Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de variables aleatorias (proceso aleatorio)
  - $E[A[n]] = m$
  - $E[|A[n]|^2] = E_s$
  - $E[A[k] \cdot A^*[j]] = R_A[k-j] = R_A[j-k]$
  - La densidad espectral de potencia es

$$S_A(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- Sea $g(t)$ cualquier señal determinista con transformada de Fourier $G(jw)$

Teorema de Wiener-Khinchin

- Densidad espectral de potencia

$$S_X(j\omega) \stackrel{def}{=} E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{T}.$$

- Teorema de Wiener-Khinchin
  Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo $\mathcal{A}$, de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left|\int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau, t)dt\right| < \infty,$$

  la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier de

$$< R_X(t+\tau, t) > \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau, t) \cdot dt.$$

Corolarios Teorema de Wiener-Khinchin

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = TF[R_X(\tau)].$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_o} R_X(t+\tau, t) dt \right| < \infty,$$

entonces

$$S_X(j\omega) = TF[\widetilde{R}_X(\tau)],$$

donde

$$\widetilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} R_X(t+\tau, t) \cdot dt,$$

y T_o es el período del proceso cicloestacionario.

Espectro de una PAM banda base

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n] g(t - nT)$$

$$m_X(t) = E\left[\sum_n A[n] g(t-nT)\right] = \sum_n E[A[n]] g(t-nT) = m \sum_n g(t-nT)$$

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E[X(t) X^*(t+\tau)] \\
&= E\left[\left(\sum_k A[k] g(t-kT)\right)\left(\sum_j A^*[j] g^*(t+\tau-jT)\right)\right] \\
&= \sum_k \sum_j E[A[k] A^*[j]] g(t-kT) g^*(t+\tau-jT) \\
&= \sum_k \sum_j R_A[k-j] g(t-kT) g^*(t+\tau-jT)
\end{aligned}$$

Cicloestacionariedad

$$\begin{aligned} m_X(t+T) &= m\sum_n g(t+T-nT) = m\sum_n g(t-(n-1)T) \\ &= m\sum_j g(t-jT) = m_X(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R_X(t+T, t+\tau+T) = \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j] g(t+T-kT) g^*(t+T+\tau-jT) \\ &= \sum_k \sum_j R_A[k-j] g(t-(k-1)T) g^*(t-(j-1)T+\tau) \\ &= \sum_m \sum_n R_A[m+1-(n+1)] g(t-mT) g^*(t-nT+\tau) \\ &= \sum_m \sum_n R_A[m-n] g(t-mT) g^*(t-nT+\tau) = R_X(t, t+\tau) \end{aligned}$$

Promedio temporal de la autocorrelación

$$\begin{aligned} \tilde{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t, t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k \sum_j R_A[k-j] g(t-kT) g^*(t+\tau-jT)dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[-m]\int_0^T g(t-kT)g^*(t+\tau-(k+m)T)dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-kT}^{-(k-1)T} g(u)g^*(u+\tau-mT)du \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A[m]\int_{-\infty}^{\infty} g(u)g^*(u+\tau-mT)du \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] r_g(nT-\tau), \end{aligned}$$

$$r_g(t) = g(t) * g^*(-t),$$

Densidad Espectral de Potencia

$$\begin{aligned}\tilde{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n]\cdot r_g(nT-\tau)\\ &= \frac{1}{T}r_g(\tau) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n]\cdot\delta(\tau-nT)\\ &= \frac{1}{T}g(\tau) * g^*(-\tau) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n]\cdot\delta(\tau-nT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_X(j\omega) &= \frac{1}{T}\cdot G(j\omega)\cdot G^*(j\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n]\cdot e^{-j\omega nT}\\ &= \frac{|G(j\omega)|^2}{T}\cdot S_A(e^{j\omega T})\end{aligned}$$