

TEMA 4

MODULACIONES ANGULARES: MODULACIONES DE FASE Y DE FRECUENCIA

Índice

- Modulaciones de fase (lineales)
 - Modulación por desplazamiento de fase (PSK)
 - Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)
- Modulaciones no lineales
 - Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)
 - Modulaciones MSK
 - Modulaciones de fase continua (CPM)

Modulaciones de fase

- Modulación PSK

$$A[n] = \sqrt{E_s} \cdot e^{j\phi[n]}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E_s} \cdot \mathcal{R}e \left\{ \sum_n g(t - nT) \cdot e^{j(\omega_c t + \phi[n])} \right\} \\ &= \sqrt{2E_s} \cdot \sum_n g(t - nT) \cdot \cos(\omega_c t + \phi[n]) \end{aligned}$$

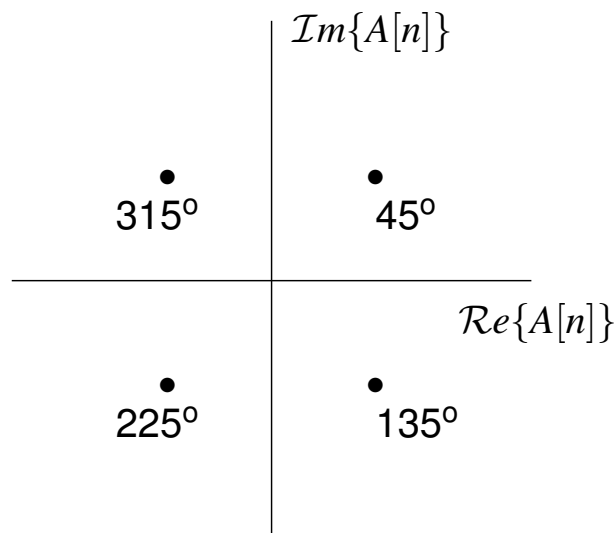
- Modulación de envolvente constante

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot w_T(t), \quad w_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Inconveniente: ancho de banda elevado (saltos de fase: $\pm 90^\circ$, 180°)

$$S_s(j\omega) = E_s \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right)$$

Modulación QPSK - PSK para $M = 4$ - Constelación



- $\phi[n] = 45^\circ: A[n] = +1 + j$
- $\phi[n] = 135^\circ: A[n] = +1 - j$
- $\phi[n] = 225^\circ: A[n] = -1 - j$
- $\phi[n] = 315^\circ: A[n] = -1 + j$

Saltos de fase en señal QPSK

- Señal PSK

$$\begin{aligned}x(t) &= \sqrt{2} \cdot s_I(t) \cdot \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} \cdot s_Q(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t) \\ &= \sqrt{2E_s} \cdot \sum_n g(t - nT) \cdot \cos(\omega_c t + \phi[n])\end{aligned}$$

siendo

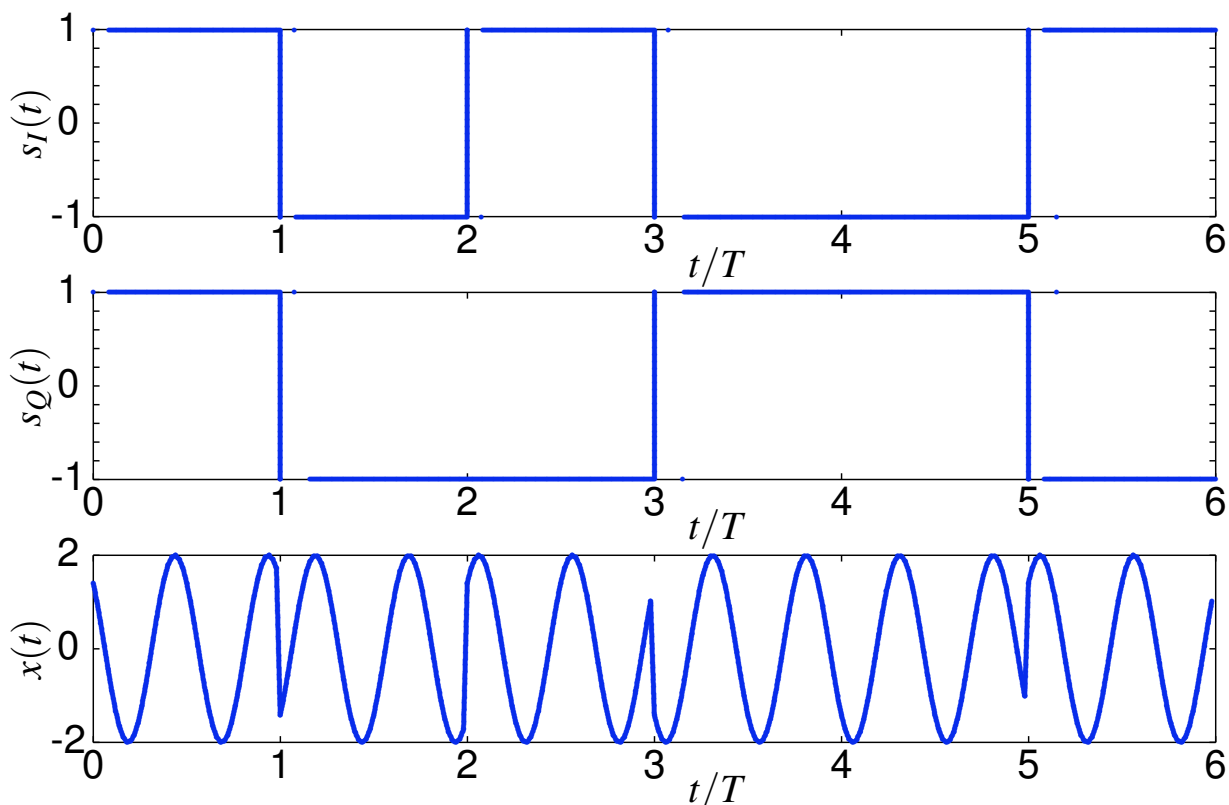
$$s_I(t) = \sum_n \text{Re}\{A[n]\} \cdot g(t - nT)$$

$$s_Q(t) = \sum_n \text{Im}\{A[n]\} \cdot g(t - nT)$$

- Saltos de fase

- $\pm 90^\circ$: cambia $s_I(t)$ o $s_Q(t)$
- 180° : cambian $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ simultáneamente

Modulación QPSK - Formas de onda



Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)

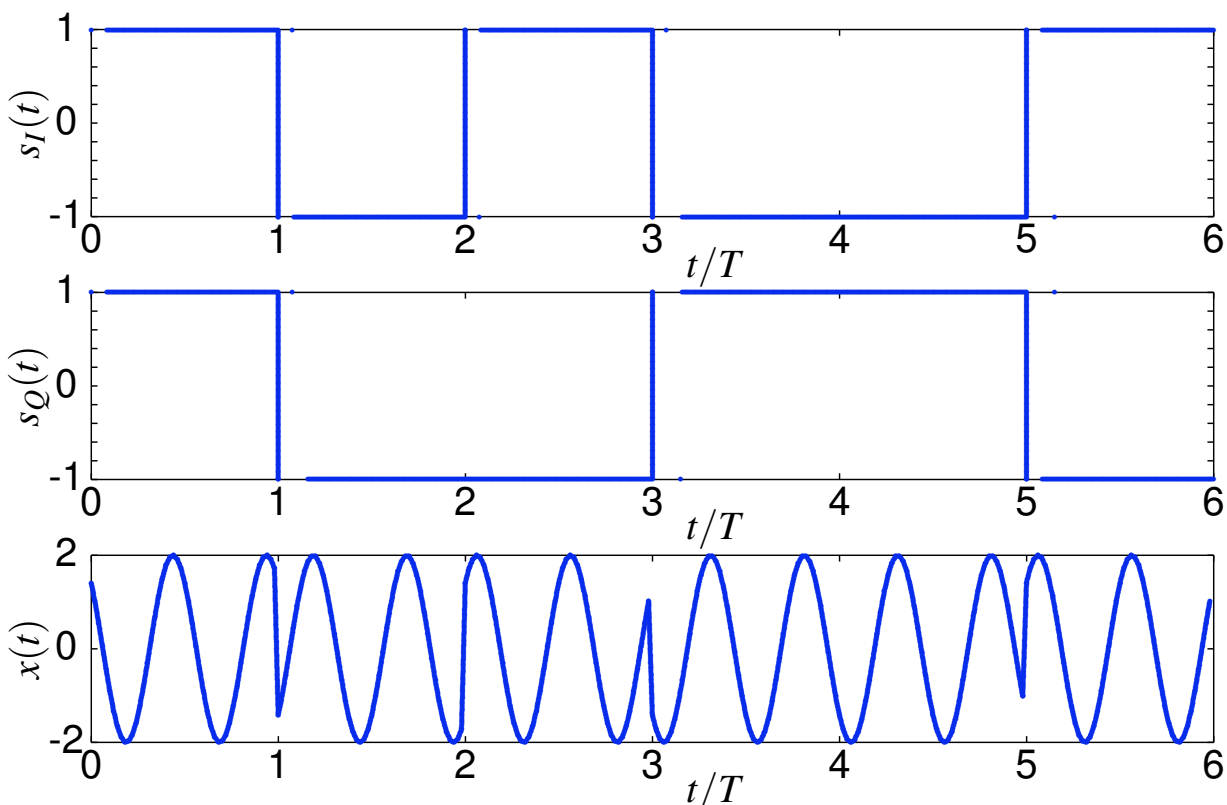
- Se eliminan los saltos de 180°
 - Evitar que coincidan las transiciones de $s_I(t)$ y $s_Q(t)$
- Señal OQPSK
 - Se retarda la componente en cuadratura $T/2$
 - Saltos sólo de $\pm 90^\circ$
 - Saltos más frecuentes (cada $T/2$)

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot s_I(t) \cdot \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} \cdot s_Q(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

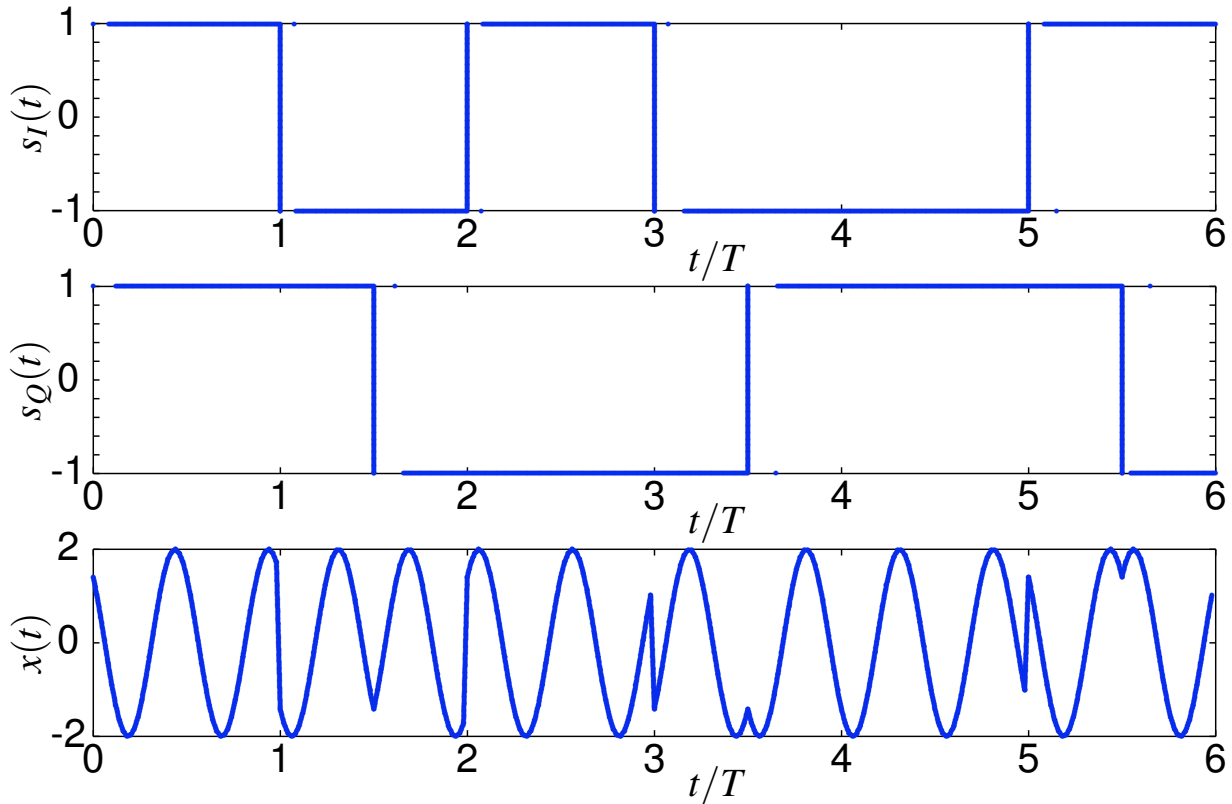
$$s_I(t) = \sum_n \operatorname{Re}\{A[n]\} \cdot g(t - nT)$$

$$s_Q(t) = \sum_n \operatorname{Im}\{A[n]\} \cdot g(t - nT - T/2)$$

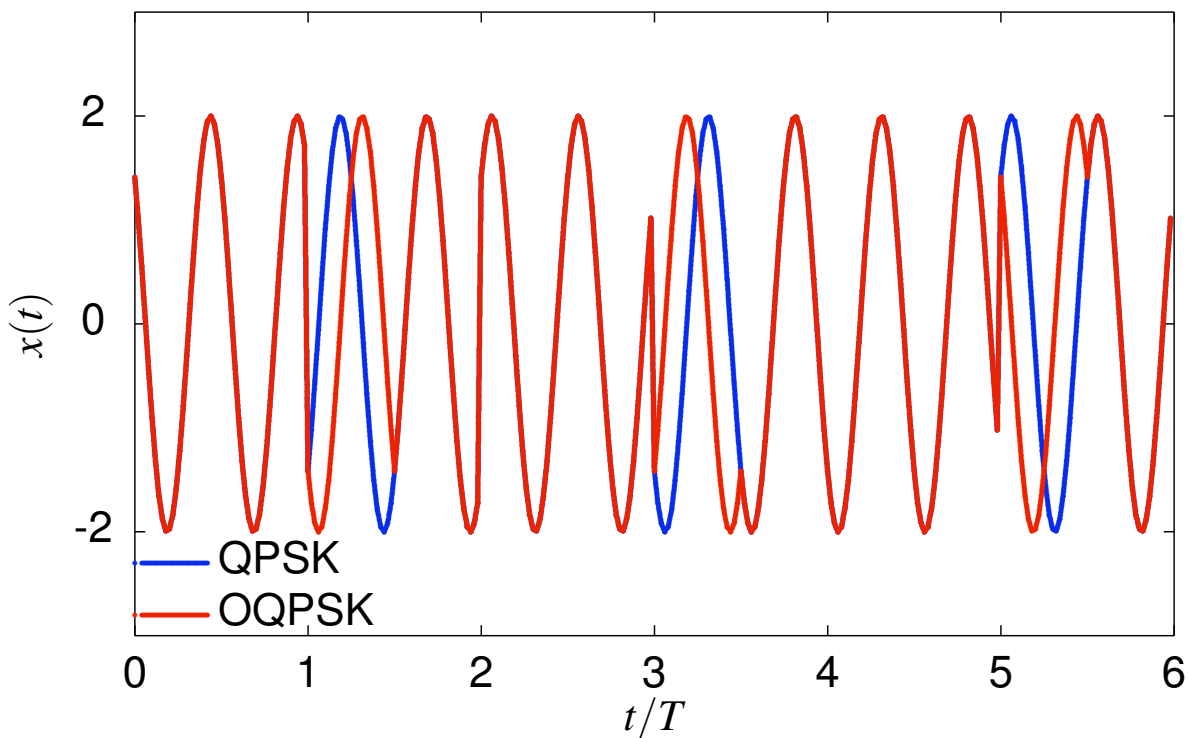
Modulación QPSK - Formas de onda



Modulación OQPSK - Retardo de $s_Q(t)$



Modulación QPSK vs OQPSK



Espectro de la señal OQPSK

- Definición

$$x_I(t) = \sqrt{2} \cdot s_I(t) \cdot \cos(\omega_c t), \quad x_Q(t) = \sqrt{2} \cdot s_Q(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

- Espectro de cada componente ($s_k, k \in \{I, Q\}$)

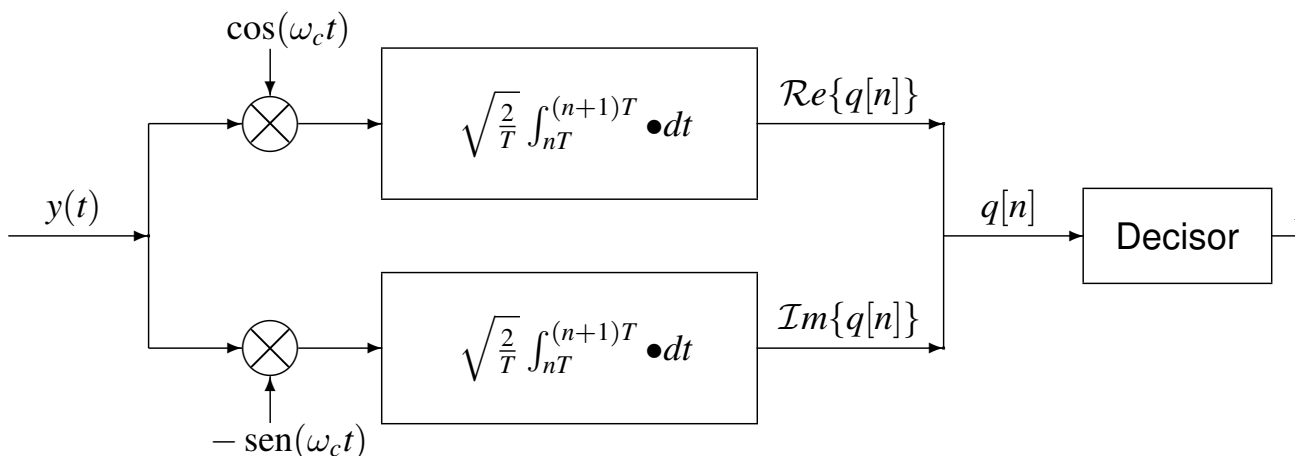
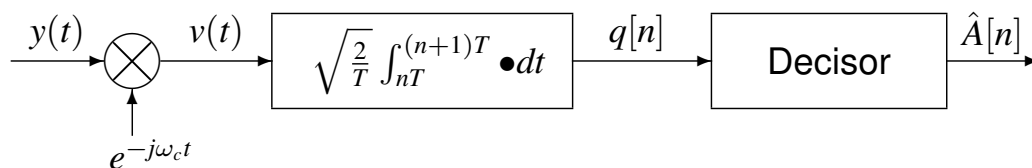
$$S_{s_k}(j\omega) = \frac{1}{2} [S_{s_k}(j\omega - j\omega_c) + S_{s_k}^*(-j\omega - j\omega_c)]$$

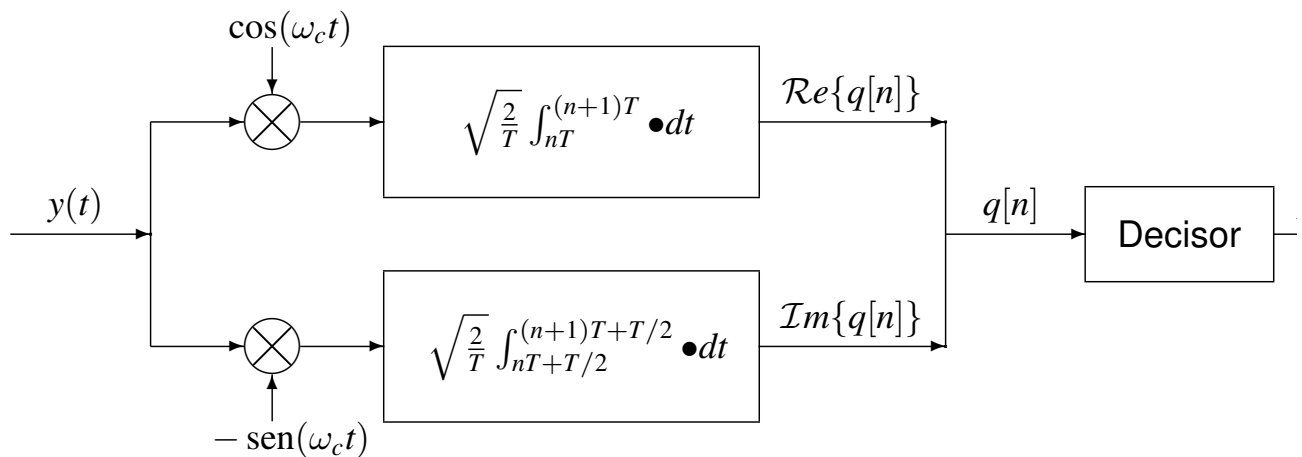
$$S_{s_I}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\text{Re}\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2, \quad S_{s_Q}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\text{Im}\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2$$

- Espectro OQPSK

$$S_x(j\omega) = \frac{E_s}{2T} [|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(-j\omega - j\omega_c)|^2]$$

Receptores para modulaciones de fase PSK





Modulaciones de fase diferencial

- No precisan de una demodulación coherente
- PSK con codificación diferencial de la fase de símbolos

$$\phi[n] = \phi[n-1] + \Delta_\phi[n]$$

- Codificador para modulación M -aria

$$\Delta_\phi[n] \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \dots, \frac{2\pi(M-1)}{M} \right\}$$

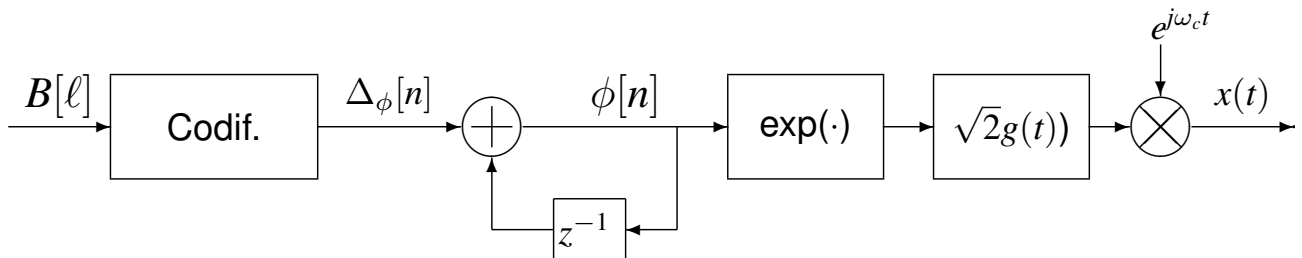
- Inicialización

$$\phi[-1] = 0$$

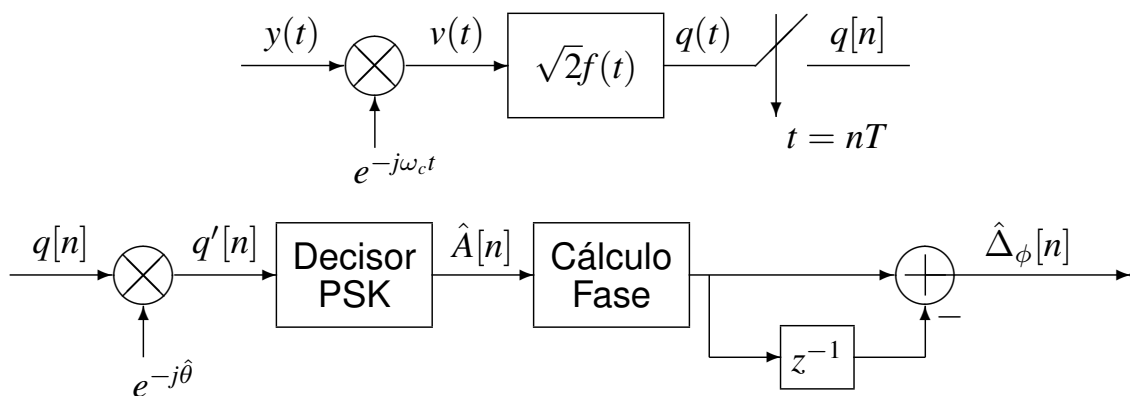
- No hay propagación de errores
- Probabilidad de error

$$P_e \approx 2 \cdot P_e^{PSK}$$

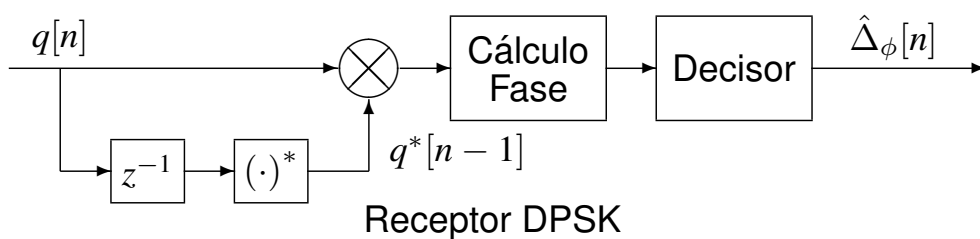
Modulador PSK (Diferencial)



Demodulador PSK (Diferencial)



Receptor Coherente



Receptor DPSK

- Observación

$$q[n] = \sqrt{E_s} \cdot e^{j(\phi[n]+\theta)} + z[n]$$

$$q^*[n-1] = \sqrt{E_s} \cdot e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} + z^*[n-1]$$

- Multiplicador

$$\begin{aligned} q[n] \cdot q^*[n-1] &= E_s \cdot e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])} + \sqrt{E_s} \cdot e^{j(\phi[n]+\theta)} \cdot z^*[n-1] \\ &\quad + \sqrt{E_s} \cdot e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} \cdot z[n] + z[n] \cdot z^*[n-1] \end{aligned}$$

- Decisión

$$\hat{\Delta}_\phi[n] = \angle\{q[n] \cdot q^*[n-1]\}$$

Probabilidad de error para DPSK

- Estadístico para la decisión

$$\begin{aligned} \frac{q[n] \cdot q^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} &= \sqrt{E_s} \cdot e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])} \\ &\quad + e^{j(\phi[n]+\theta)} \cdot z^*[n-1] \\ &\quad + e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} \cdot z[n] + \frac{z[n] \cdot z^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} \end{aligned}$$

- Términos de ruido (tres)

- El último es despreciable para E_s/σ_z^2 alto
- Los otros dos: independientes, circularmente simétricos

- Relación señal a ruido: pérdida de 3 dB

- Señal: E_s
- Ruido: $2\sigma_z^2$

Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- M pulsos

$$g_i(t) = \text{sen}(\omega_i t) \cdot w_T(t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1$$

- Codificador

$$A[n] \in \{i = 0, 1, \dots, M - 1\}$$

- Señal FSK

$$x(t) = K \cdot \sum_n g_{A[n]}(t - nT)$$

- FSK de fase continua (CPFSK)

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T} \cdot N_i, \quad N_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, \dots, M - 1$$

- Ancho de banda mínimo: N_i consecutivos

CPFSK ortogonal

- Pulsos CPFSK ortogonales

$$\begin{aligned} \langle g_i(t), g_\ell(t) \rangle &= \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cdot \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \underbrace{\cos((\omega_i - \omega_\ell) \cdot t)}_{(N_i - N_\ell) \frac{2\pi}{T}} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \underbrace{\cos((\omega_i + \omega_\ell) \cdot t)}_{(N_i + N_\ell) \frac{2\pi}{T}} dt \\ &= \frac{T}{2} \cdot \delta[i - \ell] \end{aligned}$$

- Funciones base ortonormales

$$\phi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen}(\omega_i t) \cdot w_T(t)$$

- Señal CPFSK

$$x(t) = \sqrt{E_s} \cdot \sum_n \phi_{A[n]}(t - nT)$$

Espectro de la señal FSK

- Espectro discreto

$$S_{xd}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{(MT)^2} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \cdot \sum_k \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right)$$

- Espectro continuo

$$S_{xc}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{MT} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} |G_i(j\omega)|^2 - \frac{1}{M} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \right\}$$

- Espectro de la señal FSK

$$S_x(j\omega) = S_{xc}(j\omega) + S_{xd}(j\omega)$$

Receptores para FSK

- Receptor coherente con filtros adaptados o correladores

$$P_e = Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right)$$

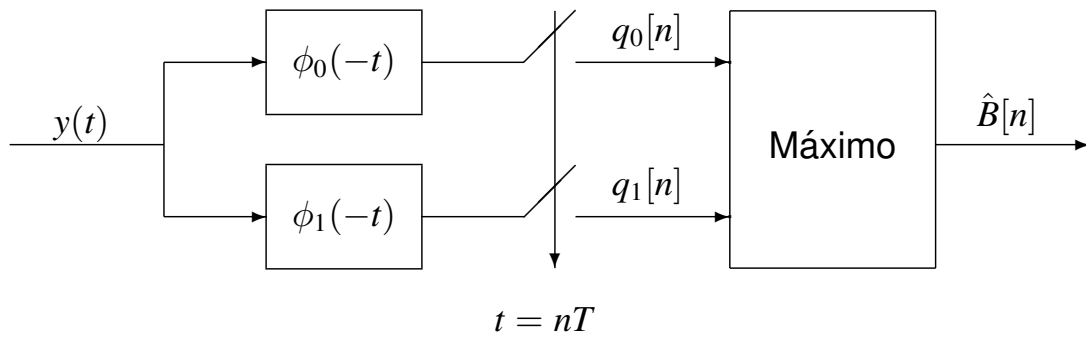
- Efecto de los errores de fase - Ejemplo: $n = 0$, $A[n] = i$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen}(\omega_i t + \theta) \cdot w_T(t)$$

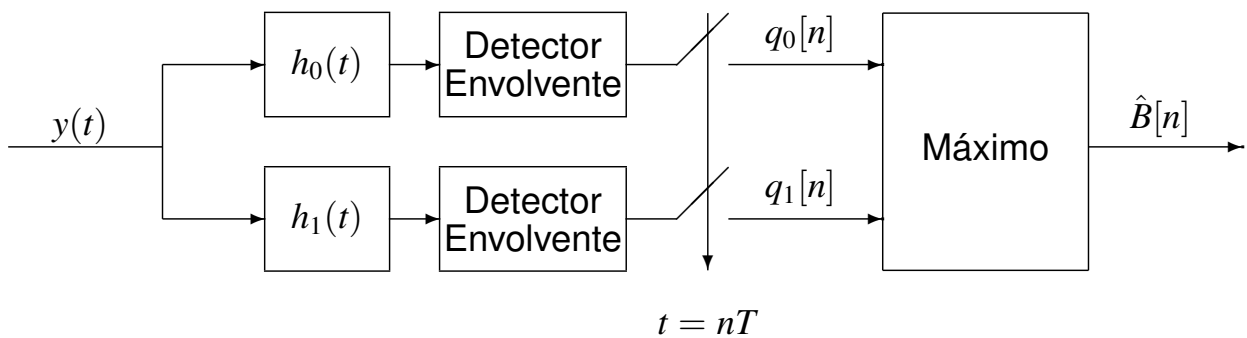
$$\begin{aligned} q_\ell[0] &= \int_0^T y(t) \cdot \phi_\ell(t) dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen}(\omega_i t + \theta) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{\sqrt{E_s}}{T} \int_0^T [\cos((\omega_i - \omega_\ell)t + \theta) - \cos(\omega_i + \omega_\ell)t + \theta)] dt \\ &= \sqrt{E_s} \cdot \cos(\theta) \cdot \delta[i - \ell]. \end{aligned}$$

- Factor de atenuación: $\cos(\theta)$

Receptor coherente FSK binaria

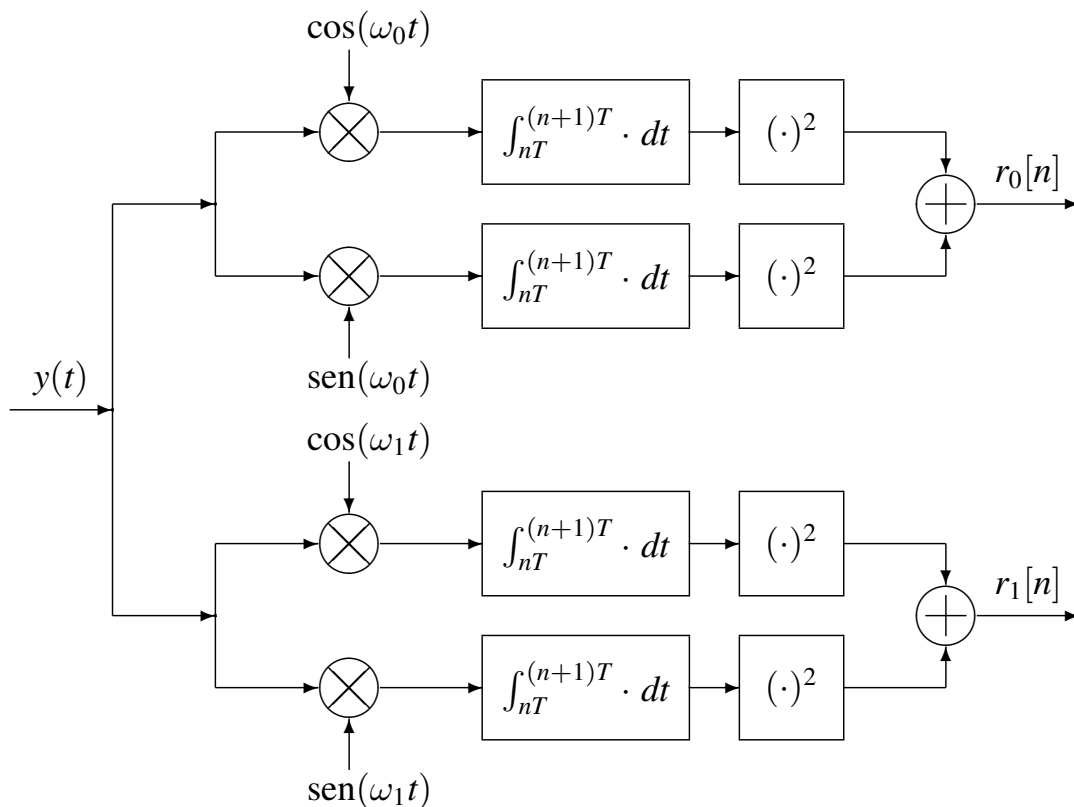


Receptor Coherente



Receptor Incoherente

Receptor incoherente para FSK (ley cuadrática)



FSK como desplazamiento en frecuencia

- Definición de frecuencia central

$$\omega_c = \frac{\omega_0 + \omega_{M-1}}{2} = \frac{\pi}{T} \cdot K, \quad K \in \mathbb{Z}, \quad K \text{ impar}$$

- Valor de la frecuencia central: $\omega_c = \frac{\pi}{T} \cdot \text{impar}$
- Frecuencias de los pulsos

$$\omega_c + I[n] \cdot \frac{\pi}{T}$$

- Codificador

$$I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

- Expresión analítica FSK como salto desde ω_c

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \cdot \frac{\pi t}{T} \right) \cdot w_T(t - nT)$$

Modulación MSK

- Información: cambios en la frecuencia de una portadora (una frecuencia en cada intervalo de símbolo)
- Portadoras ortogonales con mínima separación en frecuencia
- Producto escalar de pulsos $g_i(t)$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_\ell \rangle &= \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cdot \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i - \omega_\ell) \cdot t] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i + \omega_\ell) \cdot t] dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(\omega_i - \omega_\ell) \cdot T]}{(\omega_i - \omega_\ell)} - \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(\omega_i + \omega_\ell) \cdot T]}{(\omega_i + \omega_\ell)} \end{aligned}$$

- Separación mínima (sistemas de banda estrecha)

- Aproximación: $\frac{\text{sen}[(\omega_i + \omega_\ell) \cdot T]}{(\omega_i + \omega_\ell)}$ despreciable (denominador grande)

$$\omega_i - \omega_\ell = \frac{\pi}{T} \cdot N_{i,\ell}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M-1, \quad i \neq \ell$$

Modulación MSK (II)

- Señal MSK

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{2T} + \theta[n] \right) \cdot w_T(t - nT)$$

- Codificador

- Símbolos

$$I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

- Memoria (para conseguir continuidad de fase)

$$\theta[m] = \theta[m-1] + \frac{\pi m}{2} \cdot (I[m-1] - I[m]), \quad \text{mod } 2\pi$$

Espectro MSK

- Expresión alternativa para MSK

$$x(t) = \sqrt{2E_s} \cos(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} I[n] \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT) \\ + \sqrt{2E_s} \text{sen}(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT + T)$$

- Similar a OQPSK

- Nuevos símbolos
 - Pulso:

$$g(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \text{sen} \left(\frac{\pi t}{2T} \right) \cdot w_{2T}(t), \quad |G(j\omega)|^2 = 16T\pi^2 \left(\frac{\cos(\omega T)}{\pi^2 - 4\omega^2 T^2} \right)^2$$

- Espectro MSK

$$S_x(j\omega) = 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega - \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega - \omega_c)^2 T^2} \right)^2 + 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega + \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega + \omega_c)^2 T^2} \right)^2$$

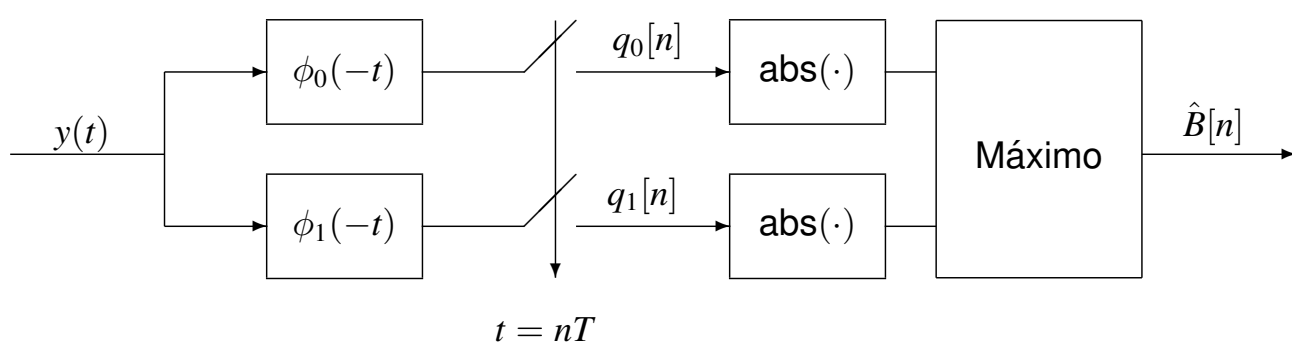
Receptores para MSK

- Demodulador basado en el receptor ML para FSK
- Demodulador basado en el ML para OQPSK
- Probabilidad de error

$$P_e = 2 \cdot Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right)$$

- No se tiene en cuenta la memoria del sistema
- Demodulador óptimo más complejo

Receptor para MSK binaria



Modulaciones de fase continua (CPM)

- Familia que incluye a la CPFSK y MSK
 - Envolvente constante
 - Continuidad de la fase de la portadora
 - Reducción del ancho de banda: suavizado de la evolución de la fase
- Señal CPM: expresión analítica en el dominio del tiempo

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen} [\omega_c t + \theta_0 + \theta(t, \mathbf{I})]$$

- \mathbf{I} : Secuencia de símbolos transmitidos
- ω_c : frecuencia nominal de la portadora
- θ_0 : fase inicial de la portadora
- E_s : energía transmitida durante un período de símbolo

Generación de la señal CPM

- Codificador: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$
- Señal PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n I[n] \cdot g(t - nT)$$

- Pulso $g(t)$ causal, de duración T y normalizado

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \frac{1}{2}$$

- Señal CPM: frecuencia instantánea $\omega_c + 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot s(t)$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$

- ω_d : desviación de frecuencia de pico

Expresión analítica de una CPM

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \text{sen} \left[\omega_c t + \theta_0 + 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot \int_{-\infty}^t \sum_n I[n] \cdot g(\tau - nT) d\tau \right]$$

- Fase $\theta(t, \mathbf{I})$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \theta[n] + \theta(t, n)$$

- $\theta[n]$: fase acumulada hasta $t = nT$:
 - Debida a símbolos transmitidos ya finalizados (hasta $I[n-1]$)

$$\theta[n] = \omega_d \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m]$$

- $\theta(t, n)$: fase incremental a partir de $t = nT$:
 - Debida sólo al símbolo actual, $I[n]$

$$\theta(t, n) = 2 \cdot \omega_d \cdot T \cdot I[n] \cdot q_g(t - nT), \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

Expresión CPM - Índice de modulación

- Expresión alternativa en el dominio del tiempo introduciendo un parámetro diferente (que sustituye a la desviación de frecuencia de pico)
- Definición del índice de modulación h

$$h = \omega_d \cdot \frac{T}{\pi}$$

- Fase en el intervalo de símbolo asociado a $I[n]$:
 - $\theta[n]$: fase acumulada hasta $t = nT$:

$$\theta[n] = \pi \cdot h \cdot \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m]$$

- $\theta(t, n)$: fase incremental a partir de $t = nT$:

$$\theta(t, n) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot I[n] \cdot q_g(t - nT)$$

Identificación de CPFSK binaria

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \cdot \frac{\pi t}{T} \right) \cdot w_T(t - nT)$$

- CPFSK binaria como CPM: $\omega_d = \frac{\pi}{T}$, $h = 1$
- Considerando $\theta[0] = 0$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] + 2\pi \cdot I[n] \cdot \frac{(t - nT)}{2T} = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n \cdot \pi \cdot I[n] + \frac{\pi t}{T} \cdot I[n]$$

- La expresión $\pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n \cdot \pi \cdot I[n] = K \cdot 2\pi$
- La fase $\theta(t, \mathbf{I})$ es, en módulo 2π

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \frac{\pi t}{T} \cdot I[n] = \pm \frac{\pi t}{T}$$

Identificación MSK

- Señal MSK

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \cdot \frac{\pi t}{2T} + \theta[n] \right) \cdot w_T(t - nT)$$

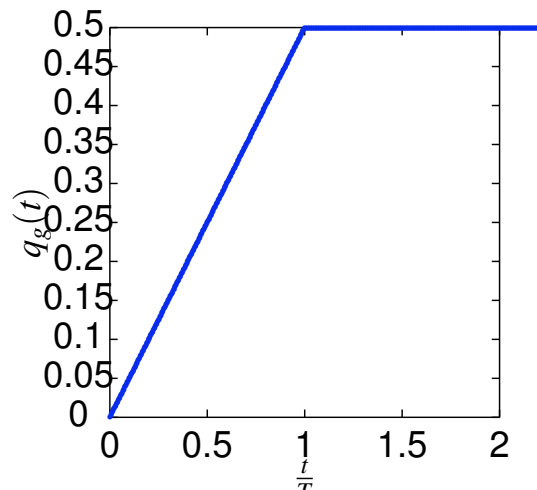
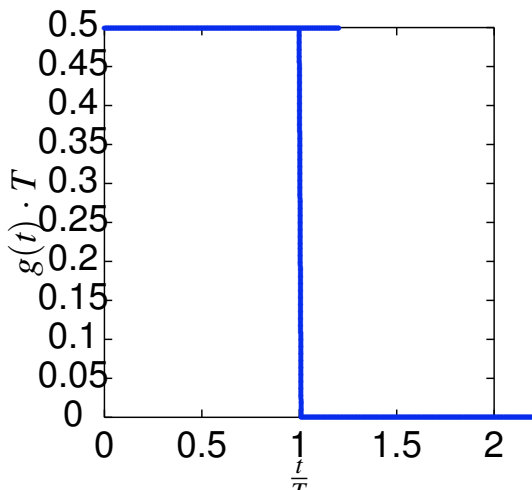
- Identificación como CPM

$$\omega_d = \frac{\pi}{2T}, \quad h = \frac{1}{2}$$

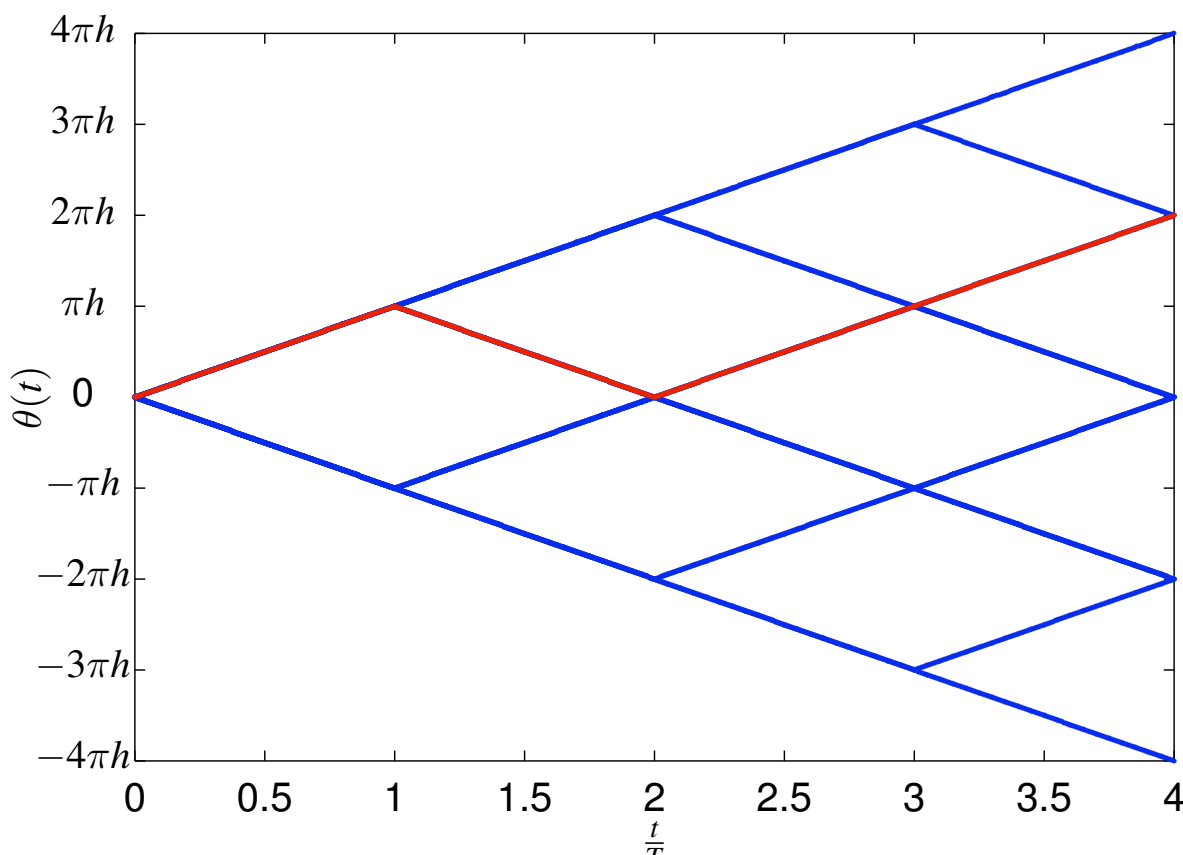
Modulaciones CPM - Árbol de fases

- Dibujo de las posibles evoluciones de la fase a partir de una fase inicial
- Transiciones en un intervalo de símbolo basadas en la integral de $g(t)$
- Ejemplo: pulso rectangular

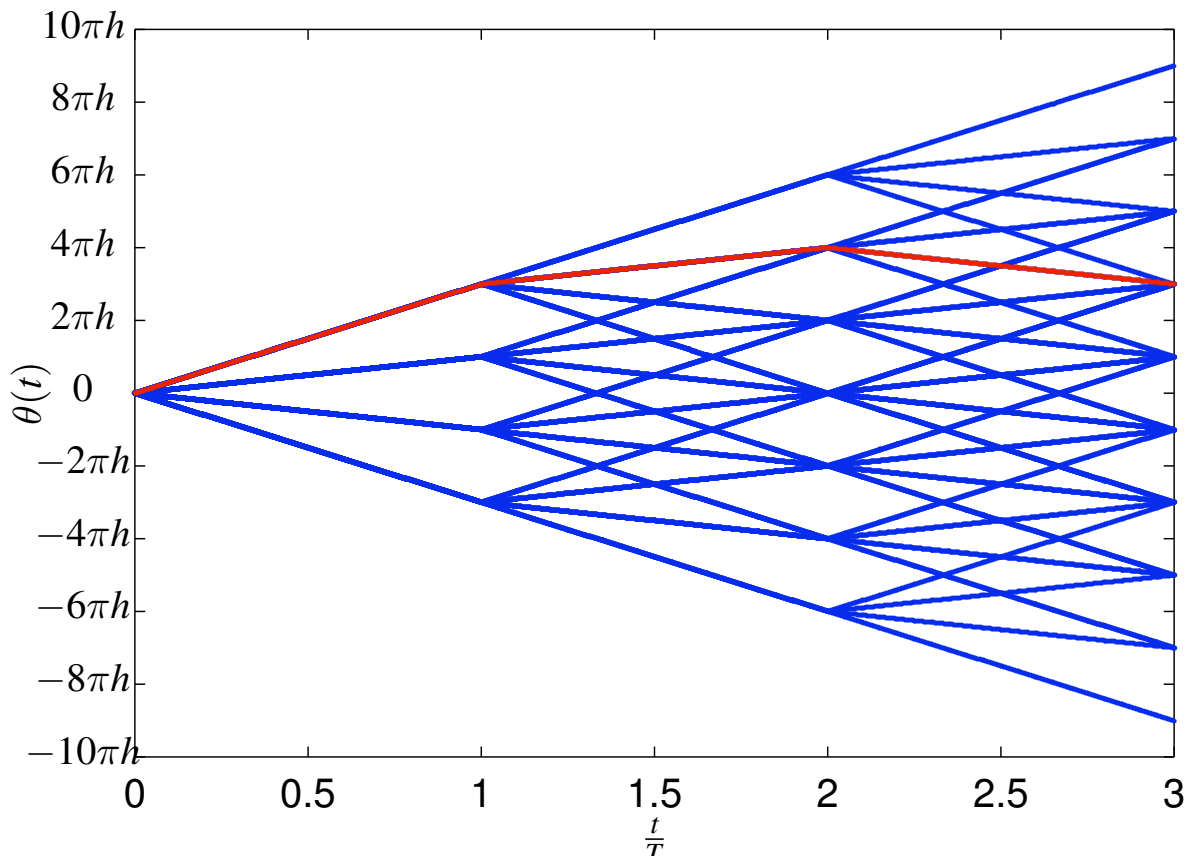
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2T}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Modulaciones CPM - Árbol de fases - binario



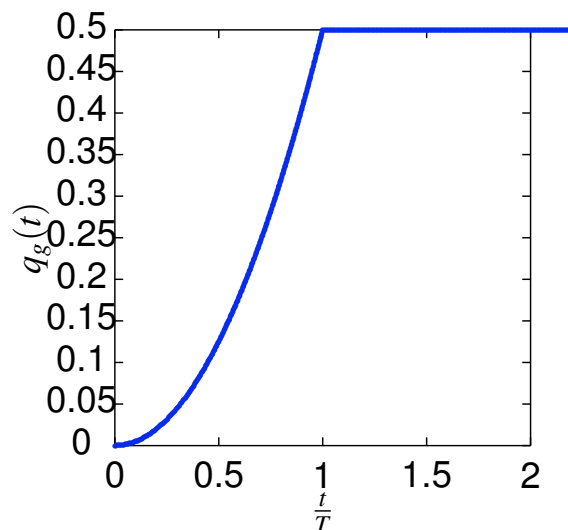
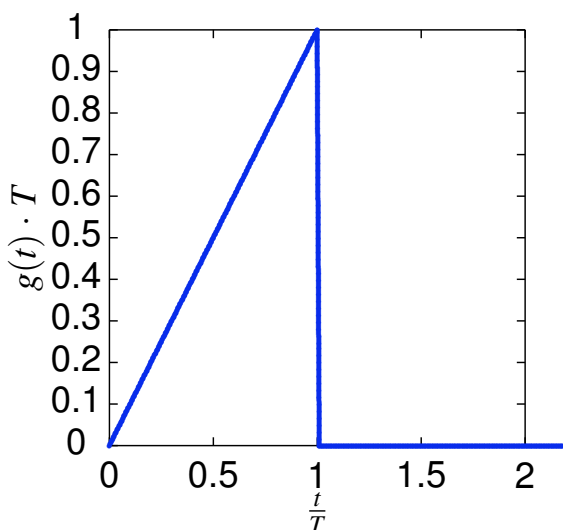
Modulaciones CPM - Árbol de fases - 4-ario



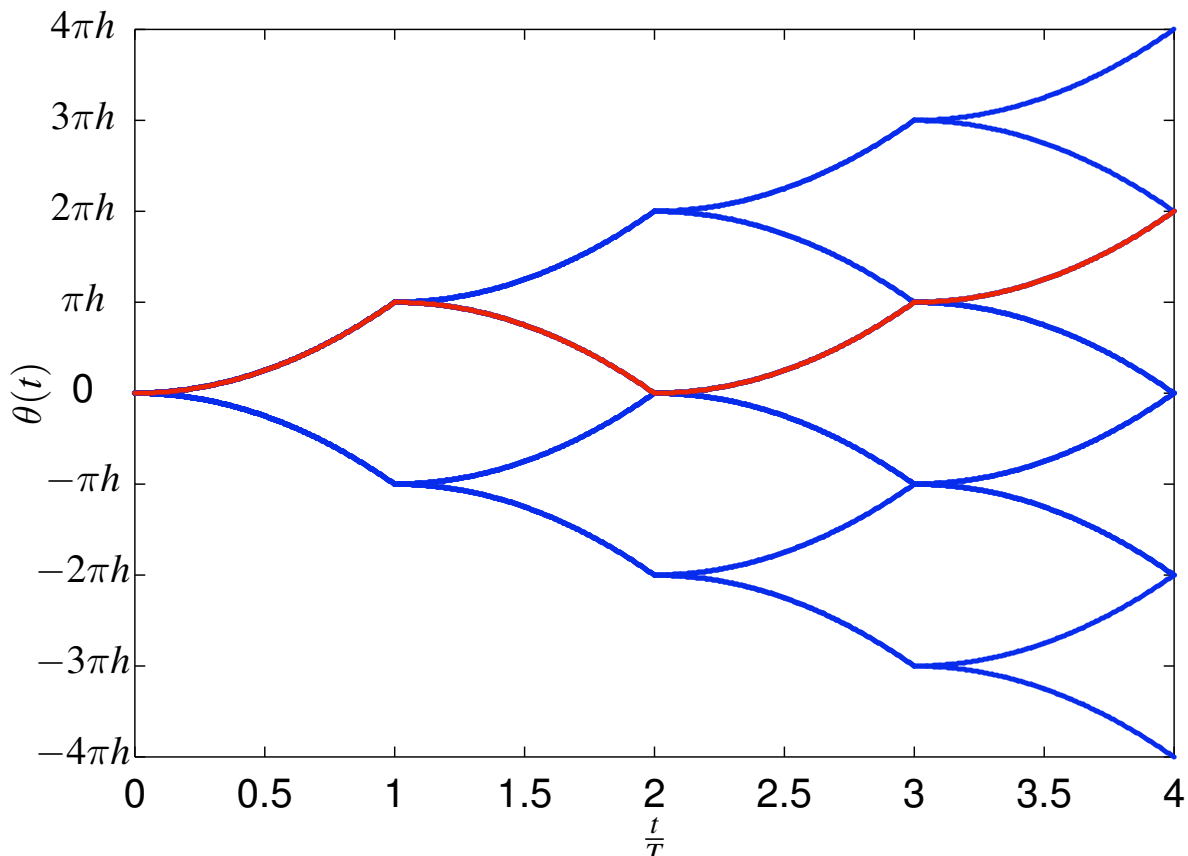
Modulaciones CPM - Árbol de fases

- Ejemplo: pulso triangular

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{T^2}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2T^2}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



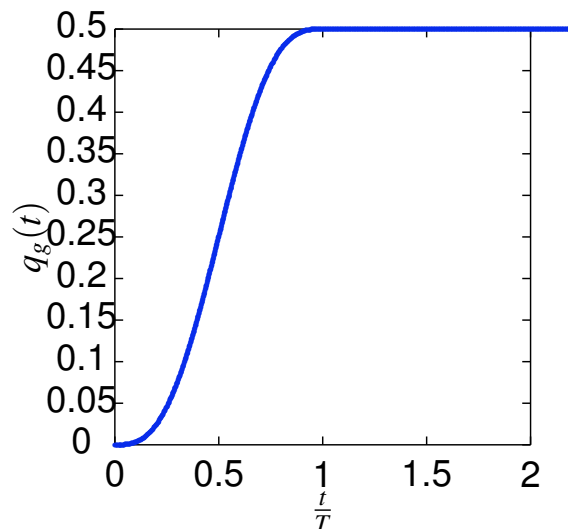
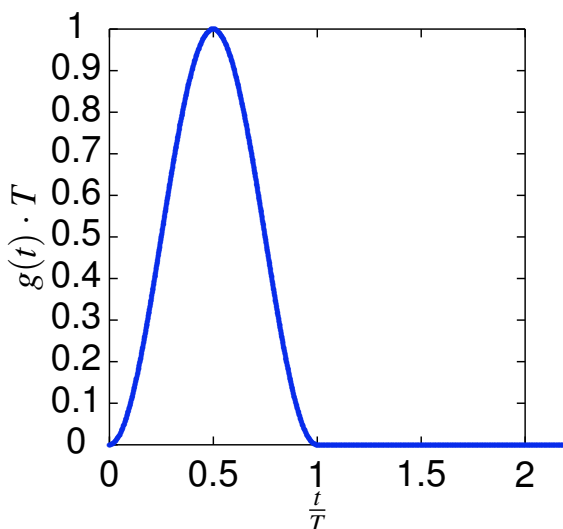
Modulaciones CPM - Árbol de fases - binario



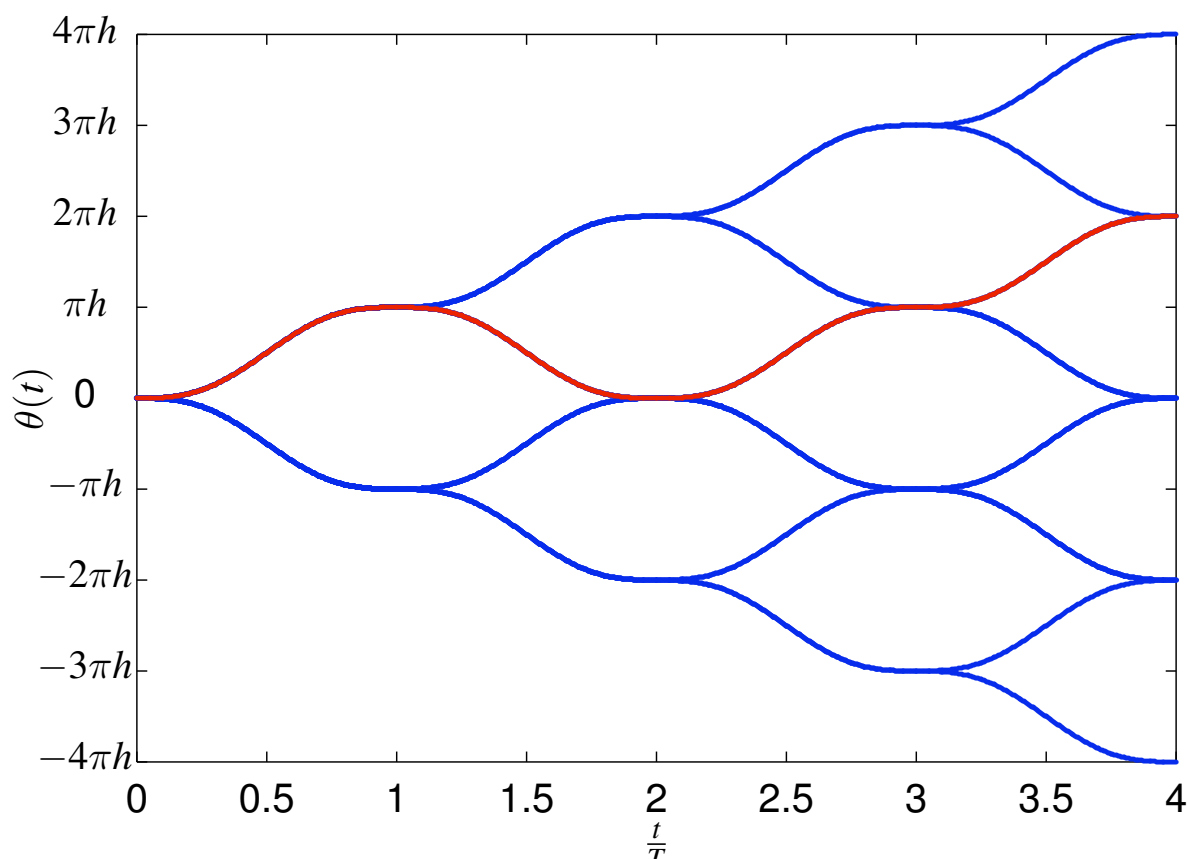
Modulaciones CPM - Árbol de fases

- Ejemplo: pulso en coseno alzado ($L = 1$)

$$g(t) = \frac{1}{2T} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right] w_T(t), \quad q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right], & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Modulaciones CPM - Árbol de fases - binario



CPM de respuesta parcial

- El pulso $g(t)$ dura L períodos de símbolo ($L > 1$)
- La fase $\theta(t, \mathbf{I})$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$ es ahora

$$\begin{aligned}\theta(t, \mathbf{I}) &= 2\pi h \sum_{m=-\infty}^n I[m] \cdot q_g(t - mT) \\ &= \theta[n] + \theta(t, n)\end{aligned}$$

- $\theta[n]$: fase acumulada hasta nT debida a los pulsos que han finalizado

$$\theta[n] = \pi \cdot h \sum_{m=-\infty}^{n-L} I[m]$$

- $\theta(t, n)$: contribución de los pulsos que no han finalizado

$$\theta(t, n) = 2\pi \cdot h \sum_{m=n-L+1}^n I[m] \cdot q_g(t - mT)$$

Pulsos para CPM de fase parcial

- Pulsos en coseno alzado

$$g(t) = \frac{1}{2LT} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{LT} \right) \right] \cdot w_{LT}(t)$$

- Suavizan las transiciones de fase
- Gaussian MSK (GMSK)

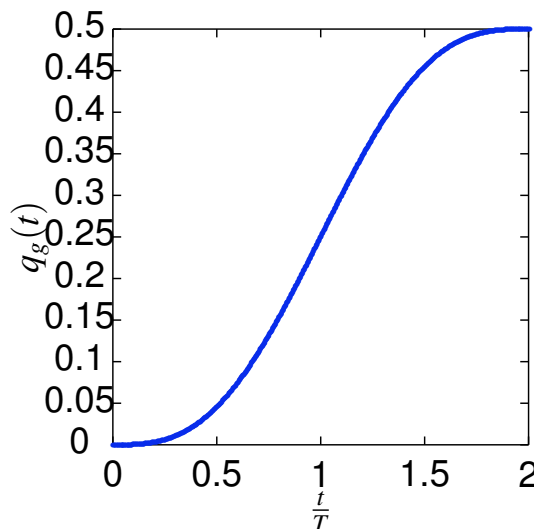
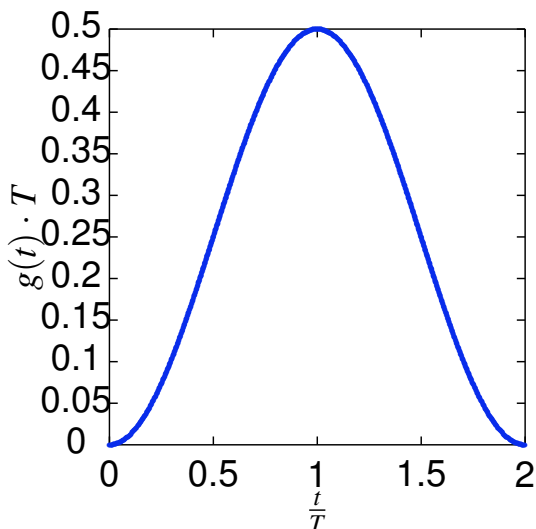
$$g(t) = \frac{1}{2T} \left[Q \left(\frac{2\pi\beta(t - T/2)}{\sqrt{\ln 2}} \right) - Q \left(\frac{2\pi\beta(t + T/2)}{\sqrt{\ln 2}} \right) \right]$$

- Empleado en GSM ($\beta = 0,3$) y DECT ($\beta = 0,2$)
- Pulso rectangular filtrado con respuesta gaussiana

Modulaciones CPM - Árbol de fases

- Ejemplo: pulso en coseno alzado ($L = 2$)

$$g(t) = \frac{1}{4T} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{2T} \right) \right] w_{2T}(t), \quad q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4T} \left[t - \frac{2T}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{2T} \right) \right], & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Modulaciones CPM - Árbol de fases - binario

