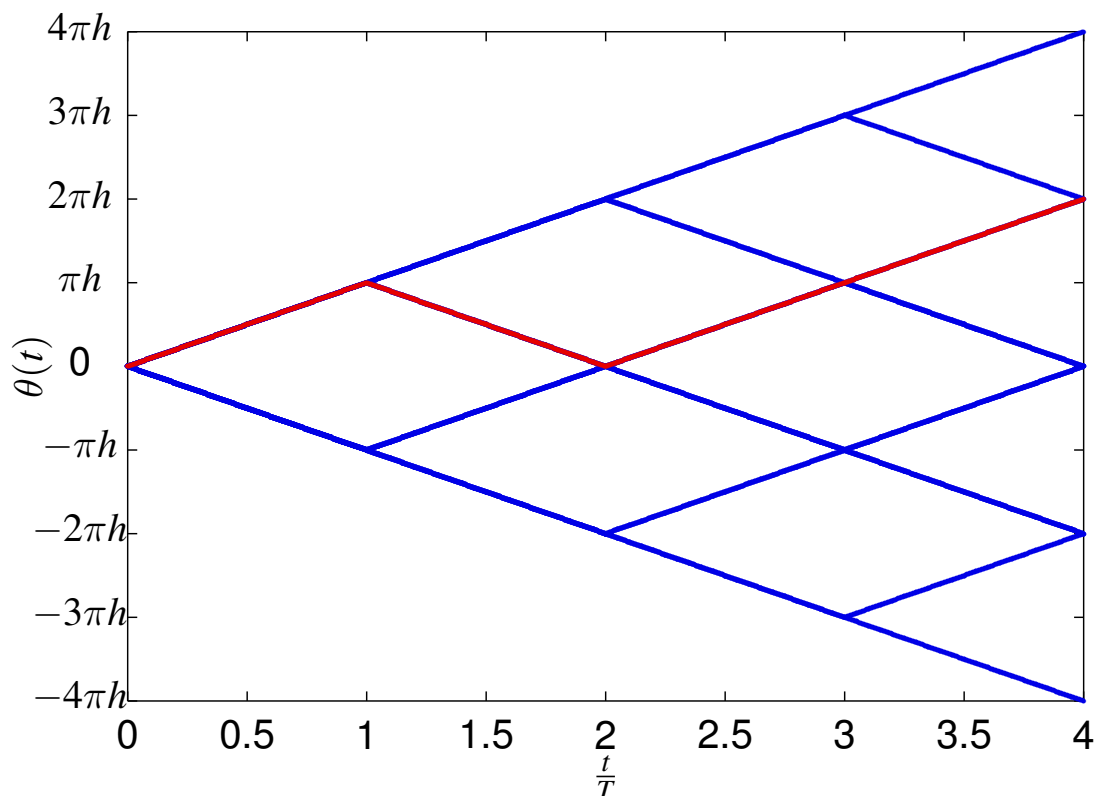
- Ejemplo: pulso rectangular

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2T}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



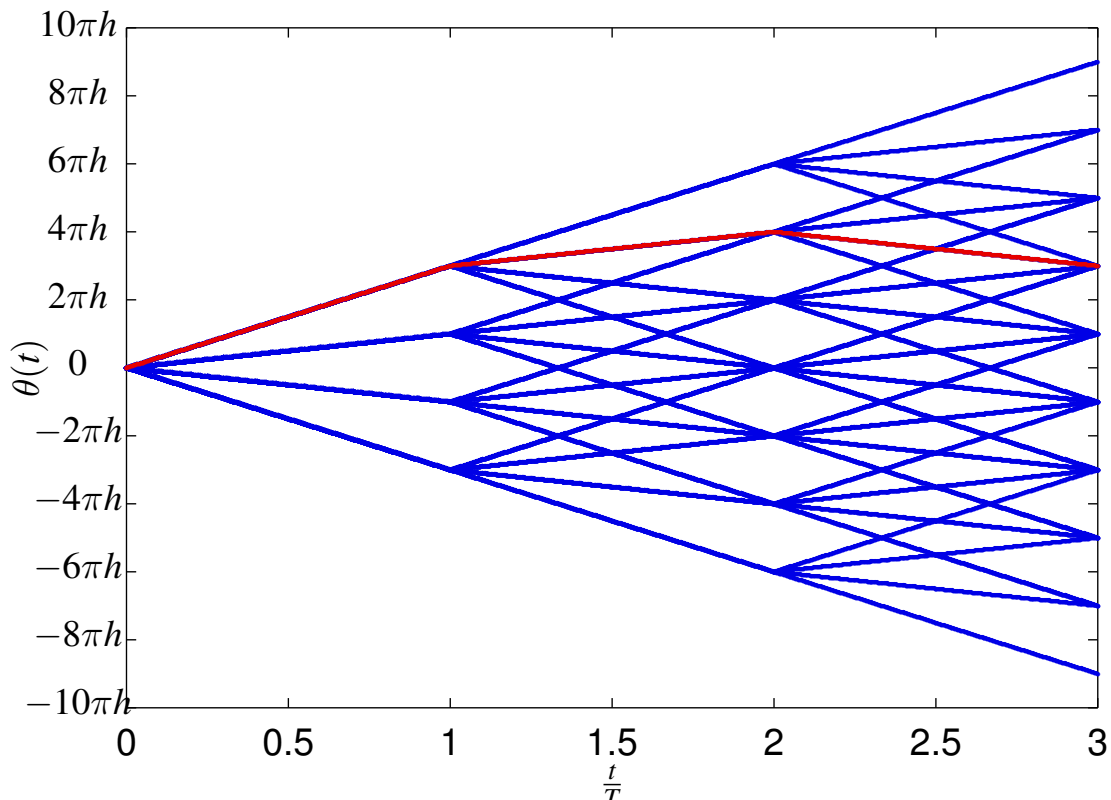
## Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular - binario

- Secuencia resaltada:  $I[0] = +1, I[1] = -1, I[2] = +1, I[3] = +1$



## Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular - cuaternario

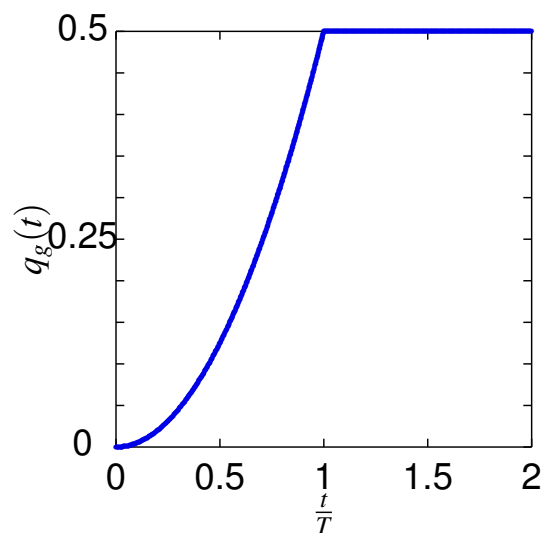
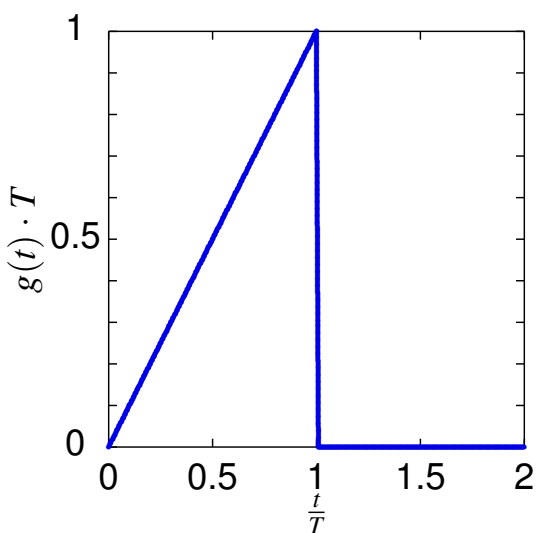
- Secuencia resaltada:  $I[0] = +3, I[1] = +1, I[2] = -1$



## Árbol de fase - Ejemplo - Pulso triangular

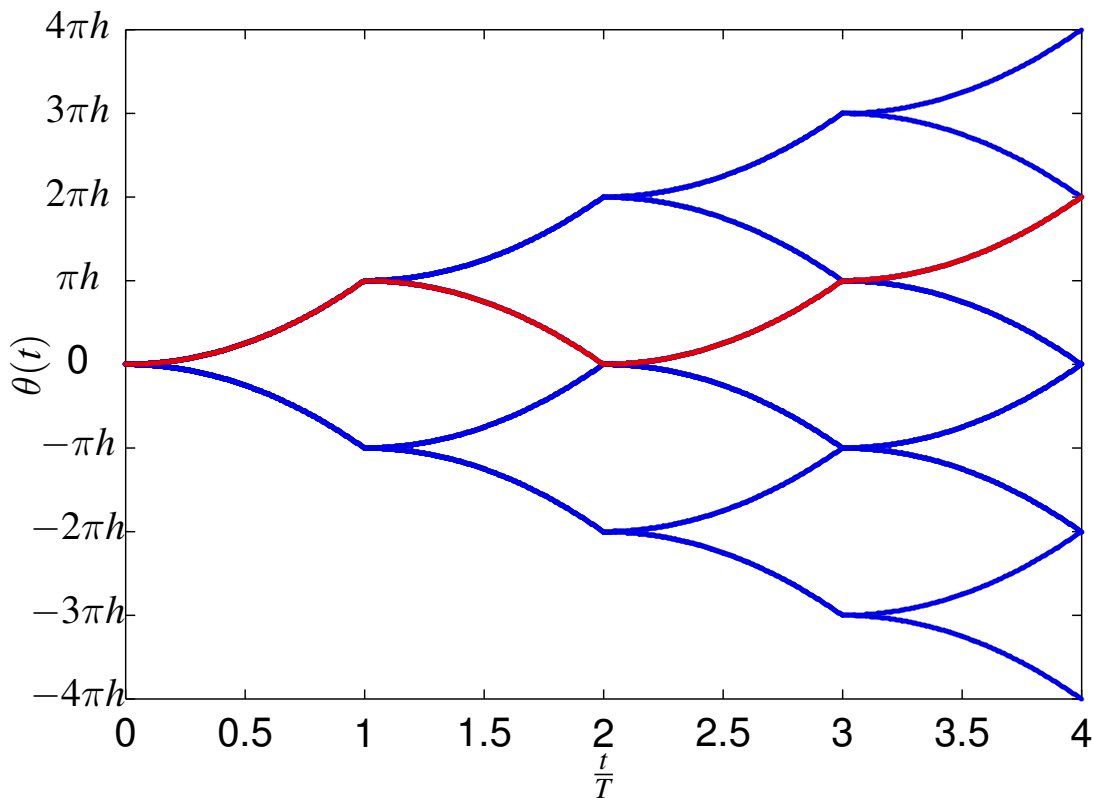
- Ejemplo: pulso triangular

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{T^2}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2T^2}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



## Árbol de fase - Ejemplo - Pulso triangular - binario

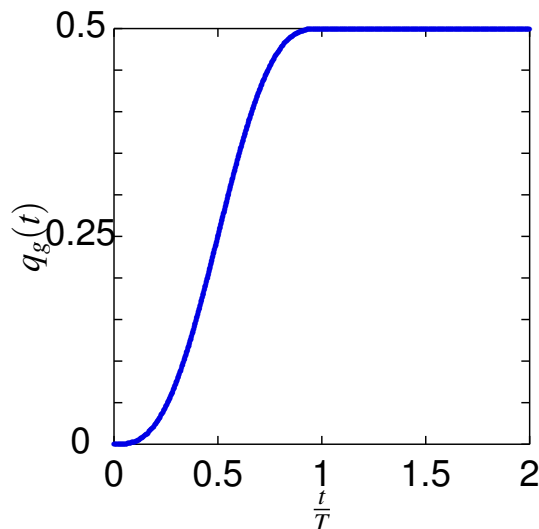
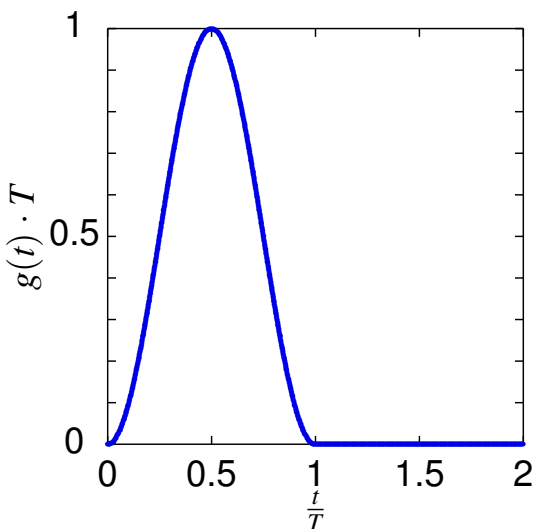
- Secuencia resaltada:  $I[0] = +1, I[1] = -1, I[2] = +1, I[3] = +1$



## Árbol de fases - Ejemplo - Pulsos más suaves

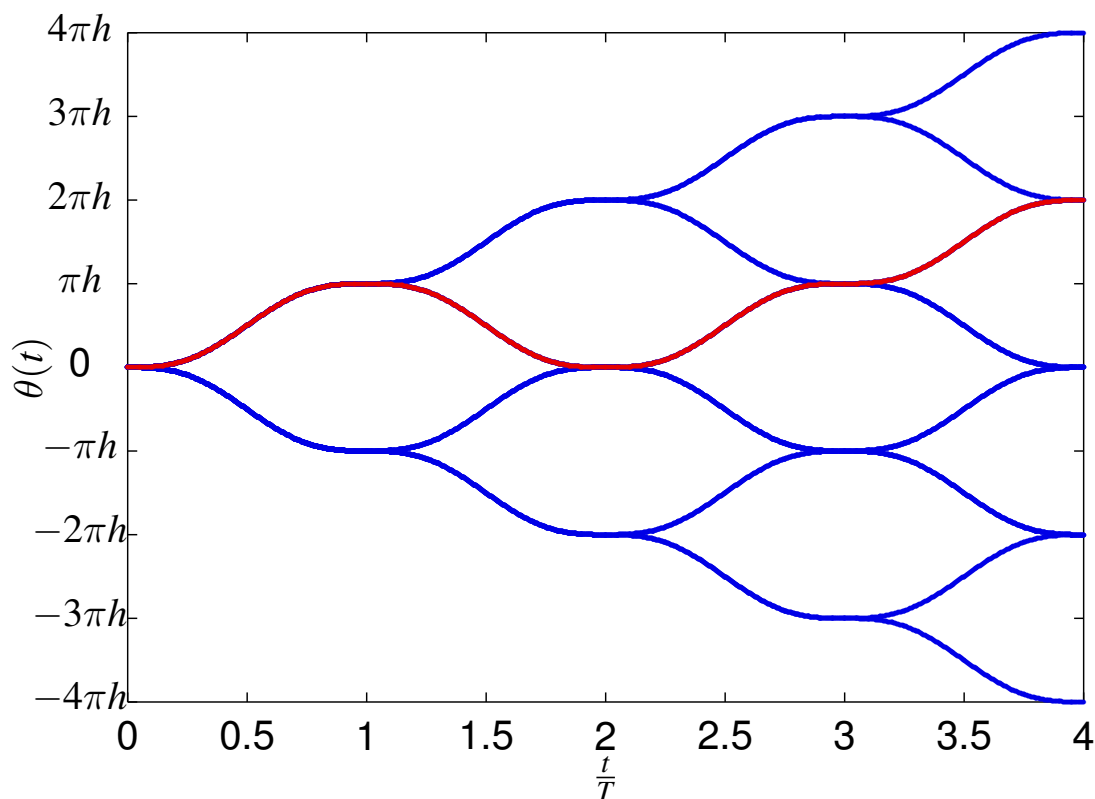
- Ejemplo: pulso en coseno alzado ( $L = 1$ )

$$g(t) = \frac{1}{2T} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right] w_T(t), \quad q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2T} \left[ t - \frac{T}{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right], & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



## Árbol de fases - Ejemplo - Pulsos más suaves - binario

- Secuencia resaltada:  $I[0] = +1, I[1] = -1, I[2] = +1, I[3] = +1$



## CPM de respuesta parcial

- El pulso  $g(t)$  dura  $L$  períodos de símbolo ( $L > 1$ )
- La fase  $\theta(t, \mathbf{I})$  en el intervalo  $[nT, (n+1)T]$

$$\begin{aligned}\theta(t, \mathbf{I}) &= 2\pi h \sum_{m=-\infty}^n I[m] \cdot q_g(t - mT) \\ &= \theta[n] + \theta(t, n)\end{aligned}$$

- ▶  $\theta[n]$ : fase acumulada hasta  $nT$  debida a los pulsos que han finalizado

$$\theta[n] = \pi h \sum_{m=-\infty}^{n-L} I[m]$$

- ▶  $\theta(t, n)$ : contribución de los pulsos que no han finalizado

$$\theta(t, n) = 2\pi h \sum_{m=n-L+1}^n I[m] \cdot q_g(t - mT)$$



## Pulsos para CPM de fase parcial

- Pulsos en coseno alzado

$$g(t) = \frac{1}{2LT} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{LT} \right) \right] w_{LT}(t)$$

- ▶ Suavizan las transiciones de fase

- Gaussian MSK (GMSK)

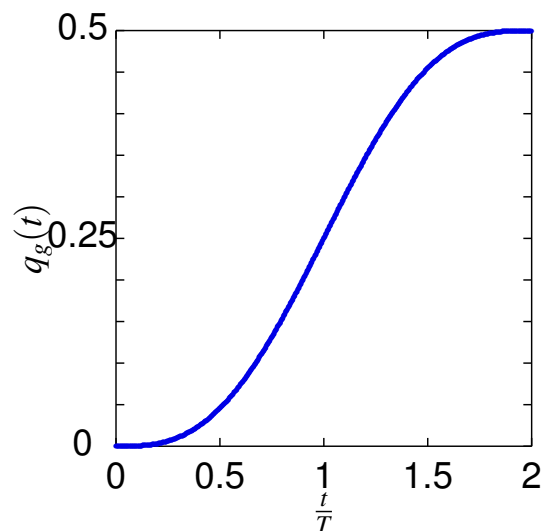
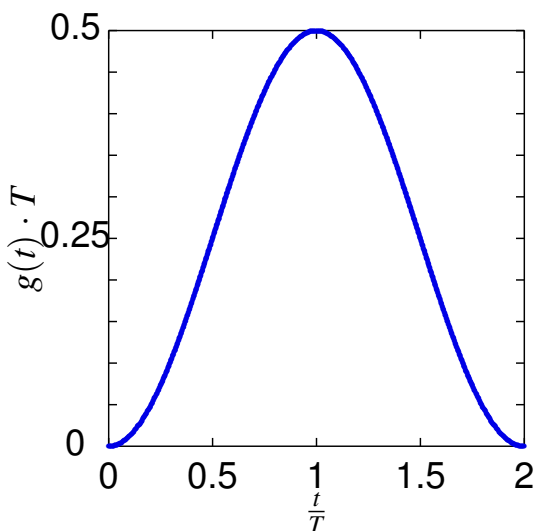
$$g(t) = \frac{1}{2T} \left[ Q \left( \frac{2\pi\beta(t - T/2)}{\sqrt{\ln 2}} \right) - Q \left( \frac{2\pi\beta(t + T/2)}{\sqrt{\ln 2}} \right) \right]$$

- ▶ Empleado en GSM ( $\beta = 0,3$ ) y DECT ( $\beta = 0,2$ )
- ▶ Pulso rectangular filtrado con respuesta gaussiana

## Árbol de fases - CPM de fase parcial - Ejemplo

- Ejemplo: pulso en coseno alzado ( $L = 2$ )

$$g(t) = \frac{1}{4T} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{2T} \right) \right] w_{2T}(t), \quad q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4T} \left[ t - \frac{2T}{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi t}{2T} \right) \right], & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



## Árbol de fases - CPM de fase parcial - Ejemplo - binario

- Secuencia resaltada:  $I[0] = +1, I[1] = -1, I[2] = +1, I[3] = +1$

