# Comunicaciones Digitales - Capítulo 3 - Ejercicios

1. Ejercicio 6.9 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

2. Ejercicio 6.12, apartados (a), (b) y (c), del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007[1].

3. Considere un canal discreto equivalente con la siguiente respuesta al impulso:

$$p[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

El ruido es blanco, gausiano y con densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2} = 0.01$. En el sistema de comunicaciones se utiliza una modulación binaria 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$.

a) Obtenga la constelación de la señal recibida en ausencia de ruido y obtenga la probabilidad de error del sistema si se utiliza un decisor sin memoria basado en el criterio MAP.

b) Obtenga el diagrama de rejilla para el detector de máxima verosimilitud (ML).

c) Obtenga la probabilidad de error alcanzada por un detector de secuencias ML.

d) Diseñe un igualador lineal basado en el criterio ZF y obtenga la probabilidad de error cuando se construye un igualador sin restricciones de complejidad.

e) Diseñe un igualador lineal basado en el criterio MMSE y obtenga la probabilidad de error cuando se construye un igualador sin restricciones de complejidad.

f) Diseñe un igualador lineal basado en el criterio MMSE con tres coeficientes y retardo $d = 1$, y obtenga la probabilidad de error.

g) Compare el rendimiento de los tres igualadores diseñados.

4. Una constelación 4-PSK con símbolos equiprobables es transmitida sobre el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \delta[n] + j0.8\delta[n-1],$$

con ruido aditivo blanco y gausiano. Asuma $E_s = 1$ y que los símbolos de la constelación 4-PSK tienen como coordenadas

$$A[n] \in \{+1, -1, +j, -j\}.$$

Se quiere evaluar el rendimiento del sistema con diferentes receptores.

[1] En el apartado (c) puede comparar el cálculo basado en la rejilla con la constelación de error con el cálculo de la distancia mínima sobre la rejilla con la constelación 2-PAM para la secuencia $A[n] = +1$ $\forall n$.

a) Si en el receptor hay un decisor MAP sin memoria

   I) Obtenga la constelación recibida si no hay ruido en el canal.

   II) Calcule la probabilidad de error $P_e$.

b) Si el receptor es un igualador lineal construido con el criterio ZF sin restricciones en la complejidad seguido por un decisor MAP sin memoria:

   I) Obtenga la función de transferencia del igualador.

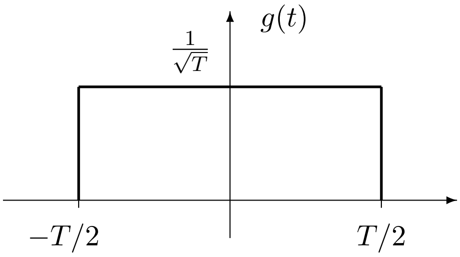
   II) Estime $P_e$.

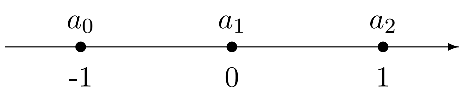
c) Si el receptor es un detector de secuencias ML:

   I) Obtenga el diagrama de rejilla y la distancia mínima a un evento erróneo.

   II) Obtenga $P_e$ y compárela con los rendimientos obtenidos en los apartados anteriores.

5. Un sistema de comunicaciones PAM utiliza en la transmisión el pulso conformador $g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ mostrado en la figura. El sistema transmite los tres símbolos de la constelación de la figura con la misma probabilidad. Se considera una transmisión sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ Watts./Hz.




a) Obtenga el canal discreto equivalente para un canal con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t) - 0.5 \cdot \delta(t - \frac{T}{2})$, si el receptor usa un filtro adaptado al transmisor.

b) Asuma de ahora en adelante un canal discreto equivalente

$$p[n] = 0.75 \cdot \delta[n] - 0.25 \cdot \delta[n-1].$$

   En primer lugar, obtenga el receptor óptimo para detección símbolo a símbolo sin memoria, y calcule la probabilidad de error asociada a dicho receptor.

c) Obtenga el diagrama de rejilla para el canal discreto equivalente de la sección anterior y calcule la probabilidad de error si se usa un detector de secuencias ML. Compare los resultados.

d) Decodifique, usando un decisor sin memoria MAP y un detector de secuencia ML la siguiente secuencia de observaciones teniendo en cuenta que $A[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n \geq 3$

$$\boldsymbol{q} = [0.2 \quad -0.35 \quad -0.35 \quad -0.2].$$

NOTA: La transformada de Fourier de $g(t)$ es $G(j\omega) = \sqrt{T}\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$.

6. Un sistema de comunicaciones tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2].$$

Se usa una modulación 2-PAM (también llamada BPSK), $A[n] \in [\pm 1]$, el ruido es blanco, gausiano y con densidad espectral de potencia $N_0/2$ y $N_0 = 2 \cdot 10^{-2}$.

a) Obtenga el igualador lineal ZF sin restricciones de complejidad y obtenga la probabilidad de error.

b) Obtenga el igualador lineal ZF con dos coeficientes y retardo $d = 1$.

7. Un sistema de comunicaciones digital usa una modulación 2-PAM $A[n] = \pm 1$ sobre un canal discreto equivalente de la forma

$$p[n] = -0.3\delta[n] + 0.8\delta[n-1] - 0.2\delta[n-2]$$

y con ruido discreto $z[n]$ blanco y gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

a) Asuma que se utliza un decisor MAP sin memoria.

   I) Dibuje la constelación a la salida del canal en ausencia de ruido.

   II) Obtenga la función de densidad de probabilidad de $q[n]$ a la entrada del decisor si $A[n] = 1$.

   III) Obtenga la función de densidad de probabilidad de $q[n]$ a la entrada del decisor si $A[n] = -1$.

   IV) Obtenga la probabilidad de error bajo los siguientes dos escenarios: primero suponga que las decisiones se toman sobre el símbolo $\hat{A}[n]$; segundo: asuma que las decisiones se toman sobre el símbolo $\hat{A}[n-1]$. ¿A qué se debe la diferencia en el rendimiento entre los dos escenarios?.

b) Utilizando un igualador lineal

   I) Obtenga el igualador lineal ZF con tres coeficientes para $d = 0$ y $d = 1$. Para ello obtenga la matriz de canal $\mathbf{P}$ y el vector de respuesta al impulso $\mathbf{c}_d$ para ambos casos.

   II) Si se tiene un filtro con coeficientes $\mathbf{w}_{ZF} = [1.15,\ 0.22,\ 0.02]^T$ que ha sido obtenido para $d = 1$, obtenga la potencia del ruido y de la ISI a la salida del igualador[2].

[2] El operador $^T$ denota transposición para un vector o matriz.

8. El canal discreto equivalente para un sistema de comunicaciones es

$$p[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{4}\delta[n-2].$$

El sistema utiliza una constelación 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$. La varianza del ruido discreto $z[n]$ es $\sigma_z^2 = 0.1$.

a) Si se utiliza un receptor símbolo a símbolo sin memoria, elija el retardo óptimo para la decisión, $d$, y calcule la probabilidad de error de símbolo para dicho retardo.

b) Diseñe el igualador lineal sin limitación de coeficientes, y criterio ZF, y calcule la probabilidad de error obtenida con el mismo.

c) Diseñe el igualador lineal de 3 coeficientes con los criterios ZF y MMSE para un retardo $d = 2$ (plantee el sistema de ecuaciones a resolver, definiendo de forma precisa todos los términos involucrados, pero no es necesario que obtenga los valores de los coeficientes del igualador resultante).

9. Para poder estudiar las prestaciones de dos canales diferentes en una transmisión digital, se transmite la siguiente secuencia.

| $n$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A[n]$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ |

A la salida de cada uno de los canales y en ausencia de ruido, se obtienen las siguientes secuencias:

| $n$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $o_1[n]$ | $+0.1$ | $-0.3$ | $+0.3$ | $-0.3$ | $-0.1$ | $-0.1$ | $+0.3$ | $+0.1$ |

| $n$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $o_2[n]$ | $+0.1$ | $-0.3$ | $+0.7$ | $-0.7$ | $+0.3$ | $-0.1$ | $+0.3$ | $-0.3$ |

Asuma que en medidas anteriores, se ha determinado que el canal causal $p[n]$ que da lugar a la secuencia de salida $o_1[n]$ tiene una duración de dos muestras ($K = 1$) y que el canal que da lugar a la secuencia de salida $o_2[n]$ tiene duración tres muestras ($K = 2$).

a) Obtenga para cada uno de los canales las constelaciones recibidas y determine para cada uno de los símbolos recibidos el conjunto de símbolos que los originaron en transmisión.

b) Si en ambos canales se decidiera utilizar un detector sin memoria, con retardo nulo, determine cual de los dos canales tiene peores prestaciones calculando para cada uno de ellos la probabilidad de error.

c) Obtenga los canales discretos equivalentes $p_1[n]$ y $p_2[n]$ que originan las dos secuencias recibidas.

d) Obtenga la probabilidad de error para ambos canales si se decide emplear un detector ML de secuencia[3]. Si no tenemos restricciones de complejidad en el receptor, ¿en cuál de los dos canales será más fiable la transmisión?

e) Obtenga la secuencia que con mayor probabilidad fue transmitida en el caso del canal $p_2[n]$ si se recibe:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_2[n]$ | $-0.5$ | $-0.2$ | $-0.3$ | $-0.7$ | $-0.5$ | $-0.2$ | $+0.5$ | $+0.1$ |

cuando $A[n] = +1$ para $n < 0$ y para $n > 5$.

10. Un sistema de comunicaciones en banda base utiliza como filtro transmisor un pulso causal de duración $T$ segundos y normalizado en amplitud, y una constelación 2-PAM, para transmitir sobre un canal lineal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, con $N_0 = 0.02$ y la siguiente respuesta el impulso

$$h(t) = \delta(t) - 4 \cdot \delta\left(t - \frac{3T}{2}\right) + \frac{5}{2} \cdot \delta\left(t - 2T\right).$$

a) Calcule el canal discreto equivalente, $p[n]$ si en el receptor se utiliza un pulso adaptado al filtro transmisor.

b) En lo sucesivo, considere que el canal discreto equivalente es

$$p[n] = \delta[n] - 2 \cdot \delta[n-1] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-2].$$

Calcule la probabilidad de error que se tiene con el mejor detector símbolo a símbolo sin memoria.

c) Diseñe un igualador lineal de 3 coeficientes con el criterio forzador de ceros (ZF), considerando un retardo en las decisiones $d = 1$[4].

d) Diseñe un igualador lineal de 3 coeficientes y retardo $d = 3$ con el criterio de mínimo error cuadrático medio (MMSE)[2].

e) Si los coeficientes del igualador son

$$w[0] = -0.2,\ w[1] = -0.6,\ w[2] = -0.1,$$

estime el retardo óptimo para la decisión, y calcule la probabilidad de error que se tiene en este caso.

[3] Para el canal $p_2[n]$ puede suponer que la secuencia $A[n] = +1$, $\forall n$, tiene asociado un suceso erróneo con distancia euclídea mínima.

[4] No es necesario que resuelva el sistema de ecuaciones, pero ha de proporcionar los valores numéricos de todos y cada uno de los términos incluidos en el sistema.

ALGUNAS RELACIONES DE INTERÉS

Inversa de una matriz de tamaño $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{con } D = a \cdot d - b \cdot c$$

Para $|a| \geq |b|$, y $n$ entero, se tienen las siguientes integrales definidas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a \pm b \cdot \cos(n \cdot \omega)} d\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left(a \pm b \cdot \cos(n \cdot \omega)\right)^2} d\omega = \frac{2\pi a}{\sqrt{\left(a^2 - b^2\right)^3}}$$