Fundamentos de Teoría de la Señal

Máster Universitario en Internet de las Cosas:
Tecnologías Aplicadas

Capítulo 1

Señales y Sistemas

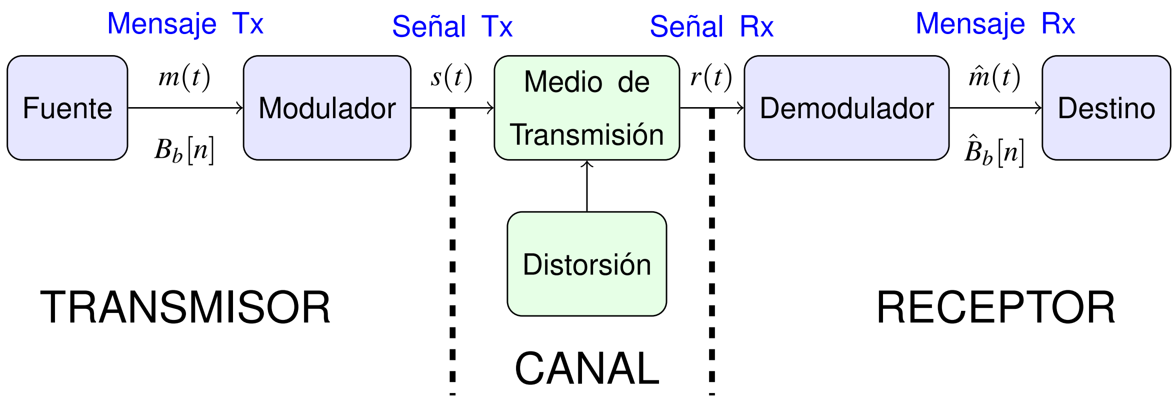
Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

Introducción

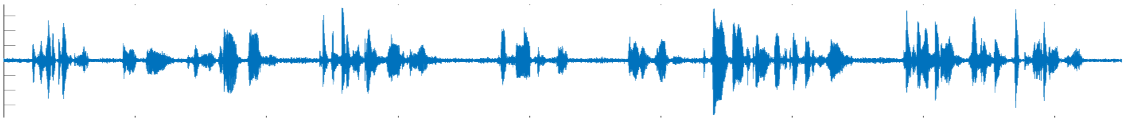
Sistema de Comunicaciones



- Objetivo: transmisión de información (mensaje)
  - Mensajes
    - Señales
  - Transmisor y receptor: transformación de señales
    - Sistemas
- Análisis y diseño de sistemas de comunicaciones
  - Análisis de señales y sistemas

Ejemplos de señales de información (mensajes)

- Señales de audio (señal eléctrica a la salida del micrófono)



RESERVOIR DOGS (Mr. White): *"If you get a customer, or an employee, who thinks he's Charles Bronson, take the butt of your gun and smash their nose in. Everybody jumps. He falls down screaming, blood squirts out of his nose, nobody says fucking shit after that."*

BLADE RUNNER (Roy Batty): *"I've seen things you people wouldn't believe: attack ships on fire off the shoulder of Orion. I watched C-beams glitter in the dark near the Tannhauser gate. All those moments will be lost in time, like tears in the rain... Time to die."*

- Señales digitales

$$B_b[n] = 0100110010001010010010100100100000011101010100101\cdots$$

$$B_b[n] = 110101010100101000010111100100101001010101001010 0\cdots$$

Señales

Señales

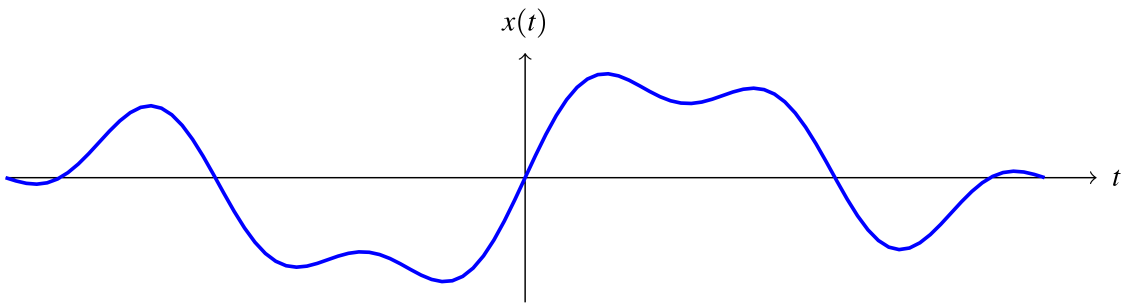
- Una señal es una función matemática
  - Variable independiente: tiempo
  - Variable dependiente: amplia variedad de fenómenos físicos
    - ⋆ Voltage, intensidad, presión acústica, fuerza, velocidad...
- Variable temporal: tiempo continuo y tiempo discreto
  - Tiempo continuo: $x(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$
    - ⋆ Ejemplos: la mayoría de magnitudes de sistemas físicos
  - Tiempo discreto: $x[n]$, $t \in \mathbb{Z}$
    - ⋆ Ejemplos: secuencias de datos en sistemas digitales de comunicaciones

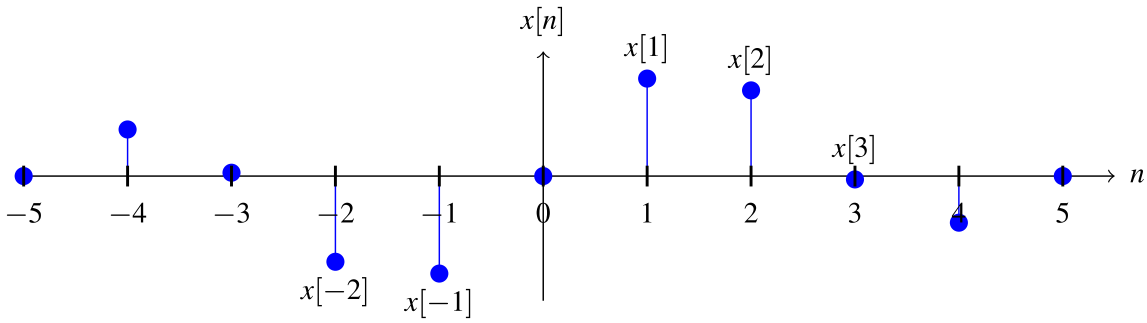
Secuencia de bits:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$B_b[n]$	1	1	0	1	0	1	0	0	$\cdots$

    - ⋆ Muestreo: muestras obtenidas de una señal en tiempo continuo

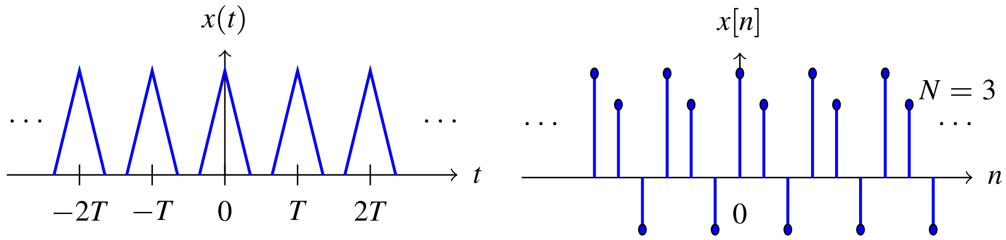
Ejemplos de señales (tiempo continuo y tiempo discreto)



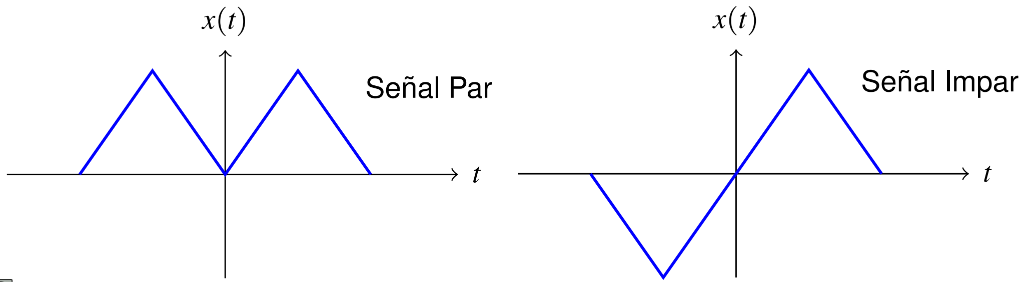


Algunos tipos de señales

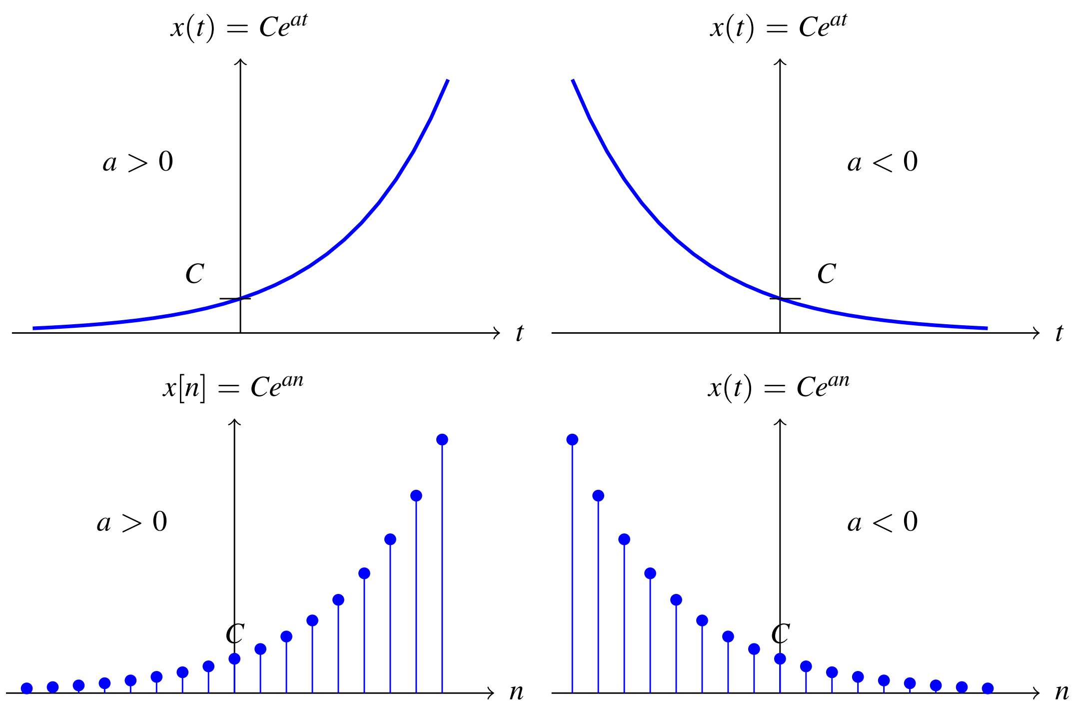
- Señales periódicas
  - $x(t+T) = x(t)$ (período T segundos)
  - $x[n+N] = x[n]$ (período N muestras o instantes)



- Señales pares e impares
  - Señal par: $x(-t) = x(t)$, $x[-n] = x[n]$
  - Señal impar: $x(-t) = -x(t)$, $x[-n] = -x[n]$

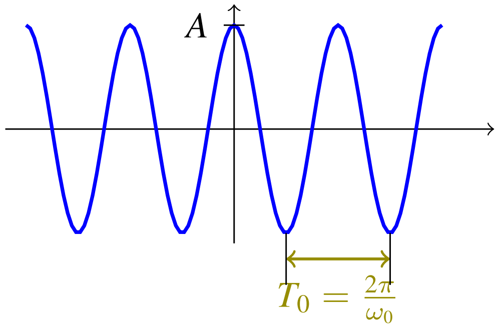


Señales exponenciales reales

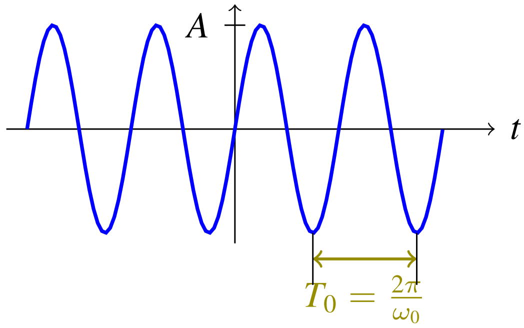


Señales senoidales y señal sinc

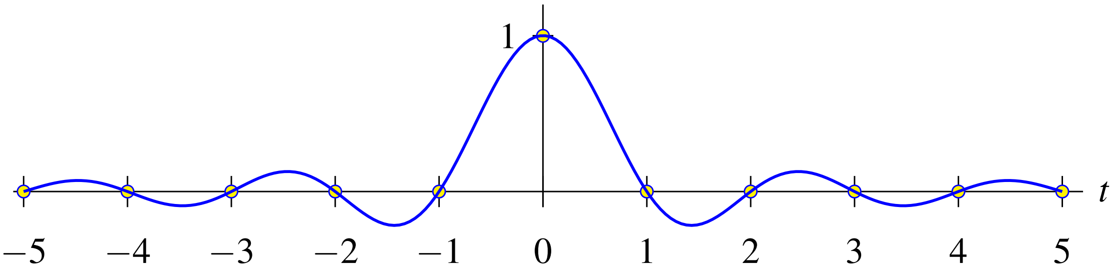
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t)$$



$$x(t) = A\sin(\omega_0 t)$$



$$x(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



Señales exponenciales complejas

- Exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\ \sin(\omega_0 t)$$

j : número imaginario $j = \sqrt{-1}$ (a veces se denota como i)

  - Exponencial compleja conjugada

$$x(t) = e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - j\ \sin(\omega_0 t)$$

- Fórmulas de Euler para señales senoidales

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

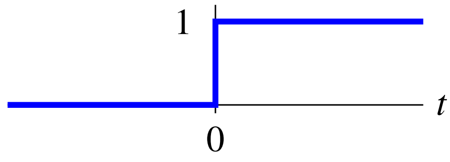
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

Señales escalón unitario e impulso unitario (delta)

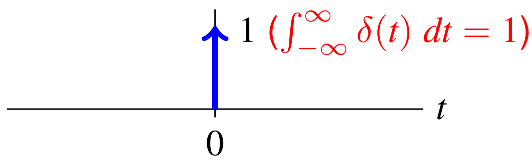
- En tiempo continuo

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau, \qquad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$x(t) = u(t)$



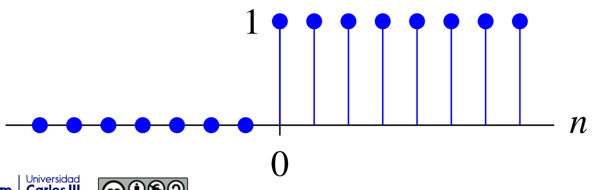
$x(t) = \delta(t)$



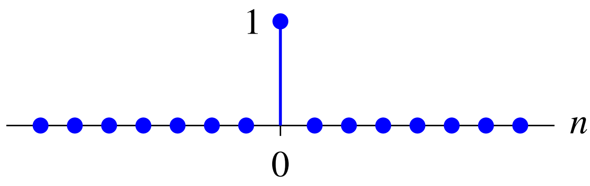
- En tiempo discreto

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m], \qquad \delta[n] = u[n] - u[n-1] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$x[n] = u[n]$

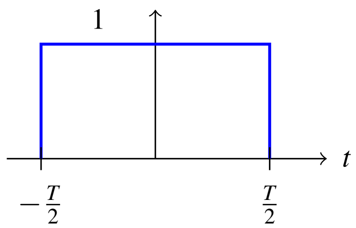


$x[n] = \delta[n]$



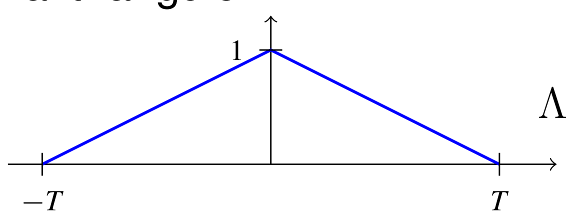
Señales rectángulo, triángulo y signo

- Señal rectángulo



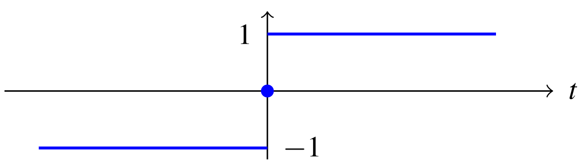
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

- Señal triángulo



$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

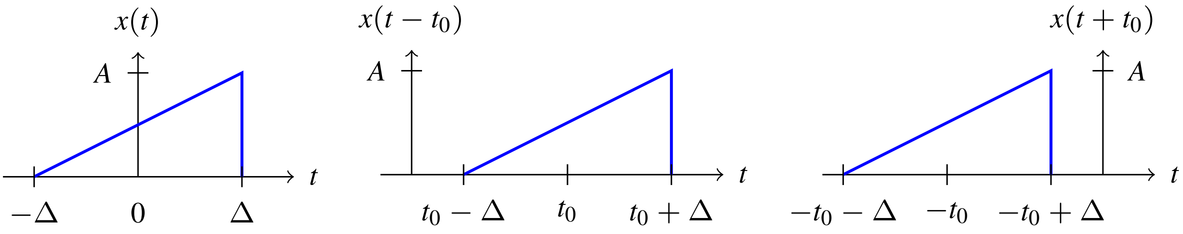
- Función signo



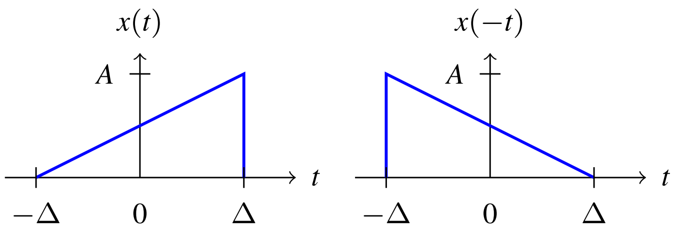
$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Operaciones básicas sobre señales

- Deplazamiento temporal
  - $x(t \pm t_0)$, con $t_0 > 0$
    - $x(t - t_0)$: la señal está retrasada t_0 s
    - $x(t + t_0)$: la señal está adelantada t_0 s.

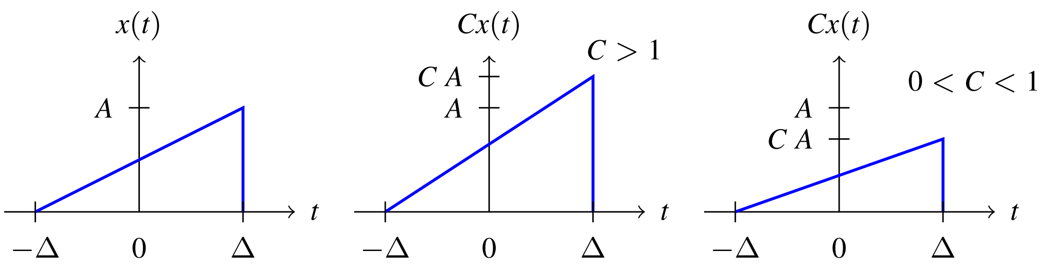


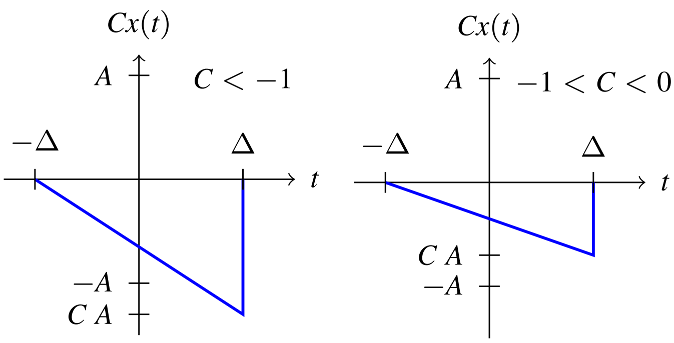
- Reflexión o abatimiento
  - $x(-t)$ (reflexión o abatimiento sobre $t = 0$)



Operaciones básicas sobre señales

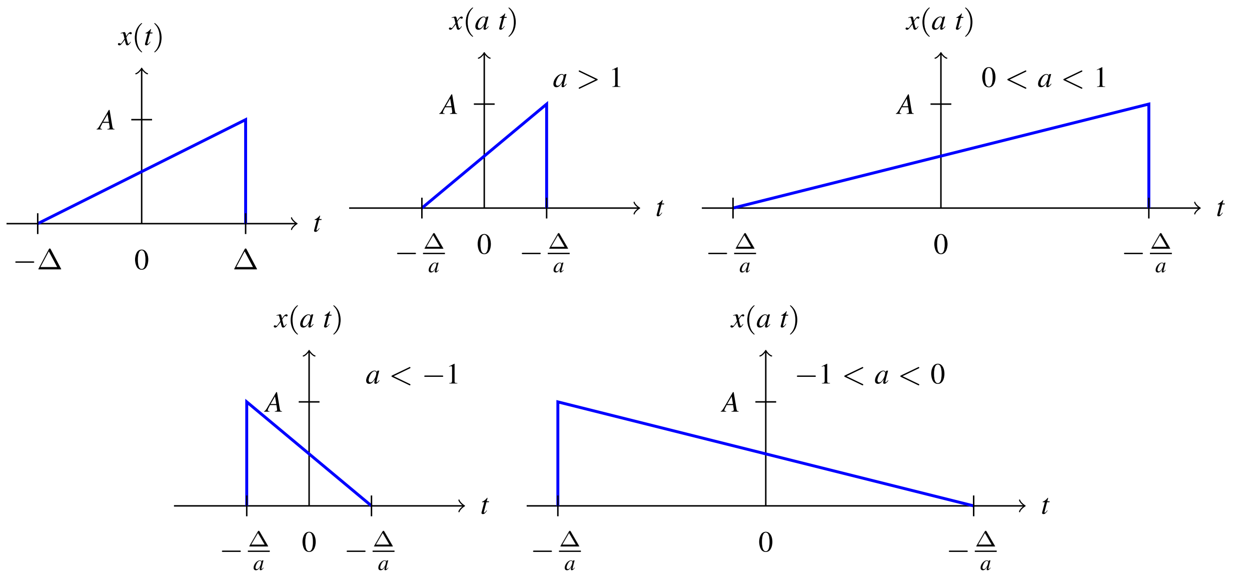
- Escalado
  - $Cx(t)$ (se escala la amplitud por un factor C)
  - Si $|C| > 1$ se amplifica, si $|C| < 1$ se atenua
  - Si $C < 0$ se invierte





Operaciones básicas sobre señales

- Escalado temporal
  - $x(a\,t)$
    - $|a| > 1$ comprime la señal en el eje temporal
    - $|a| < 1$ expande la señal en el eje temporal
    - $a < 0$ abate la señal



Convolución entre dos señales

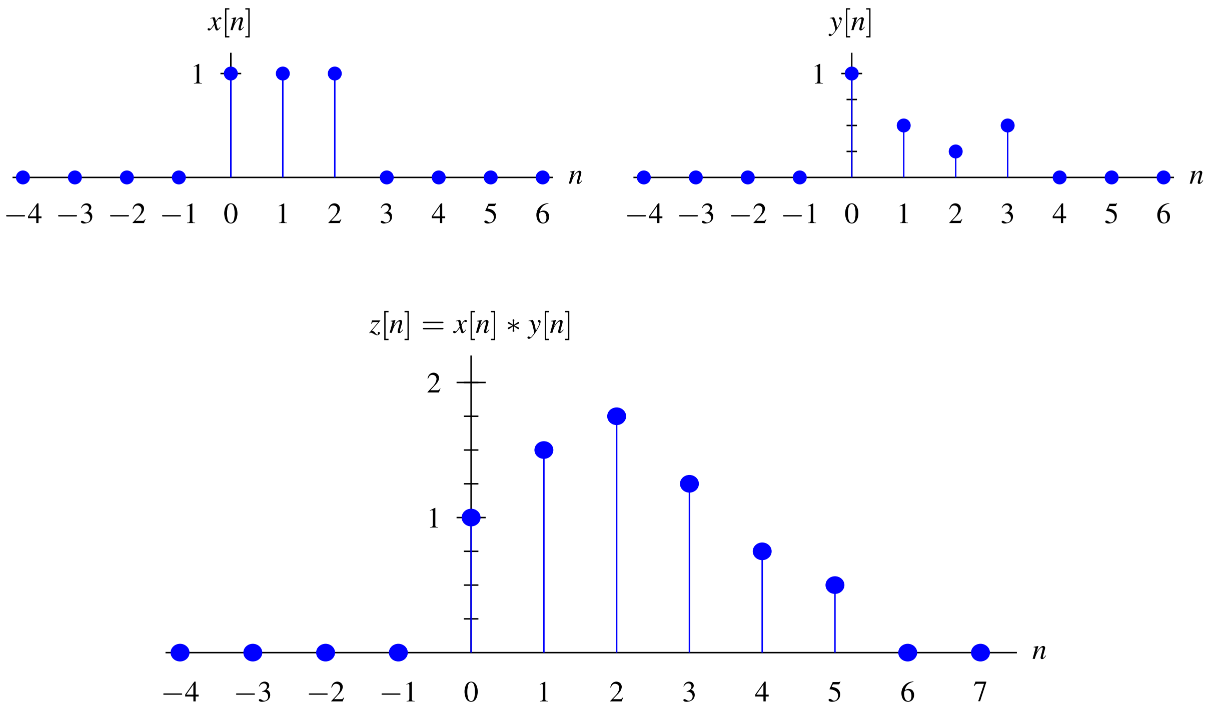
- Operación básica en el análisis de señales y sistemas

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

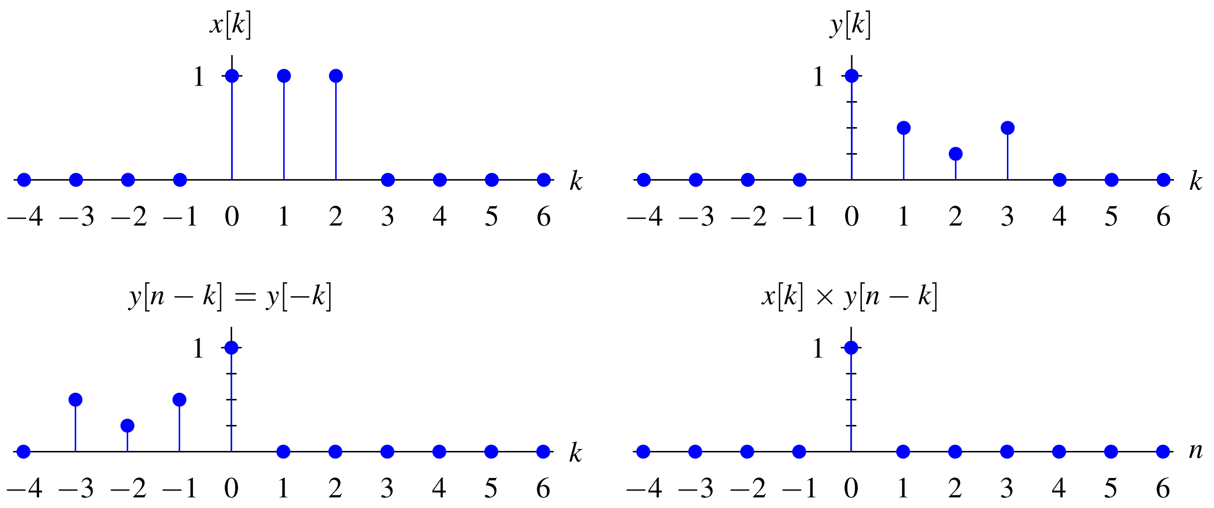
$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]$$

- Convolución en un instante $t = t_0$: Interpretación gráfica
  - $y(t_0 - \tau) = y(-(\tau - t_0))$
    - Con respecto a la variable de integración, τ, es la señal $y(\tau)$ abatida y retardada t_0 segundos
  - Cálculo del valor de la convolución en $t = t_0$
    - Se abate una señal
    - La misma señal se retarda t_0 segundos
    - Se calcula la integral del producto entre la otra señal y esa señal abatida y retardada

Convolución - Ejemplo



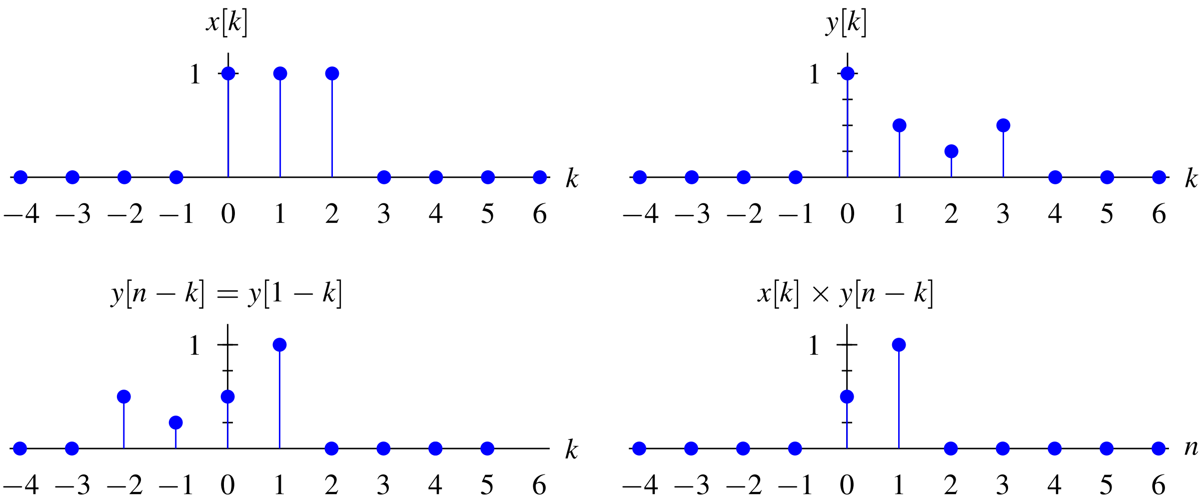
Convolución - Ejemplo ($n = 0$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\, y[n-k]$$

$$z[0] = 1 \times 1 = 1$$

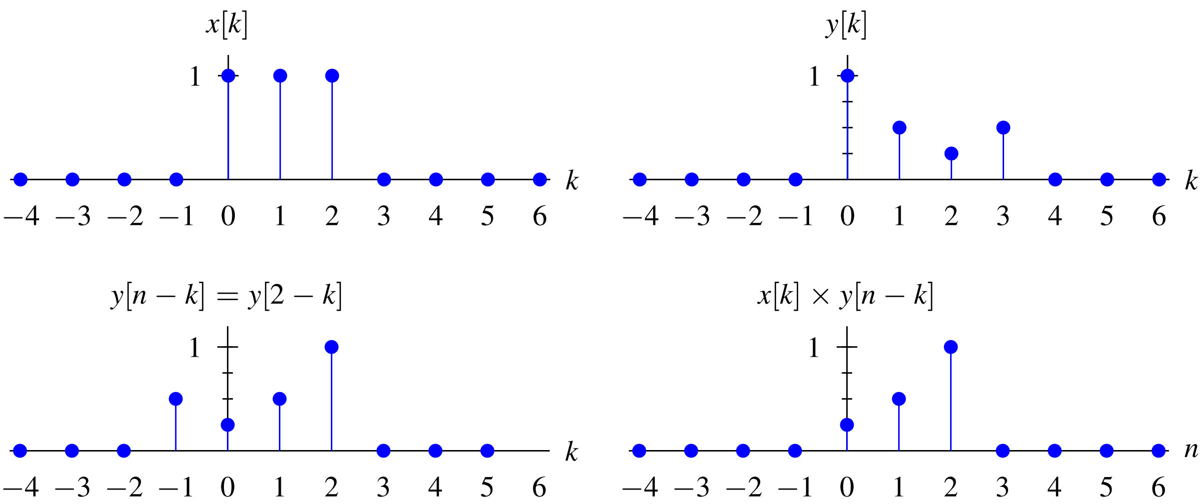
Convolución - Ejemplo ($n = 1$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\, y[n-k]$$

$$z[1] = 1 \times 0{,}5 + 1 \times 1 = 1{,}5$$

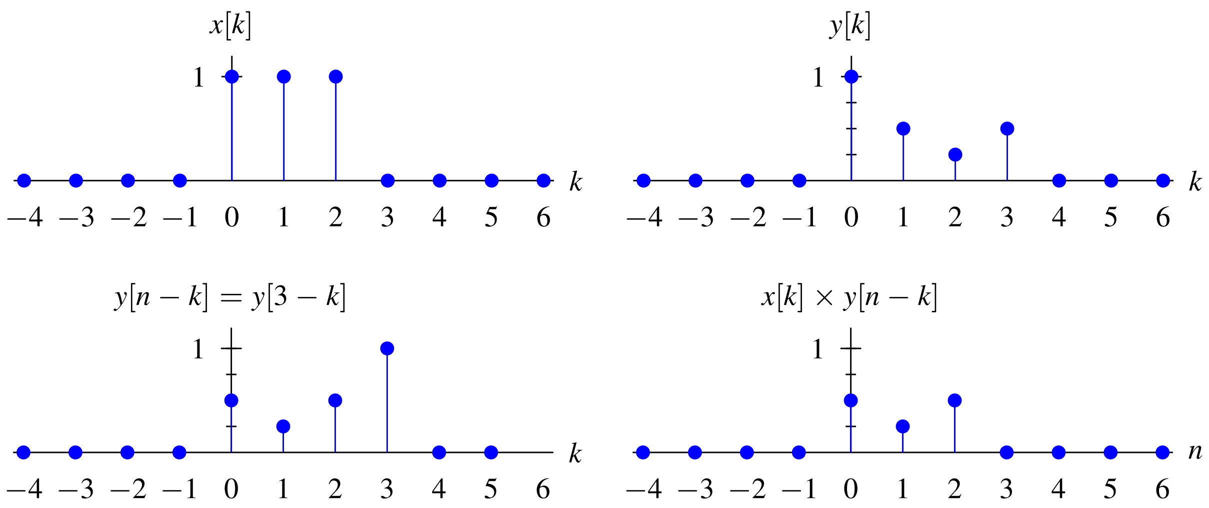
Convolución - Ejemplo ($n = 2$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\, y[n-k]$$

$$z[2] = 1 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}5 + 1 \times 1 = 1{,}75$$

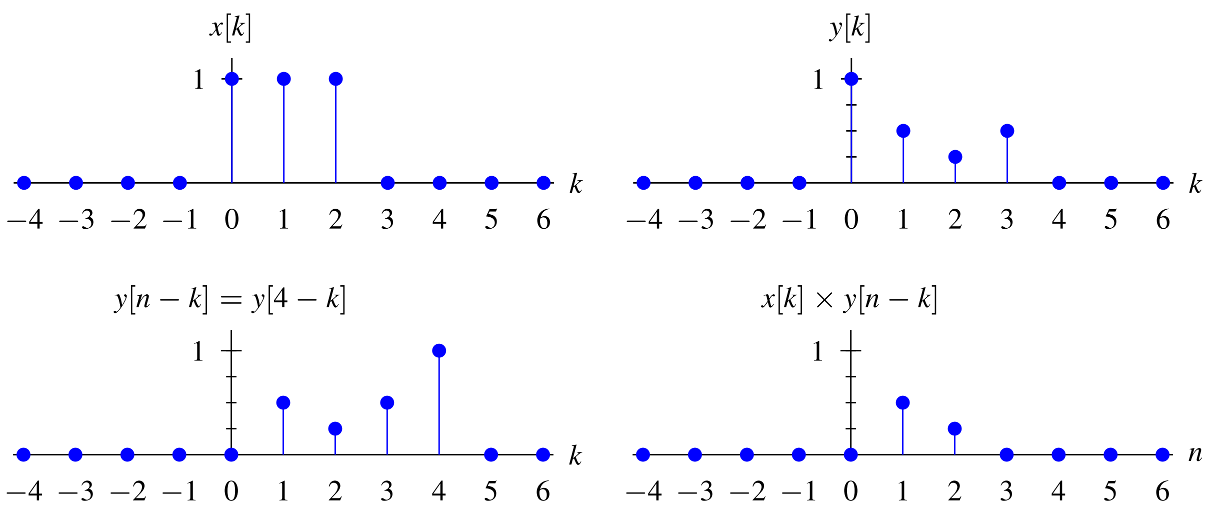
Convolución - Ejemplo ($n = 3$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\; y[n-k]$$

$$z[3] = 1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}5 = 1{,}25$$

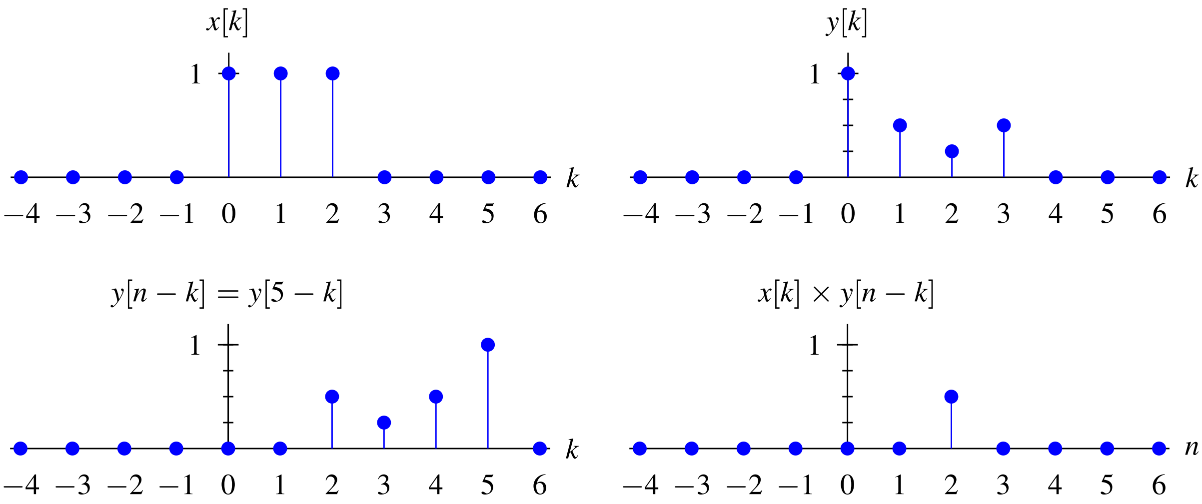
Convolución - Ejemplo ($n = 4$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\; y[n-k]$$

$$z[4] = 1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 = 0{,}75$$

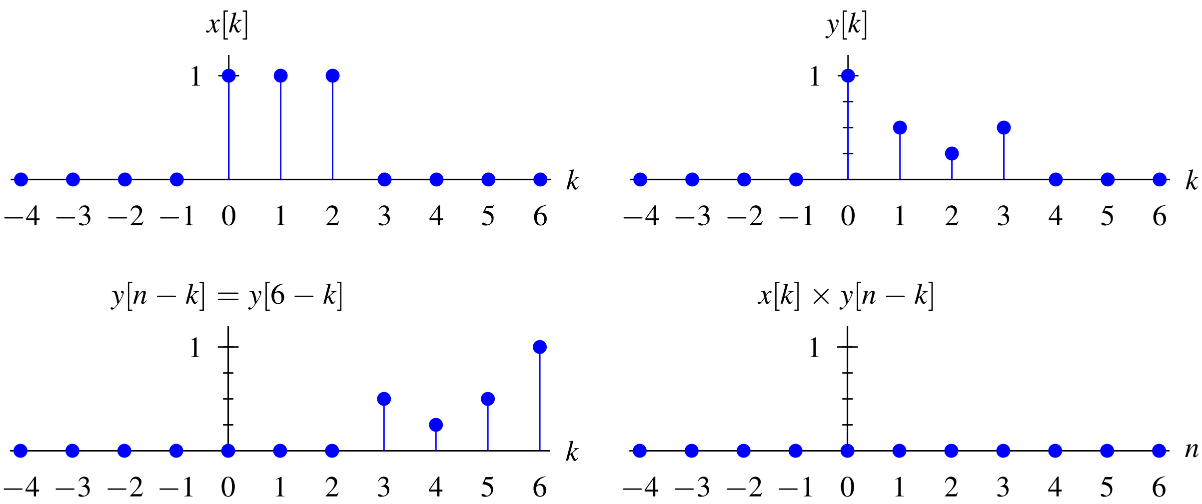
Convolución - Ejemplo ($n = 5$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\, y[n-k]$$

$$z[5] = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

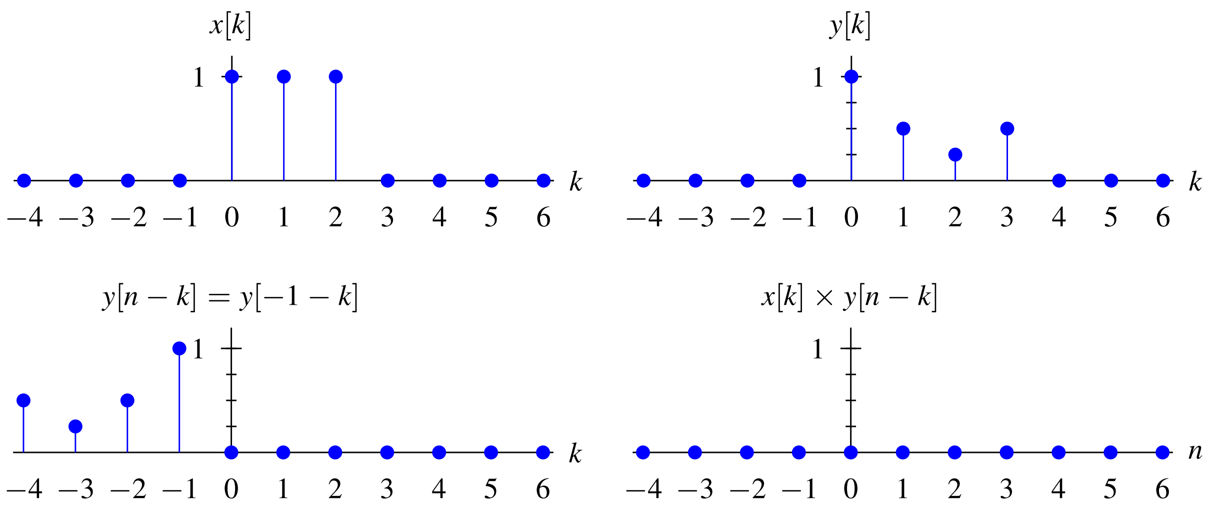
Convolución - Ejemplo ($n = 6$)



$$z[n] = \sum_k x[k]\, y[n-k]$$

$$z[6] = 0$$

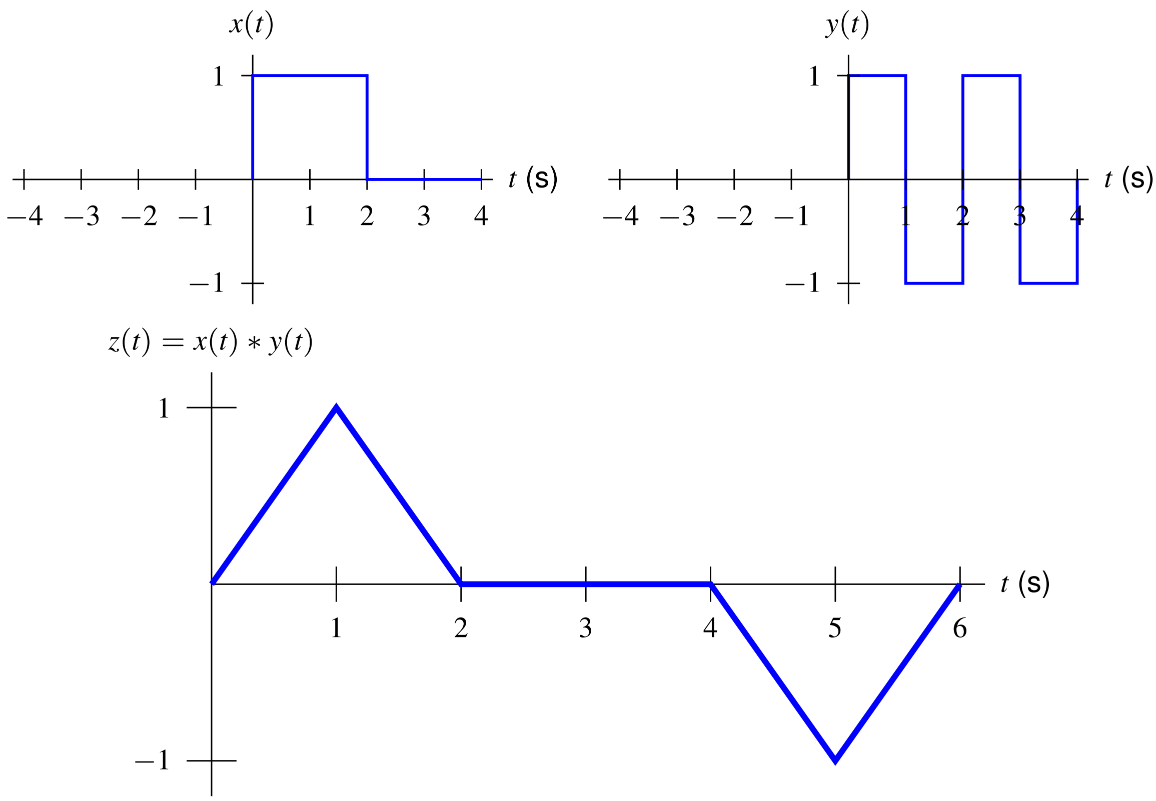
Convolución - Ejemplo ($n = -1$)



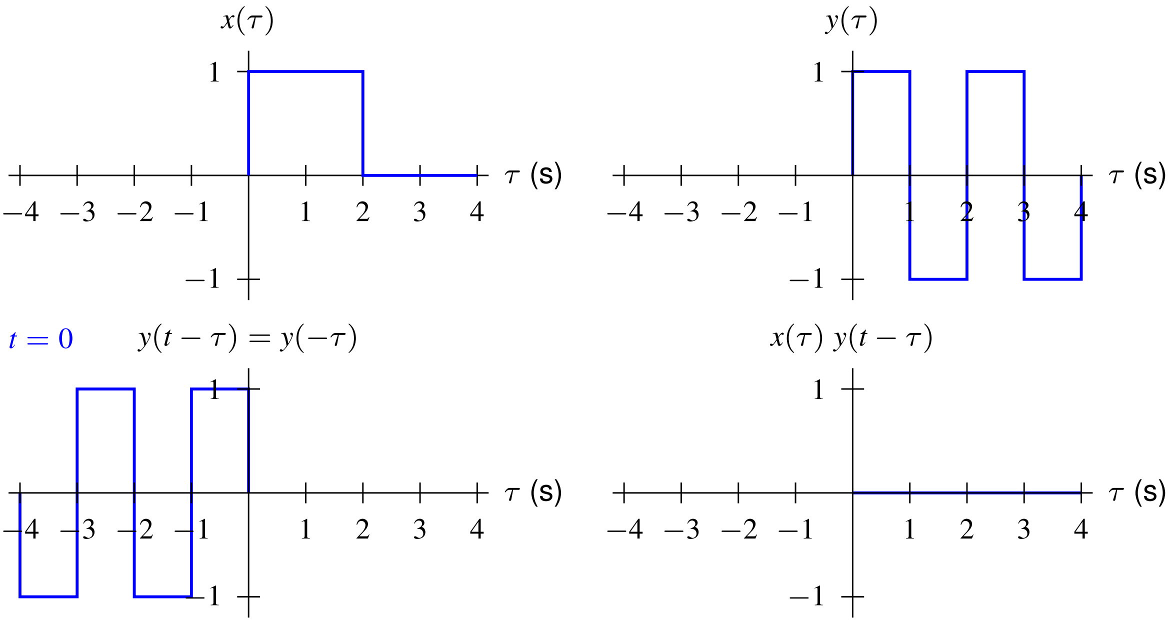
$$z[n] = \sum_k x[k]\, y[n-k]$$

$$z[-1] = 0$$

Convolución - Ejemplo

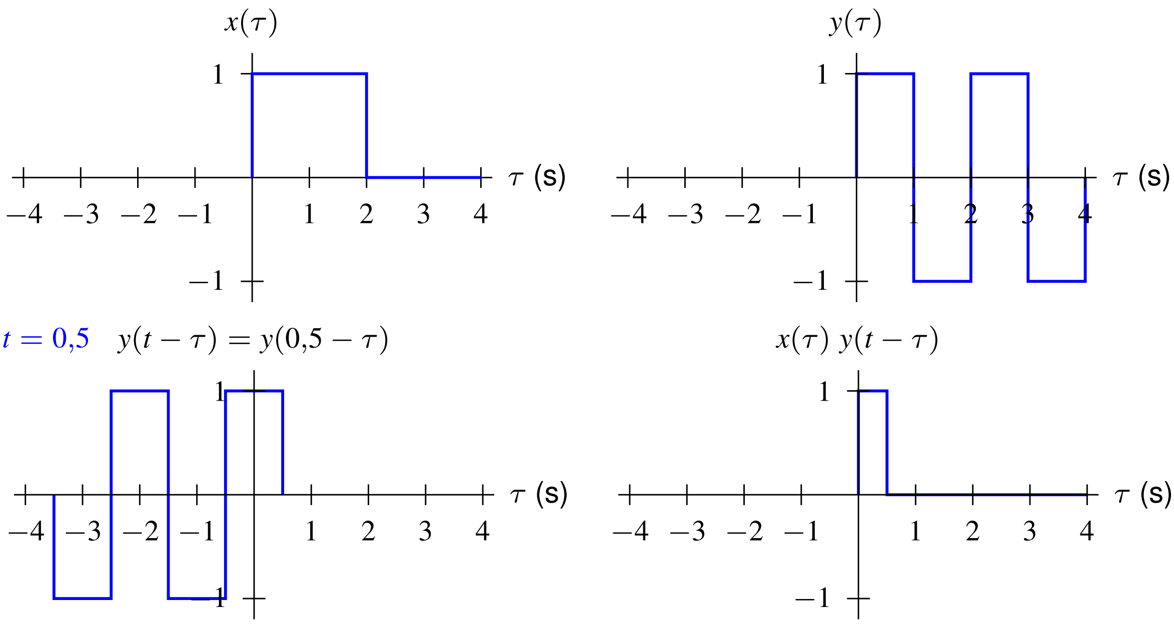


Convolución - Ejemplo ($t = 0$)



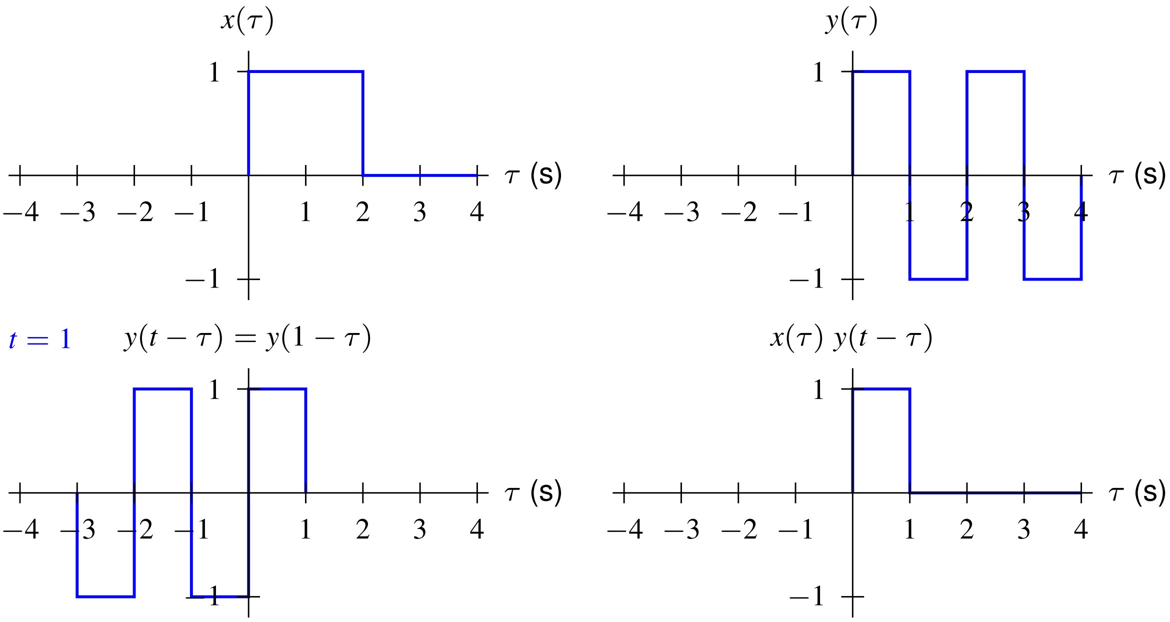
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ y(t-\tau)\ dt = 0 \qquad z(0) = 0$$

Convolución - Ejemplo ($t = 0{,}5$)



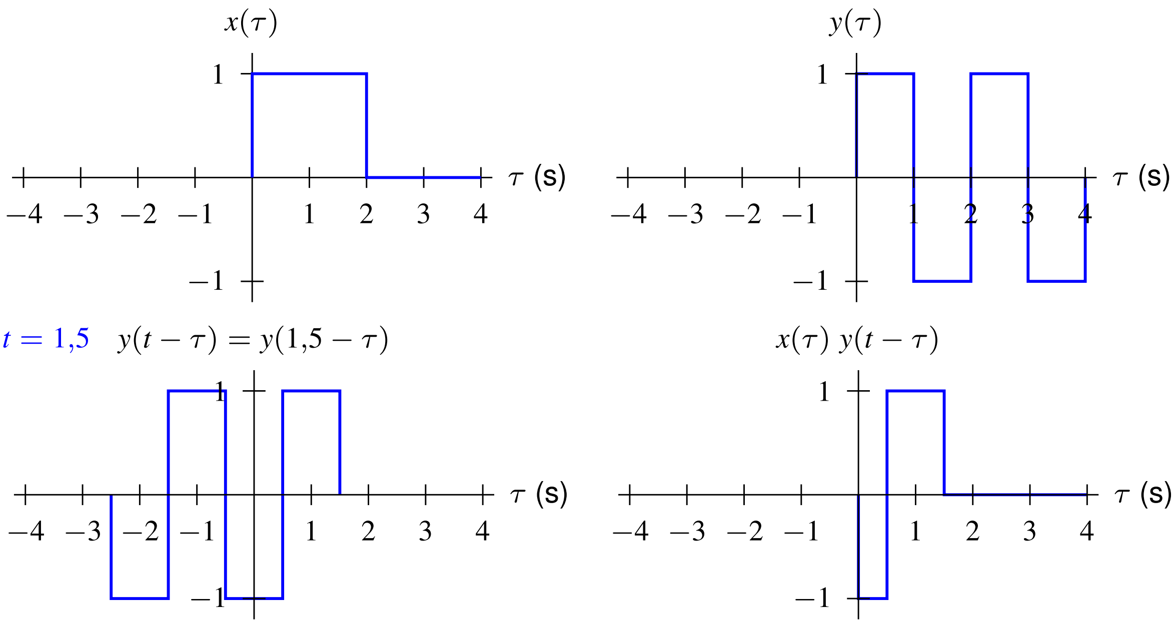
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ y(t-\tau)\ dt = 0 \qquad z(0{,}5) = 0{,}5$$

Convolución - Ejemplo ($t = 1$)



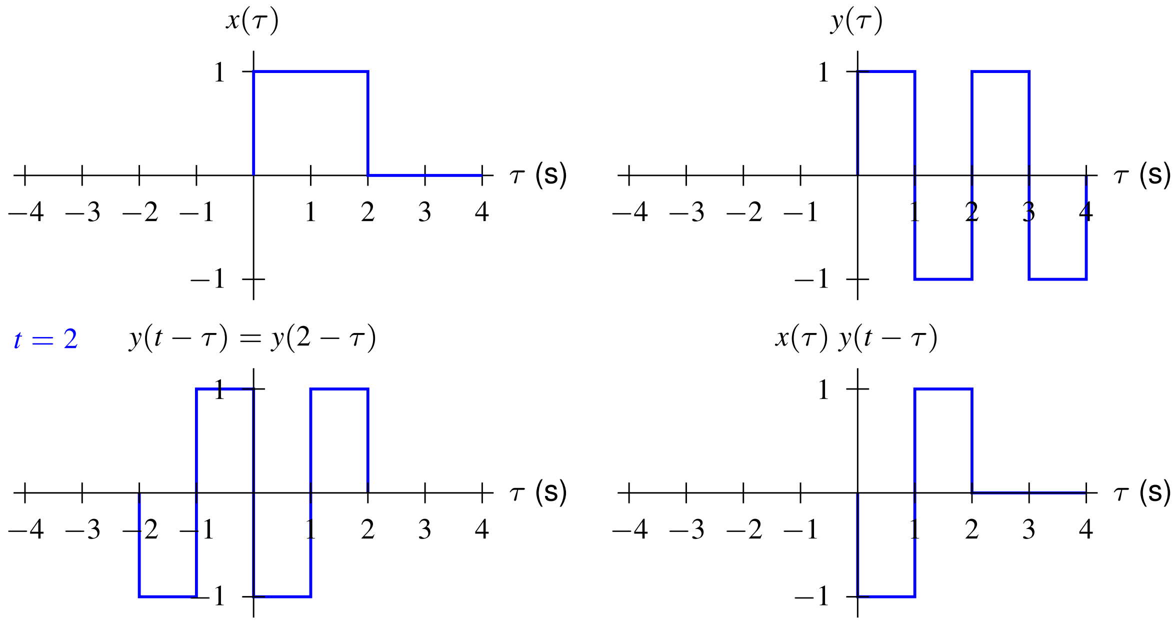
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(1) = 1$$

Convolución - Ejemplo ($t = 1{,}5$)



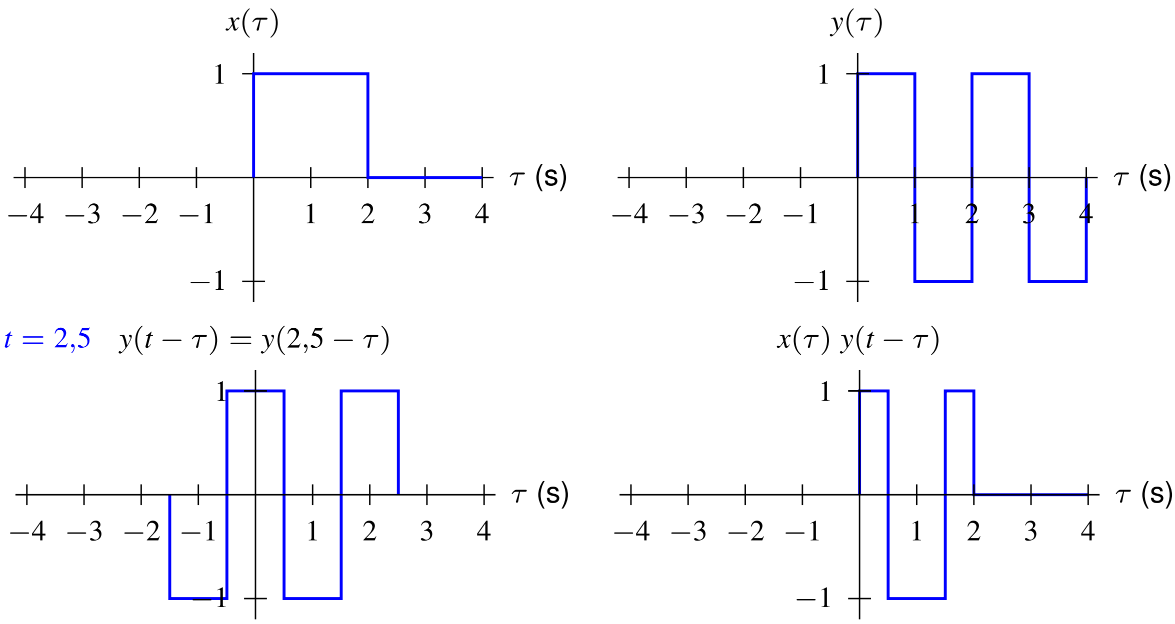
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(1{,}5) = 0{,}5$$

Convolución - Ejemplo ($t = 2$)



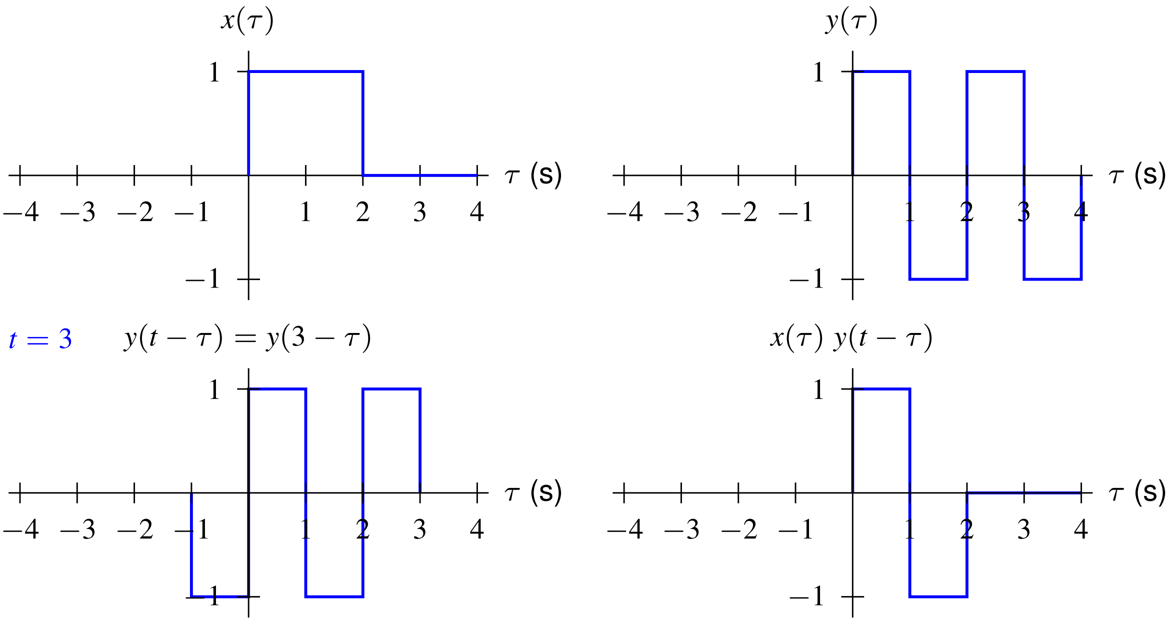
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(2) = 0$$

Convolución - Ejemplo ($t = 2{,}5$)



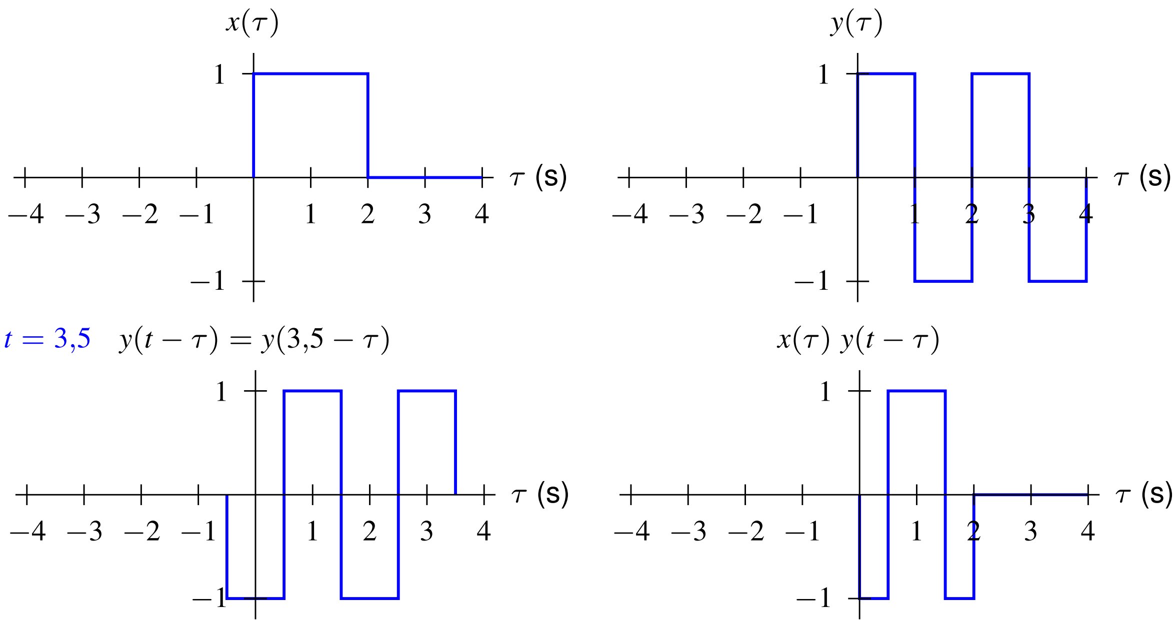
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(2{,}5) = 0$$

Convolución - Ejemplo ($t = 3$)



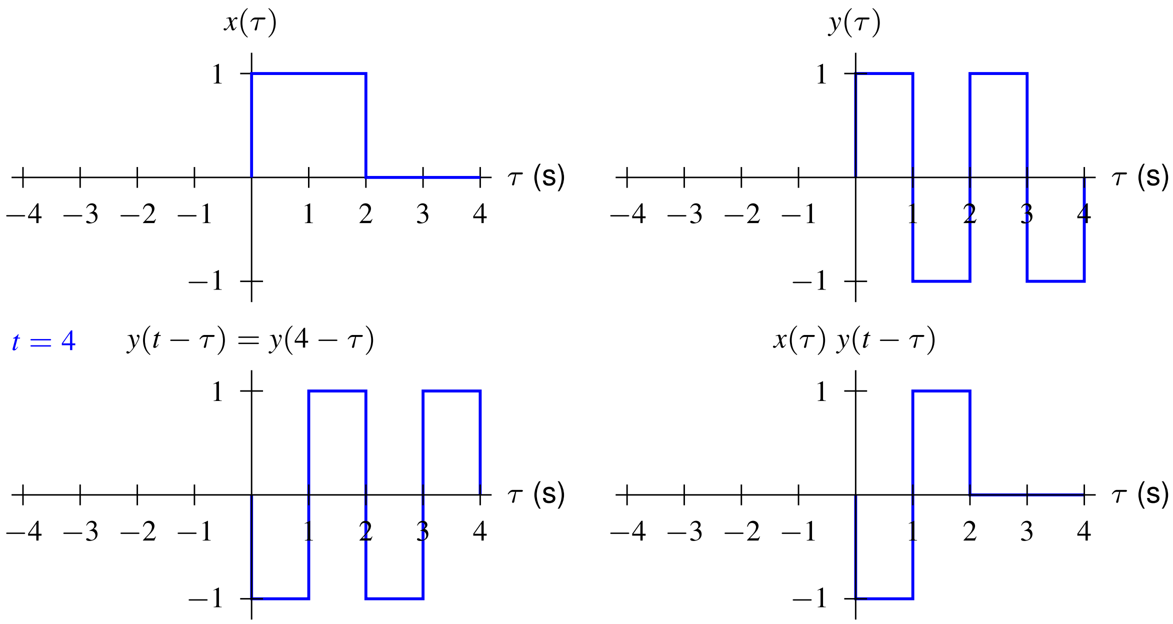
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(3) = 0$$

Convolución - Ejemplo ($t = 3{,}5$)



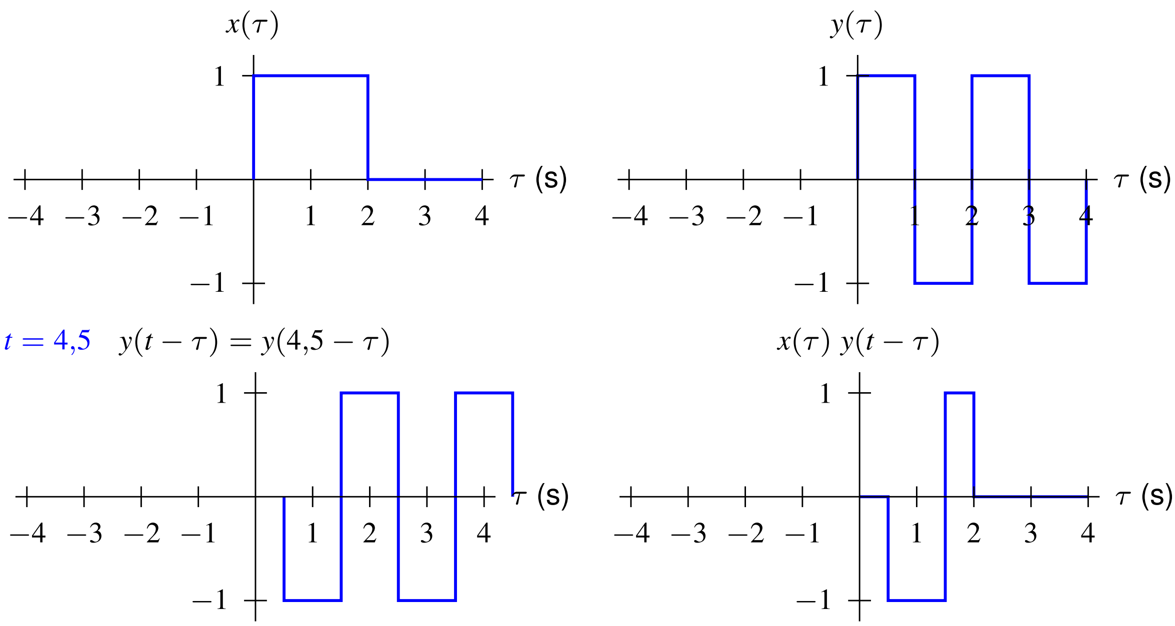
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(3{,}5) = 0$$

Convolución - Ejemplo ($t = 4$)



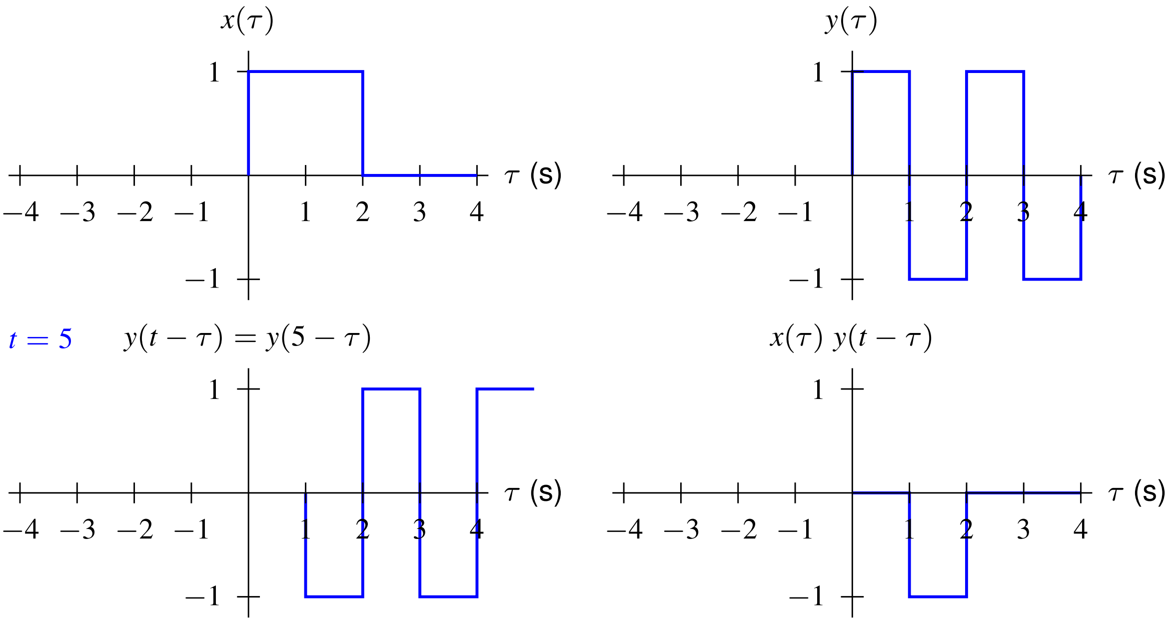
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(4) = 0$$

Convolución - Ejemplo ($t = 4{,}5$)



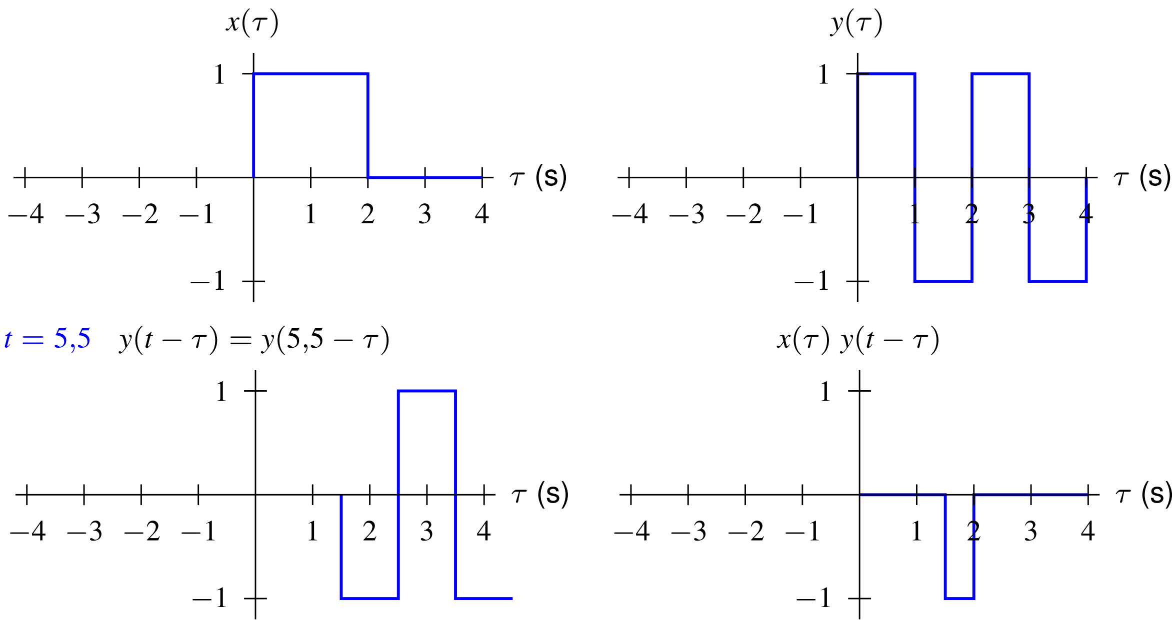
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(4{,}5) = -0{,}5$$

Convolución - Ejemplo ($t = 5$)



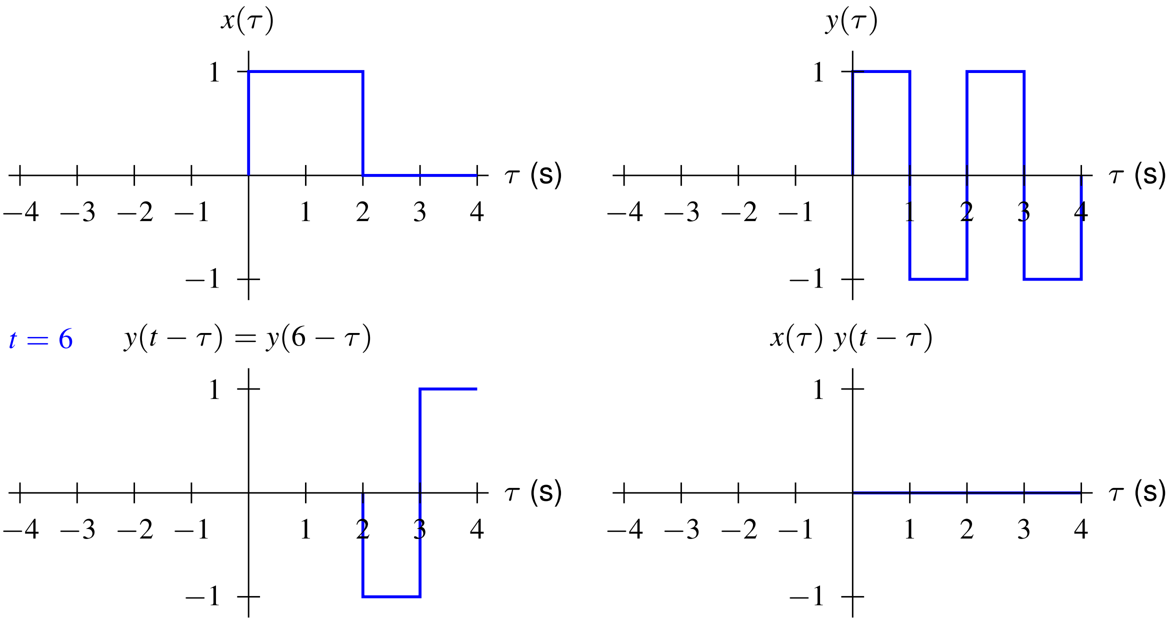
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(5) = -1$$

Convolución - Ejemplo ($t = 5{,}5$)



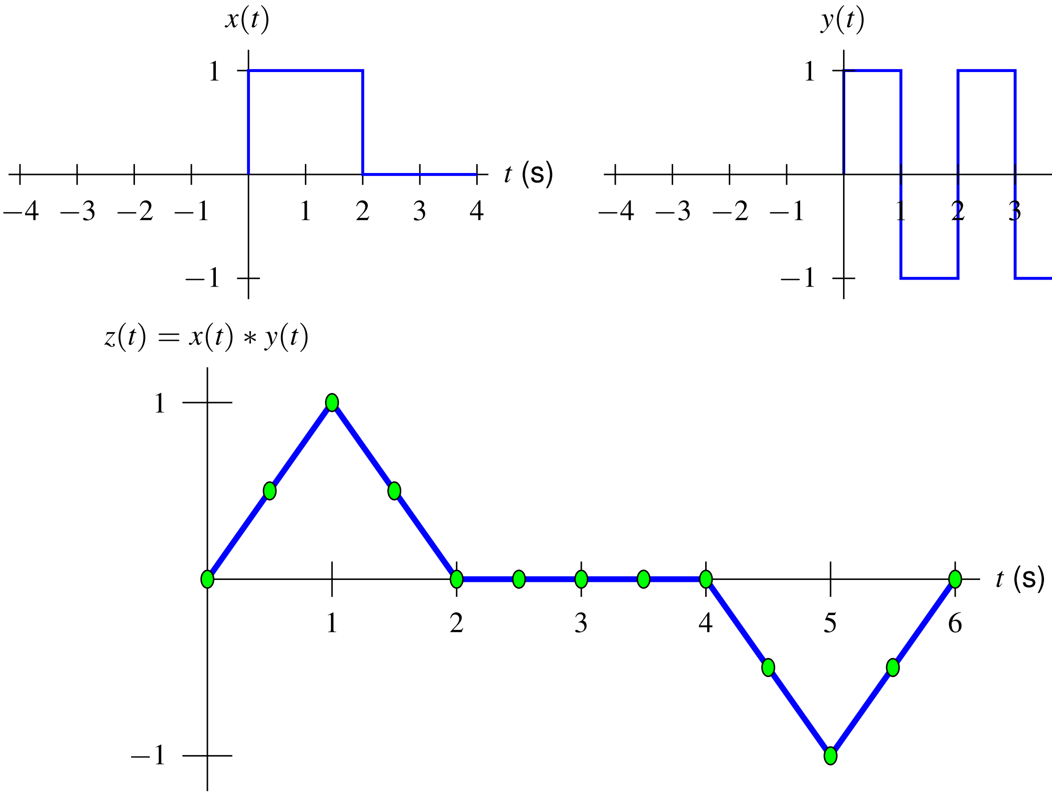
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, dt = 0 \qquad z(5{,}5) = -0{,}5$$

Convolución - Ejemplo ($t = 6$)



$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ y(t-\tau)\ dt = 0 \qquad z(6) = 0$$

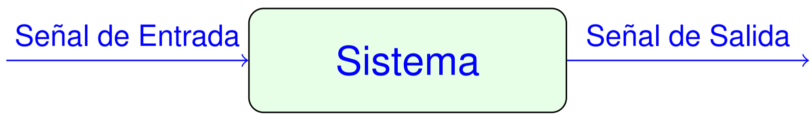
Convolución - Ejemplo



Sistemas

Sistemas - Abstracción

- Descripción de un sistema (físico, matemático, o computacional) mediante el modo en que transforma una señal de entrada en una señal de salida
  - Foco en el flujo de información
  - Abstracción de todo lo demás (substrato físico, implementación,...)

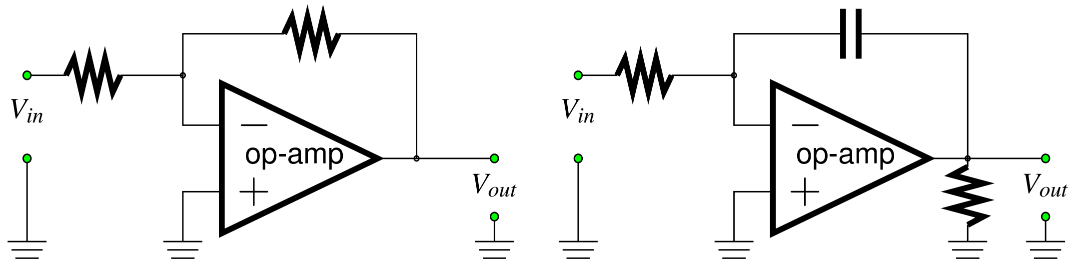


- Amplia aplicabilidad
  - Sistemas electricos, mecánicos, ópticos, acústicos, biológicos, financieros,...
- Modularidad y jerarquía
  - Representaciones de distintos componentes de un sistema fácilmente combinables

Sistemas - Abstracción - Ejemplo

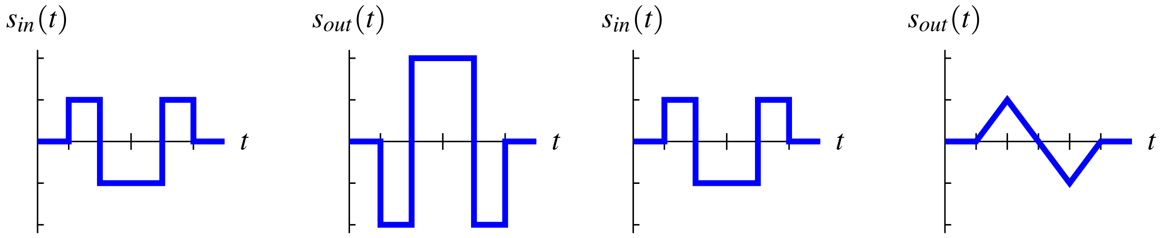
- Electrónica: implementación (“*cómo*”)

Amplificador Inversor | Integrador

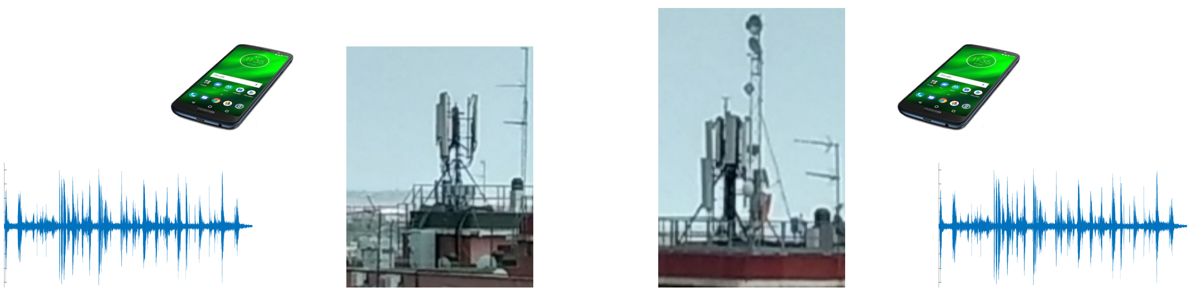


- Sistemas: funcionalidad (“*qué*”)

$s_{in}(t) \rightarrow \boxed{-G \times \bullet} \rightarrow s_{out}(t)$ | $s_{in}(t) \rightarrow \boxed{\int_0^t \bullet \, d\tau} \rightarrow s_{out}(t)$



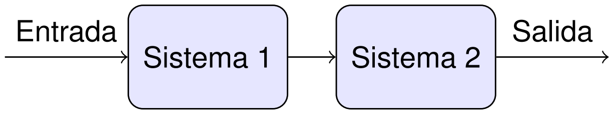
Sistemas - Abstracción - Ejemplo



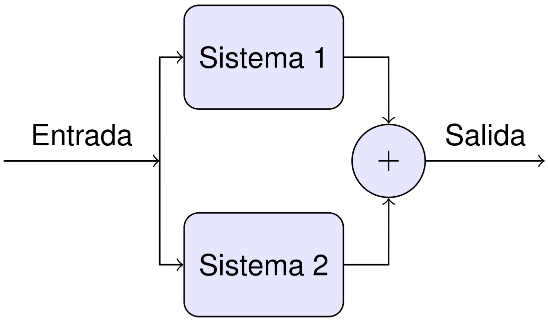
Voz Tx → Telefono 1 → Antena 1 → Operadores Red de Fibra → Antena 2 → Telefono 2 → Voz Rx

Entrada / Voz Tx → Sistema → Salida / Voz Rx

Interconexión de sistemas

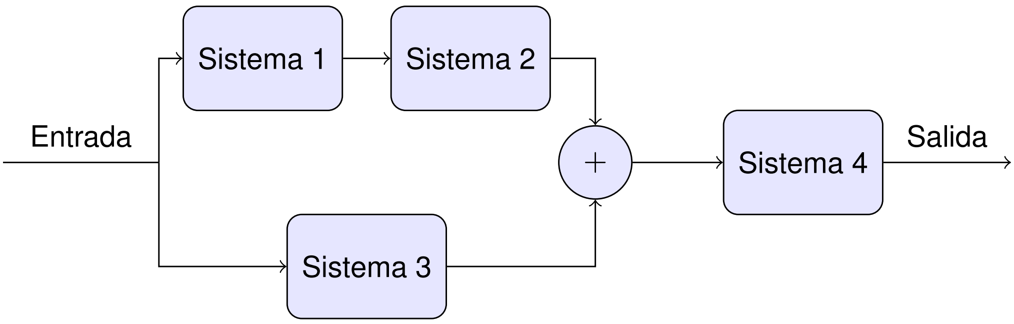


Interconexión Serie

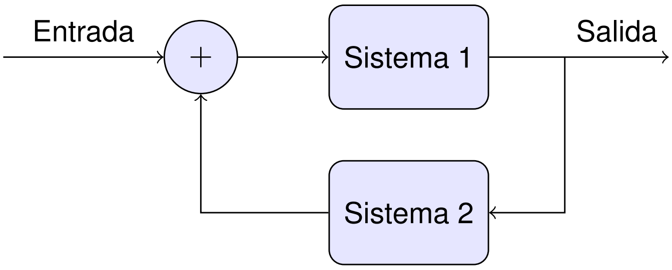


Interconexión Paralelo

Interconexión de sistemas (II)

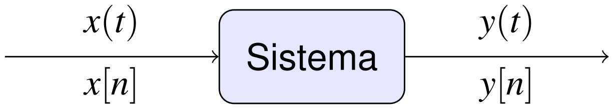


Interconexión Serie-Paralelo



Interconexión con Realimentación

Propiedades básicas de los sistemas



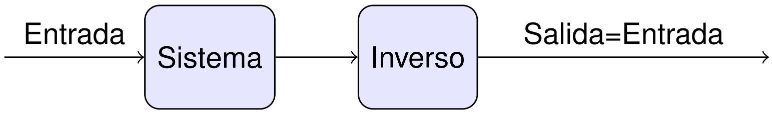
- Sistemas con y sin memoria
  - Sin memoria: la salida en t (o en n) depende únicamente de la entrada en t (o en n)

$$\text{Ejemplos: } y(t) = C\, x(t), \qquad y[n] = C\, x[n]$$

  - Con memoria: la salida en t (o en n) depende de otros instantes

$$\text{Ejemplos: } y(t) = y(t) - a\, y(t - t_0), \qquad y[n] = \sum_{k=n-C}^{n} x[k]$$

- Invertibilidad y sistemas inversos
  - Invertible: entradas distintas producen salidas distintas
  - Sistema inverso: aquel que en serie con el sistema reconstruye la entrada



Propiedades básicas de los sistemas

- Causalidad
  - Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en ese instante o en intantes anteriores (depende sólo de presente y pasado)
- Estabilidad
  - Un sistema es estable si para una entrada limitada (con magnitud que no crece de forma ilimitada), la salida también está limitada (no diverge)

$$\text{Si } |x(t)| < B_x\ \forall t, \text{ entonces } |y(t)| < B_y\ \forall t$$

- Invariancia en el tiempo
  - Si $y(t)$ es la salida a $x(t)$, entonces $y(t - t_0)$ es la salida para $x(t - t_0)$ (o equivalentemente, si $y[n]$ es la salida a $x[n]$, entonces $y[n - n_0]$ es la salida para $x[n - n_0]$)
- Linealidad
  - Principio de superposición
    - $y_1(t)$ es la salida a $x_1(t)$
    - $y_2(t)$ es la salida a $x_2(t)$
    - Sistema lineal: $ay_1(t) + by_2(t)$ es la salida a $ax_1(t) + bx_2(t)$

Caracterización de Señales

Caracterización de señales

- Dos tipos diferenciados de señales
  - Señales deterministas
    - Señales cuyo valor es conocido para cualquier instante temporal
  - Señales aleatorias
    - Señales cuyo valor en cualquier instante es a priori desconocido
    - Es posible que se conozcan algunos promedios estadísticos
- Caracterización de señales deterministas
  - Expresión analítica para $x(t)$ o $x[n]$
  - Cálculo de algunos parámetros estadísticos
    - Media, valor máximo/mínimo, energía, potencia,...
- Caracterización de señales aleatorias
  - Teoría de procesos aleatorios
  - Promedios estadísticos
    - Media
    - Función de autocorrelación

Señales deterministas - Valores medios

- Valor medio en el intervalo $t \in (-T/2, T/2)$ (o $n \in (-N, N)$)

$$m_x(T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt, \qquad m_x(2N+1) = \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N} x[m]$$

- Valor medio

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt, \qquad m_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N} x[m]$$

- Operador promedio temporal

$$\langle \bullet \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \bullet\, dt, \qquad \langle \bullet \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N} \bullet$$

  - Se pueden obtener promedios temporales de funciones de las señales
    - $\langle f(x(t))\rangle$ o $\langle f(x[n])\rangle$ (ej: $f(x(t)) = |x(t)|^2$)

Energía y Potencia

- Energía de una señal

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt, \qquad \mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

  - Señales de energía

$$\mathcal{E}_x < \infty$$

- Potencia de una señal

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt, \qquad \mathcal{P}_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N} |x[m]|^2$$

$$\mathcal{P}_x = \langle |x(t)|^2 \rangle, \qquad \mathcal{P}_x = \langle |x[n]|^2 \rangle$$

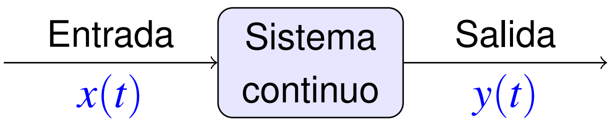
  - Señales de potencia

$$0 < \mathcal{P}_x < \infty$$

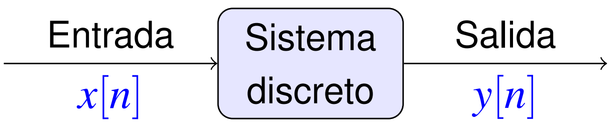
Caracterización de Sistemas

Sistemas continuos y discretos

- Sistema continuo
  - Las señales de entrada y de salida son señales en tiempo continuo



- Sistema discreto
  - Las señales de entrada y de salida son señales en tiempo discreto



- Sistemas lineales e invariantes en el tiempo
  LTI: *Linear Time Invariant*
  - Muchos procesos físicos son lineales e invariantes en el tiempo
  - Análisis detallado y relativamente simple

Algunas propiedades de la función impulso

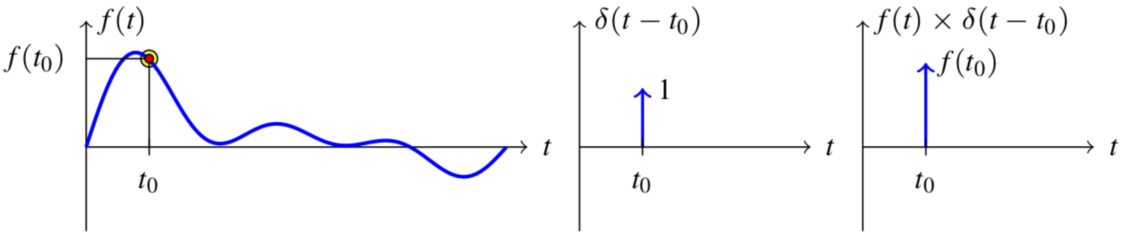
- Convolución con un impulso
  - Desplazamiento temporal

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

- Integral (suma) del producto de una señal con un impulso
  - Valor de la función en la posición del impulso

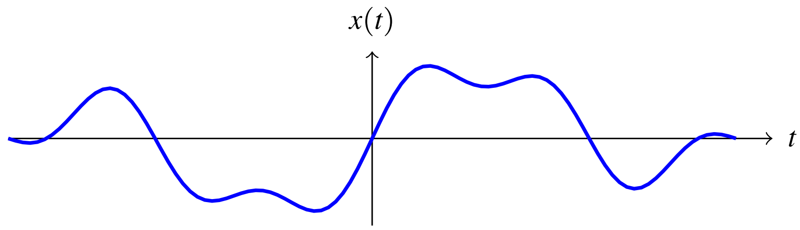
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \delta(t-t_0)\ dt = f(t_0), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\ \delta[n-n_0] = f[n_0]$$

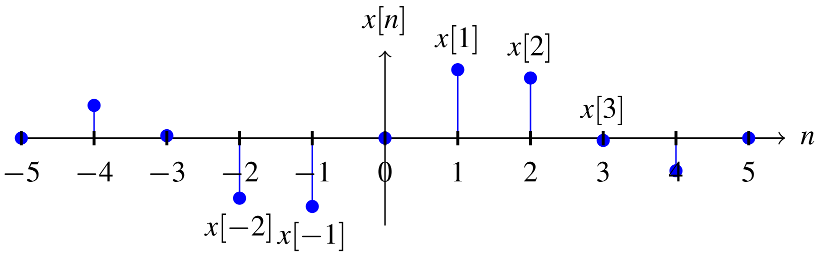


Representación de señales en términos de impulsos

- Representación de señales en términos de impulsos

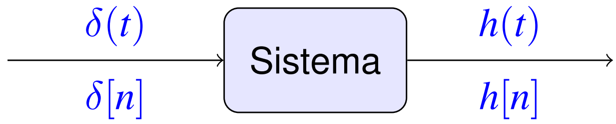
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau, \qquad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ \delta[n-k]$$



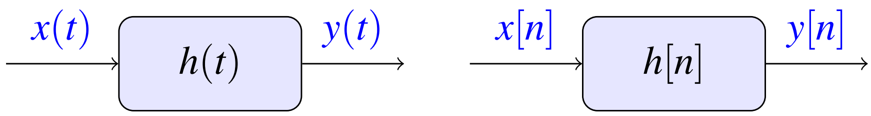


Caracterización de sistemas lineales e invariantes

- Respuesta al impulso del sistema ($h(t)$ o $h[n]$)



- Representación del sistema a través de su respuesta al impulso



  - Aplicación del principio de superposición (linealidad)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n]$$

  - Integral/suma de **convolución** o integral/suma de superposición

Propiedades de sistemas lineales e invariantes

- Sistema identidad : $h(t) = \delta(t)$ (o $h[n] = \delta[n]$)

$$x(t) * \delta(t) = x(t), \qquad x[n] * \delta[n] = x[n]$$

- Propiedad conmutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t), \qquad x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

- Propiedad distributiva

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

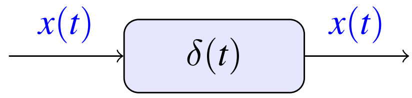
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

- Propiedad asociativa

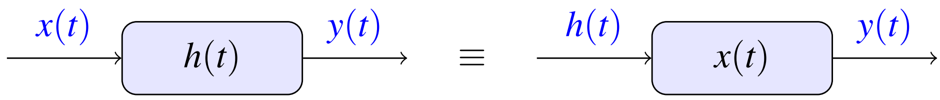
$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$

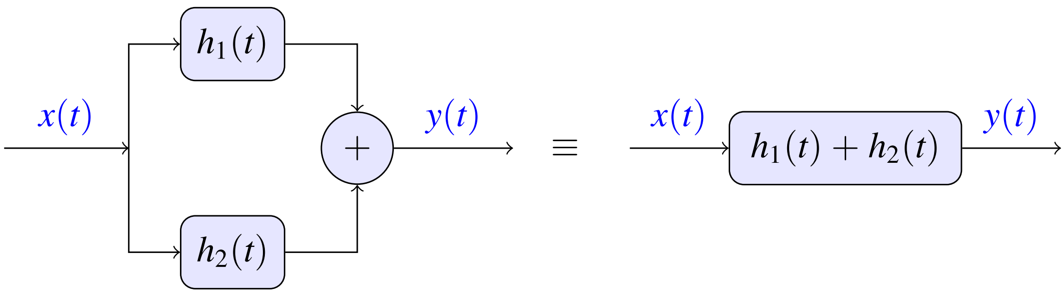
Propiedades de sistemas lineales e invariantes



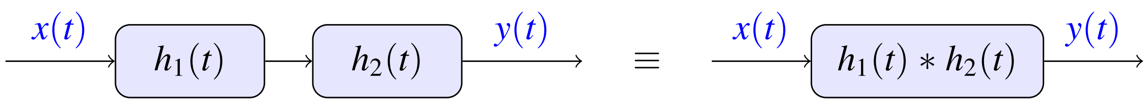
Sistema identidad



Propiedad conmutativa



Propiedad distributiva



Propiedad asociativa

Propiedades de los sistemas lineales

- Sistemas lineales sin memoria

$$y(t) = C\, x(t) \rightarrow h(t) = C\, \delta(t)$$

$$y[n] = C\, x[n] \rightarrow h[n] = C\, \delta[n]$$

- Sistemas lineales causales

$$h(t) = 0 \text{ para } t < 0, \qquad h[n] = 0 \text{ para } n < 0$$

- Sistemas lineales invertibles (sistema inverso $h_i(t)$)

$$x(t) * h(t) * h_i(t) = x(t) \rightarrow h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

$$x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n] \rightarrow h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

- Sistemas lineales estables

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Componentes básicos de los sistemas lineales

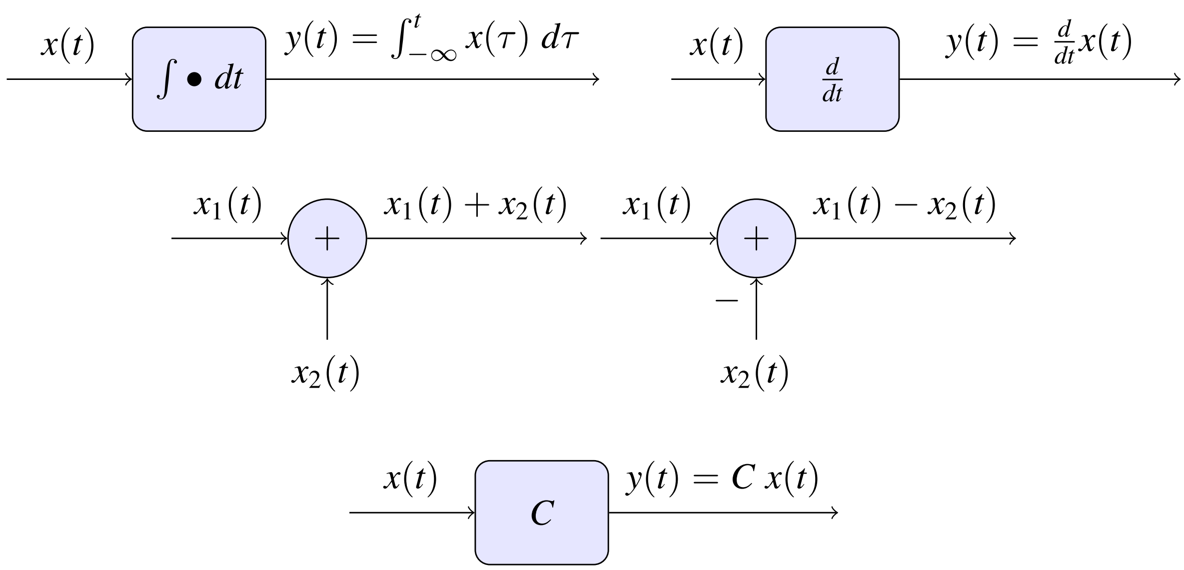
- Componentes básicos
  - Integrador
  - Derivador (o retardo unitario para sistemas discretos)
  - Sumador / restador
  - Multiplicador escalar
- Estos componentes básicos se pueden implementar utilizando:
  - Resistencias
  - Condendadores
  - Amplificadores operacionales
- Sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (o ecuaciones en diferencias)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \, \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \text{ con } N > M$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \; y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x[n-k], \text{ con } N > M$$

  - Se pueden realizar o simular utilizando estos componentes

Componentes básicos de los sistemas lineales



Componentes básicos de los sistemas lineales