Comunicaciones Digitales - Capítulo 6 - Ejercicios

1. La matriz generadora de un código bloque lineal $\mathcal{C}(4,8)$ es la que se presenta a continuación. Calcule la tasa del código, la distancia mínima y la tabla de síndromes.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Un código convolucional tiene la siguiente matriz generadora en polinomios en D

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & D & D+1 \\ D^2 & 1 & D^2+D+1 \end{bmatrix}.$$

   a) Obtenga la tasa del código.
   b) Dibuje la representación esquemática del código.
   c) Obtenga el diagrama de rejilla.
   d) Calcule la distancia mínima de Hamming, D_{min}, del código.

3. Suponga que se tiene un código convolucional de tasa 1/2 con matriz generadora

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} D^2+1 & D^2+D+1 \end{bmatrix}.$$

   El modulador utiliza una constelación 2-PAM (o BPSK) con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$, y la asignación binaria es $B[n] = 0$ para $A[n] = -1$ y $B[n] = 1$ para $A[n] = +1$. Decodifique, usando el algoritmo de Viterbi sobre salida dura y sobre salida blanda si se recibe la siguiente secuencia de observaciones a la salida del demodulador

$$\begin{array}{lcccccccc} q^{(0)}[\ell]: & +3.06 & -0.70 & -0.58 & -1.37 & -0.82 & -2.63 & -1.37 & -0.85 \\ q^{(1)}[\ell]: & +1.08 & -1.06 & -2.89 & +0.33 & +1.92 & -1.64 & -0.70 & +2.30 \end{array}$$

   Para la decodificación, asuma que el codificador convolucional se resetea con ceros antes de transmitir los bits de información, y que se vuelve a resetear transmitiendo una ccabecera cíclica de ceros de la longitud apropiada para cerrar el diagrama de rejilla en la decodificación.

   NOTA: Para decodificar sobre salida dura, primero es necesario obtener la decisión de bits dura sobre la secuencia recibida de observaciones blandas

4. Para un cierto sistema de comunicaciones se van a evaluar dos posibles códigos de canal: un código bloque lineal y un código convolucional.

   a) La matriz generadora del código bloque lineal es

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Obtenga la distancia mínima del código.
ii) Transforme la matriz $\boldsymbol{G}$ en una matriz sistemática $\boldsymbol{G}'$ que pueda utilizarse para obtener una matriz de chequeo de paridad que permita obtener la tabla de síndromes para este código.
iii) Obtenga la matriz de chequeo de paridad.
iv) Obtenga la tabla de síndromes del código.

b) El código convolucional viene dado por la siguiente matriz generadora

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} (1+D) & D & 1 & (1+D) \\ D & (1+D) & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Obtenga la representación esquemática del codificador.
ii) Dibuje el diagrama de rejilla.
iii) Obtenga la distancia mínima de Hamming del código, D_{min}.
iv) Obtenga, asumiendo que el estado inicial y el final es el estado cero, es decir, $\psi_0 = [0, 0, \cdots, 0]$, el mensaje decodificado cuando la secuencia recibida es

$$\boldsymbol{r} = [1011000110100110]\,.$$

5. Se van a considerar dos códigos de canal, un código bloque y un código convolucional.

a) El código bloque lineal tiene la siguiente matriz generadora

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a & 0 & b \\ c & d & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Obtenga los valores de a, b, c y d que permitan obtener máxima capacidad de detección y corrección.
ii) Obtenga la tabla de síndromes y decodifique las siguientes palabras recibidas

$$\boldsymbol{r}_0 = [10001],\ \boldsymbol{r}_1 = [10011],\ \boldsymbol{r}_2 = [11001]$$

b) El código convolucional tiene la siguiente matriz generadora

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1 + D + D^2,\ 1\right].$$

La información es transmitida con una modulación 4-QAM con la siguiente asignación binaria

Símbolo	$+1+j$	$-1-j$	$+1-j$	$-1+j$
Bits	11	00	10	01

i) Obtenga la representación esquemática del codificador y su diagrama de rejilla.
ii) Codifique la siguiente secuencia de bits $B^{(0)}[\ell] = [101100]$ asumiendo que el estado inicial y el final es el estado todo ceros, ψ_0. Dibuje el camino de la secuencia de salida sobre el diagrama de rejilla.

III) Obtenga el rendimiento del código si se trabaja con decodificación blanda y dura.

IV) Decodifique la siguiente secuencia de bits recibidos

$$\boldsymbol{r} = [101001010011],$$

asumiendo que $B^{(0)}[\ell] = 0$ para $\ell < 0$ y $\ell \geq 4$ (es decir, que el estado inicial y final es ψ_0).

6. Dos códigos bloque lineales están dados por las siguientes matrices generadoras:

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) ¿Son estos códigos sistemáticos?

b) Obtenga la capacidad de detección y corrección de errores de los códigos.

c) Escoja el mejor código de la sección previa, obtenga la tabla de síndromes y decodifique las siguientes palabras recibidas

$$\boldsymbol{r}_a = [01101] \text{ y } \boldsymbol{r}_b = [11111].$$

7. Un código convolucional tiene la siguiente matriz generadora:

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & D+1 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga la tasa del código y la representación esquemática del codificador.

b) Obtenga el diagrama de estados o el diagrama de rejilla y la distancia mínima del código.

c) Partiendo del estado cero, codifique la siguiente secuencia de entrada al codificador 11011000.

d) Determine si la secuencia de bits 110010111000 es una posible palabra perteneciente al código. Asuma cualquier posible estado inicial.

e) Simplificamos el código anterior usando la matriz generadora[1]:

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} D & D+1 \end{bmatrix}$$

Asumiendo que partimos y finalizamos en el estado cero, decodifique la secuencia recibida

$$\boldsymbol{r} = [10001111011011].$$

[1] Tenga en cuenta que el nuevo código es una simplificación del anterior donde se eliminan la primera entrada y la primera salida

8. Para su uso en un sistema de comunicaciones digital, se definen tres códigos de canal, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$. Cada uno de ellos tiene cómo palabras código el conjunto que se indica a continuación

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{01, 10\}\\ \mathcal{C}_2 &= \{00000, 01010\}\\ \mathcal{C}_3 &= \{00000, 10100, 01111, 11011\}\end{aligned}$$

   a) Obtenga para cada uno de los códigos los parámetros k, n, la tasa de codificación y la distancia mínima.

   b) Determine qué códigos son lineales y obtenga para ellos su matriz generadora.

   c) Determine qué códigos son sistemáticos.

   d) ¿Se podrían mejorar las prestaciones de $\mathcal{C}_2$ sin modificar sus parámetros k, n? ¿De qué manera?

   e) Si se recibe la palabra $\boldsymbol{r} = [11111]$ obtenga la palabra que pertenece al código que con más probabilidad fue transmitida. Explique el procedimiento por el que obtiene la palabra del código más probable.

9. Se pretende implementar un sistema de comunicaciones protegido frente a errores mediante un código de tasa 1/2, y se tienen 2 posibilidades:

   - Un código bloque lineal con la siguiente matriz generadora

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   - Un código convolucional con la siguiente matriz generadora:

$$\boldsymbol{G}(D) = [D,\ 1 + D + D^2].$$

   En ambos casos, después del codificador se utiliza una modulación 2-PAM (o BPSK) con distancia entre símbolos d_{min}^{BPSK}.

   a) Obtenga el conjunto de palabras codificadas del código bloque, su matriz de chequeo de paridad y la distancia mínima.

   b) Calcule la probabilidad de error del sistema con el codificador bloque si emplea decisiones duras. Obtenga dicha probabilidad de error en función de la distancia mínima del código y la distancia de la constelación BPSK d_{min}^{BPSK}.

   c) Obtenga el diagrama de rejilla del código convolucional.

   d) Calcule la probabilidad de error de un sistema compuesto por el codificador convolucional. Obtenga la probabilidad de error tanto con decisiones blandas como con decisiones duras asumiendo en este caso que $d_{min}^{BPSK} = 1$.

e) Calcule la secuencia transmitida con el código bloque para el mensaje $\boldsymbol{b} = [100110]$. Suponga que de los doce bits transmitidos se producen errores en los bits primero, sexto y noveno. Obtenga la secuencia de bits recuperada a la salida del decodificador.

f) Calcule la secuencia transmitida con el código convolucional para el mensaje $\boldsymbol{b} = [100]$. Asuma que a este mensaje, como es habitual, se le añade una secuencia de bits nulos, tanto anteriores como posteriores para conseguir que la transmisión comience y termine en el estado cero. Suponga que de los bits transmitidos se producen un error solo en el primer bit. Obtenga la secuencia de bits recuperada utilizando decodificación dura.

10. Un código convolucional tiene la siguiente matriz generadora

$$\boldsymbol{G}(D) = [1,\ 1+D,\ 1+D+D^2]$$

a) Obtenga la representación esquemática y el diagrama de rejilla del codificador.

b) ¿Es sistemático el código? Justifique su respuesta.

c) Se emplea el citado codificador sobre un canal binario simétrico recibiéndose la siguiente secuencia de bits:

$$\boldsymbol{r} = [111\ 111\ 110\ 011\ 001].$$

Asumiendo que tanto el estado inicial como el estado final son el estado cero, lo que se fuerza transmitiendo el número preciso de ceros, determine la secuencia transmitida más verosímil y el mensaje correspondiente.