Detección de secuencias - Planteamiento

- Receptor: $f(t) = g(-t)$, y $r_g(t) = g(t) * g(-t)$ cumple Nyquist
  - $z[n]$ blanco y gausiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \boldsymbol{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathcal{C} \end{cases}$
- Secuencia de símbolos $A[n]$ blanca de media nula

$$m_A[n] = E\{A[n]\} = 0$$

$$R_A[k] = E\{A[n+k]A^*[n]\} = E_s\delta[k], \quad S_A\left(e^{j\omega}\right) = E_s$$

- Respuesta $p(t)$ limitada en el tiempo (T_p s)
  - $p[n]$ de longitud $K+1$, $\Rightarrow K = \lfloor T_p/T \rfloor$

$$q[n] = \sum_{k=0}^{K} p[k]A[n-k] + z[n] = o[n] + z[n]$$

$$\text{Salida sin ruido: } o[n] = \sum_{k=0}^{K} p[k]A[n-k]$$

Detección de secuencia ML

- Secuencia a detectar: L símbolos

$$\boldsymbol{A} = [A[0], A[1], \cdots, A[L-1]]^T$$

- Estadístico suficiente

$$\boldsymbol{q} = [q[0], q[1], \cdots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K + L$$

- Secuencia más verosimil

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \arg \min_{\boldsymbol{a}} \sum_{n=0}^{N_q-1} \left| q[n] - \sum_{k=0}^{K} p[k]a[n-k] \right|^2$$

$$\boldsymbol{a} = [a[0], a[1], \cdots, a[L-1]]^T$$

Ejemplo: 2-PAM $K = 1$, $L = 3$

- Constelación de símbolos: $A[n] \in \{\pm 1\}$
- Canal: $p[n] = \delta[n] + 0{,}5 \cdot \delta[n-1]$, $K = 1$
- Secuencia a estimar: $\boldsymbol{A} = [A[0], A[1], A[2]]$, $L = 3$
- Estadístico para la decisión: $\boldsymbol{q} = [q[0], q[1], q[2], q[3]]$

$$q[-1] = A[-1] + 0{,}5 \cdot A[-2] + z[-1]$$

$$q[0] = A[0] + 0{,}5 \cdot A[-1] + z[0]$$

$$q[1] = A[1] + 0{,}5 \cdot A[0] + z[1]$$

$$q[2] = A[2] + 0{,}5 \cdot A[1] + z[2]$$

$$q[3] = A[3] + 0{,}5 \cdot A[2] + z[3]$$

$$q[4] = A[4] + 0{,}5 \cdot A[3]$$

- Premisa: Se conoce el valor de $A[-1] = A[3] = +1$
- Problema: decidir la secuencia de 3 símbolos cuando $q[0] = 1{,}4$ - $q[1] = -0{,}4$ - $q[2] = 0{,}6$ - $q[3] = 1{,}6$

Detección: Comparación con las salidas sin ruido

$$q[0] = 1{,}4 \text{ - } q[1] = -0{,}4 \text{ - } q[2] = 0{,}6 \text{ - } q[3] = 1{,}6$$

- Evaluación de las salidas sin ruido, $o[n]$, generadas por las 8 posibles secuencias, y su correspondiente métrica de verosimilitud

$$\sum_{n=0}^{N_q-1} \left|q[n] - o[n]\right|^2$$

$A[0]$	$A[1]$	$A[2]$	$o[0]$	$o[1]$	$o[2]$	$o[3]$	Métrica
-1	-1	-1	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$-1{,}5$	$+0{,}5$	10,44
-1	-1	$+1$	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$+0{,}5$	$+1{,}5$	4,84
-1	$+1$	-1	$-0{,}5$	$+0{,}5$	$-0{,}5$	$+0{,}5$	6,84
-1	$+1$	$+1$	$-0{,}5$	$+0{,}5$	$+1{,}5$	$+1{,}5$	5,24
$+1$	-1	-1	$+1{,}5$	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$+0{,}5$	5,64
$+1$	-1	$+1$	$+1{,}5$	$-0{,}5$	$+0{,}5$	$+1{,}5$	0,04
$+1$	$+1$	-1	$+1{,}5$	$+1{,}5$	$-0{,}5$	$+0{,}5$	6,04
$+1$	$+1$	$+1$	$+1{,}5$	$+1{,}5$	$+1{,}5$	$+1{,}5$	4,44

- Secuencia con la salida sin ruido "más parecida" (ML):

$$+1 \; -1 \; +1$$

Estado $\psi[n]$

- La salida sin ruido es una máquina de estados finitos

$$o[n] = A[n]p[0] + \sum_{k=1}^{K} p[k]A[n-k]$$

- Definición de estado

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \cdots, A[n-K]]^T$$

Número de posibles estados es M^K.

- Dependencias

$$o[n] = f(A[n], \psi[n])$$
$$o[n] = g(\psi[n], \psi[n+1])$$
$$\psi[n+1] = f(\psi[n], A[n])$$

Diagrama de estados

Representación de la evolución de los estados en un sistema con ISI.

- Hay M^K estados.
- De cada estado salen M flechas, una por cada posible valor de $A[n]$.
- A cada estado llegan M flechas, todas generadas por el mismo valor de $A[n]$. Hay que tener en cuenta que

$$\psi[n+1] = [A[n], A[n-1], \cdots, A[n-K+1]]^T.$$

- Cada flecha se etiqueta con la siguiente información

$$A[n]|o[n],$$

es decir, con el valor del símbolo actual que fuerza la transición al nuevo estado, y con la salida sin ruido en ese caso.

Diagrama de estados - Ejemplo A

- $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$
  - Salida sin ruido
$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$
  - Estado
$$\psi[n] = A[n-1], \qquad \psi[n+1] = A[n]$$
  - Diagrama de estados

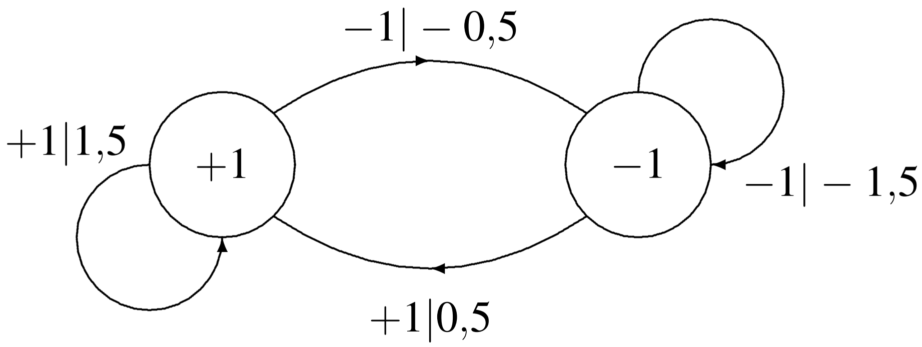


Diagrama de estados - Ejemplo B

- $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2]$
- $\psi[n] = [A[n-1], A[n-2]]^T$, $\psi[n+1] = [A[n], A[n-1]]^T$

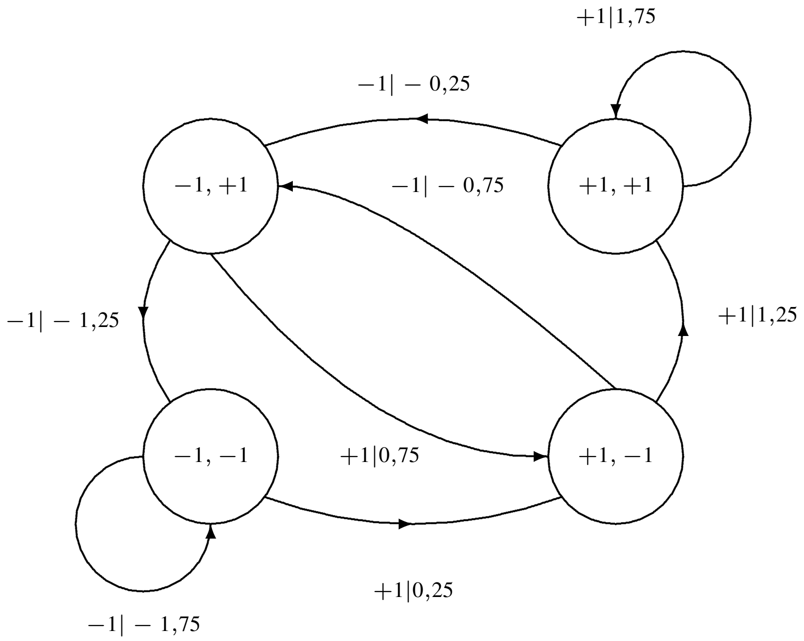


Diagrama de rejilla - Ejemplo A

- Ejemplo: $A[n] \in \{\pm 1\}$, $\boldsymbol{p} = [1\ 0{,}5]^T$
- Estado: $\psi[n] = A[n-1]$
- Etiquetas: $A[n]$, $o[n] = \sum_{k=0}^{K} p[k] \cdot a[n-k]$

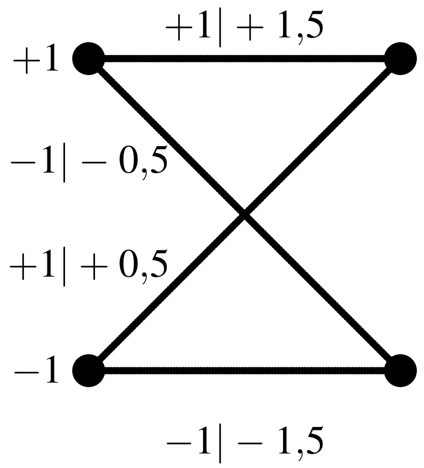


Diagrama de rejilla - Ejemplo B

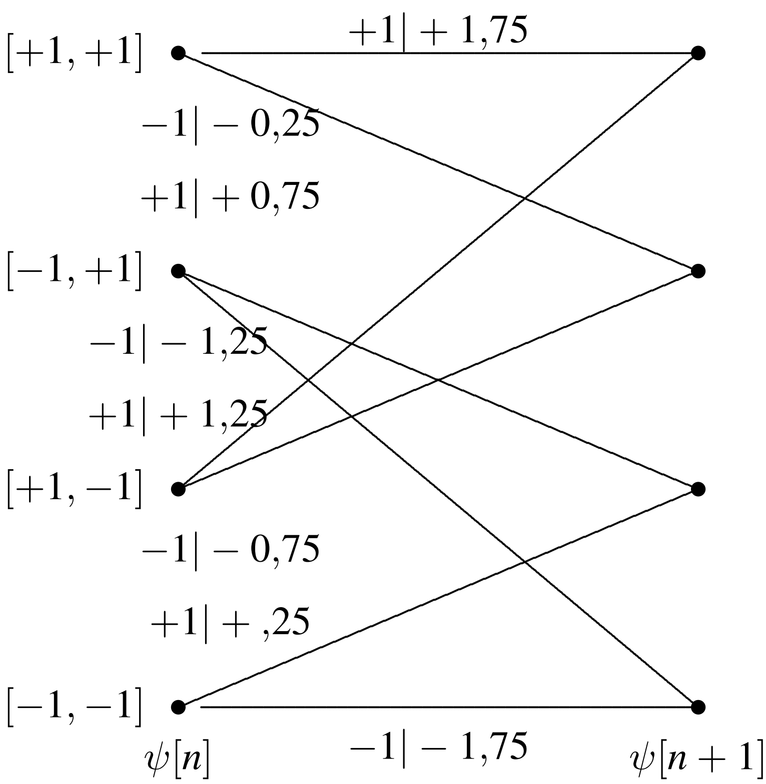


Diagrama de rejilla - Secuencia A

- Camino a través de la rejilla
  - Ejemplo A=[-1 +1 -1 -1 +1]

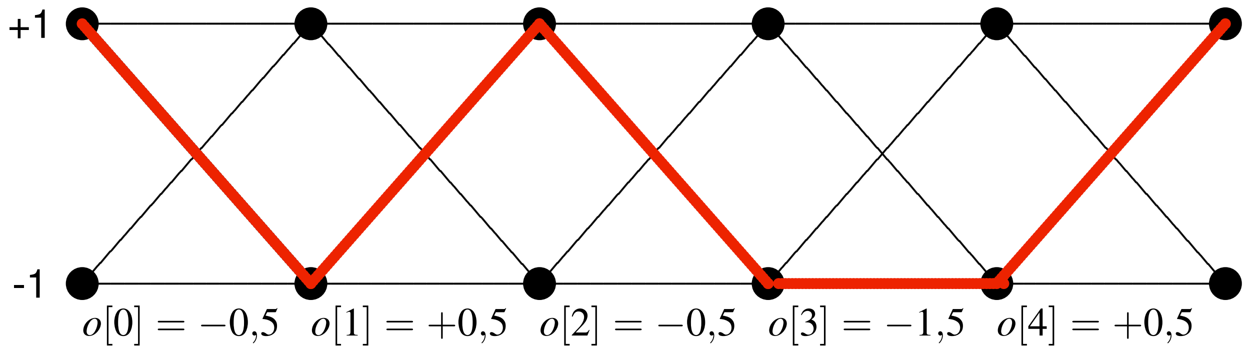


Diagrama de rejilla - Detección ML

- Secuencia más verosímil

$$\hat{A} = \arg\min_{a} \sum_{n=0}^{N+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^{N} p[k]a[n-k]}_{o[n]} \right|^2$$

  - Métrica de rama $|q[n] - o[n]|^2$

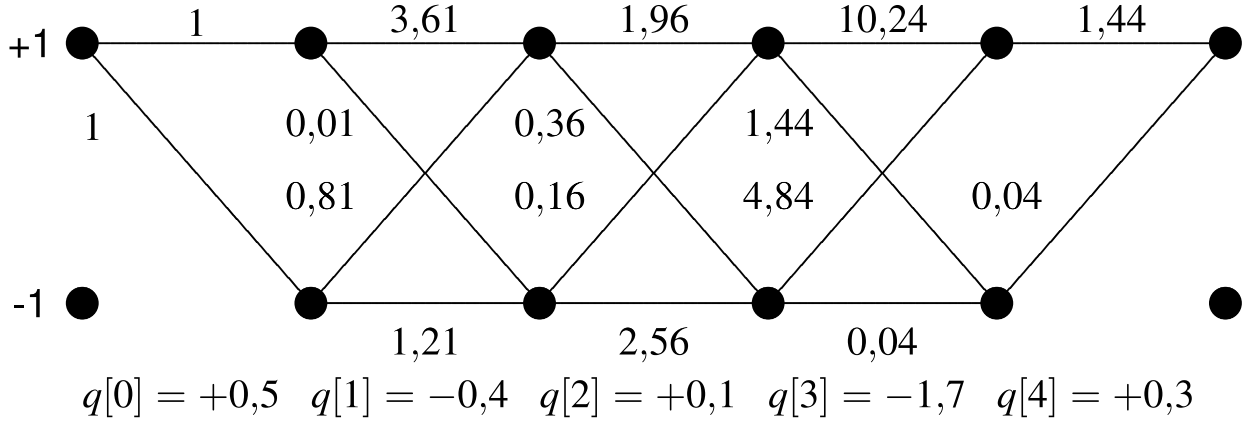
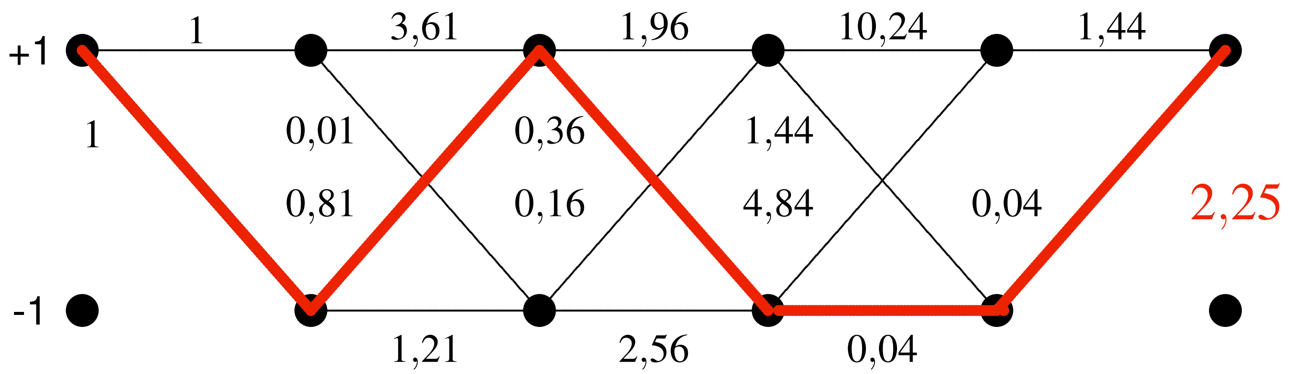


Diagrama de rejilla - Detección ML

- Secuencia más verosímil

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \arg \min_{\boldsymbol{a}} \sum_{n=0}^{N+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^{N} p[k]a[n-k]}_{o[n]} \right|^2$$

  - Métrica de rama $|q[n] - o[n]|^2$



$q[0] = +0{,}5 \quad q[1] = -0{,}4 \quad q[2] = +0{,}1 \quad q[3] = -1{,}7 \quad q[4] = +0{,}3$