Fundamentos de Teoría de la Señal
Máster Universitario en Internet de las Cosas:
Tecnologías Aplicadas

Capítulo 2

Representación de señales en el dominio de la frecuencia
Transformada de Fourier

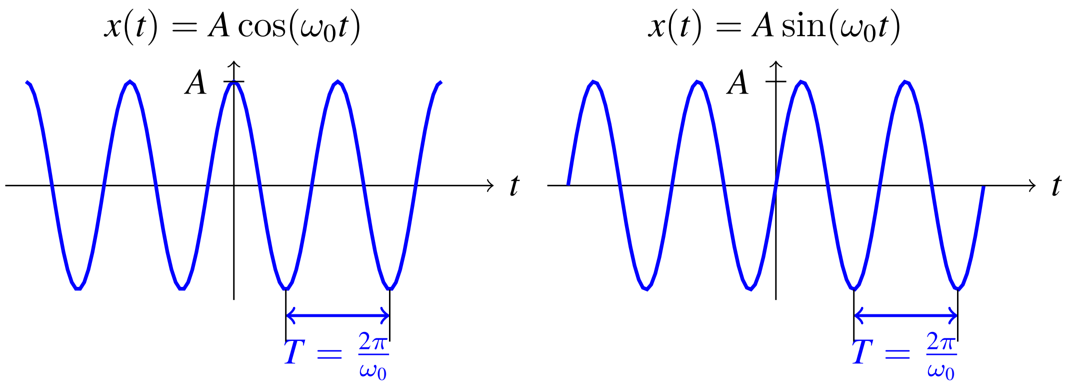
Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

- Concepto de frecuencia
- Representación de señales mediante armónicos
  - Desarrollo en serie de Fourier para señales periódicas
- Transformada de Fourier de señales aperiódicas
  - Pares transformados
  - Propiedades
- Análisis de sistemas en el dominio frecuencial

Frecuencia de una sinusoide



- Frecuencia de una sinusoide de período T segundos
  - Frecuencia f_0: número de ciclos por unidad de tiempo

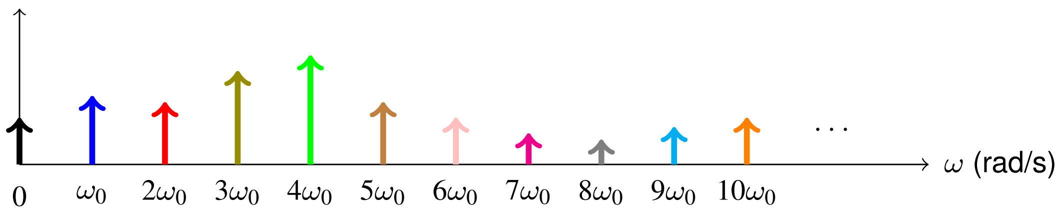
$$f_0 = \frac{1}{T} \text{ ciclos/s (Hz)}$$

    - ⋆ Unidades SI: 1 ciclo/s $\equiv$ 1 hercio (Hz)
  - Frecuencia angular ω_0: número de radianes por unidad de tiempo

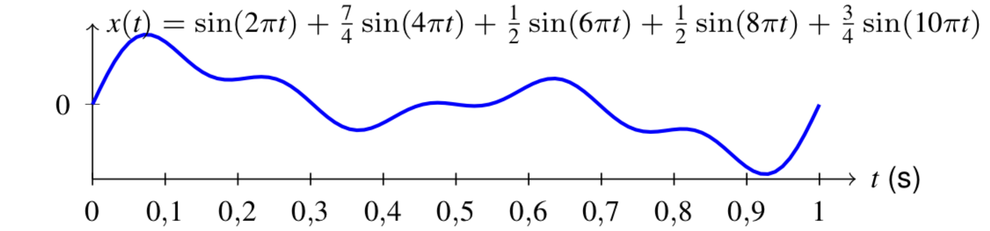
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \text{ rad/s}$$

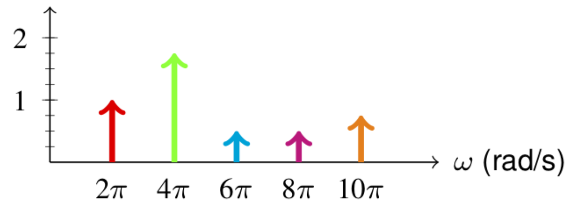
Representación de señales en frecuencia : Series de Fourier

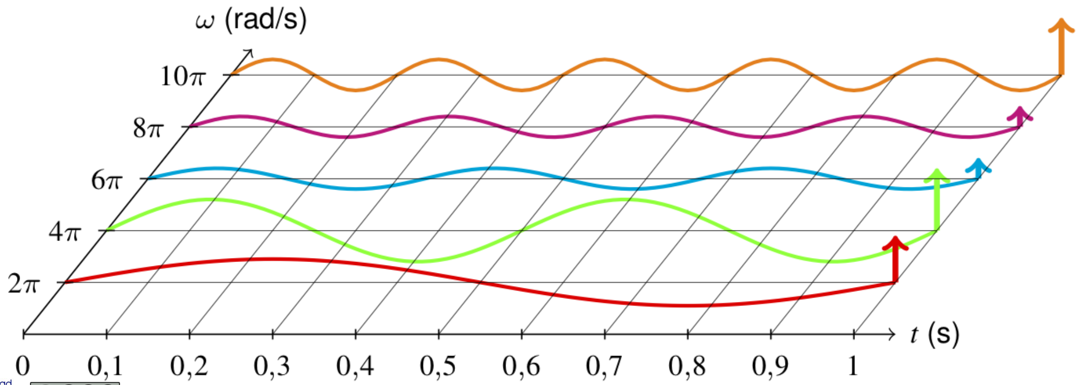
- Representación de señales en téminos de sinusoides (armónicos)
  - Descripción natural en algunos sistemas
    - ⋆ Ejemplo: sistemas de audio
  - Conduce a una interpretación de los sistemas como filtros
    - ⋆ Atenúan, ensalzan, o bloquean algunos armónicos
- Representación de señales en términos de sus armónicos
  - Frecuencia fundamental: ω_0 radianes/s ($f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Hz)
    - ⋆ 0: Continua (DC)
    - ⋆ ω_0: Armónico fundamental
    - ⋆ $k\,\omega_0$: k-ésimo armónico



Representación de armónicos - Tiempo/Frecuencia

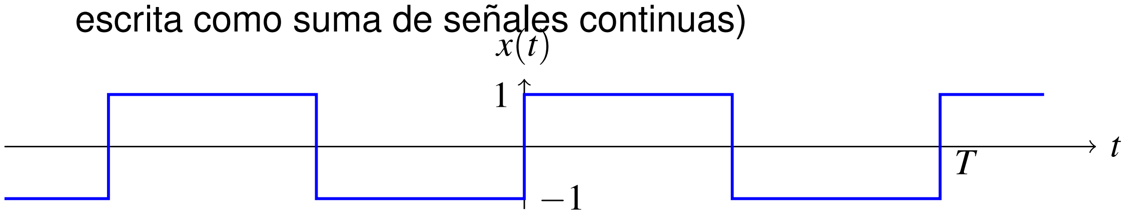






Representación con armónicos

- Permiten representar señales periódicas
  - Todos los armónicos de ω_0 son periódicos de $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- Se pueden representar señales periódicas discontinuas
  - Lagrange ridiculizó en su momento esta idea (señal discontinua escrita como suma de señales continuas)



- Desarrollo en Serie de Fourier de señales periódicas
  - Expansión en término de exponenciales complejas: $e^{jk\omega_0 t}$
  - Propiedades de los armónicos en esta expansión
    - ⋆ Producto de armónicos produce un nuevo armónico

$$e^{jk\omega_0 t} \times e^{j\ell\omega_0 t} = e^{j(k+\ell)\omega_0 t}$$

    - ⋆ La integral en un período es nula (excepto para DC)

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jk\omega_0 t}\, dt = \int_T e^{jk\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ T, & k = 0 \end{cases} = T\,\delta[k]$$

Desarrollo en Serie de Fourier

- Señales en tiempo continuo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

  - Señales reales: $x^*(t) = x(t)$, $a_k^* = a_{-k}$

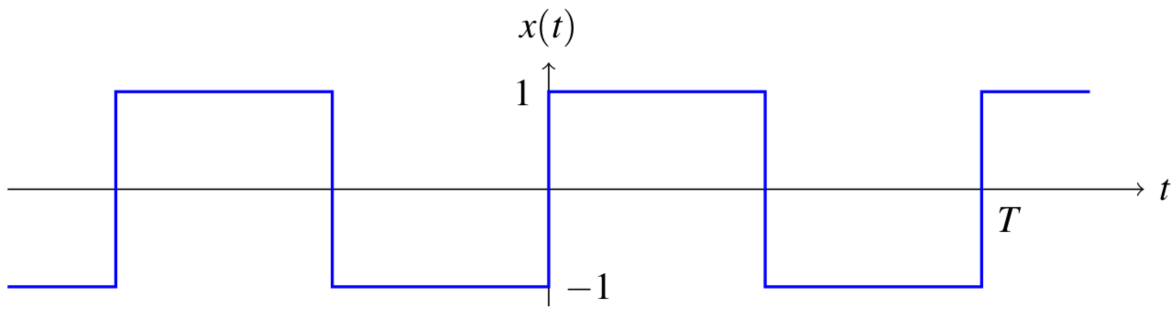
$$a_k = A_k e^{j\theta_k} \Rightarrow x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$a_k = B_k + jC_k \Rightarrow x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

- Señales en tiempo discreto

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 n}, \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \, e^{-jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

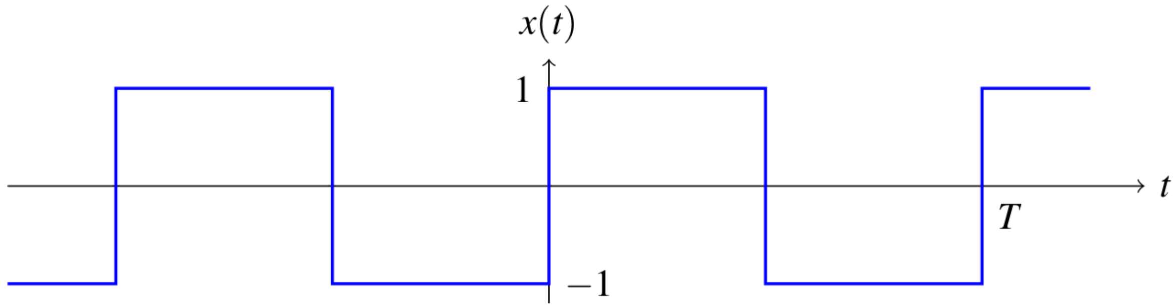
Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt = -\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \, dt + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \, dt$$

$$= \frac{1}{j2\pi k}\left(2 - e^{j\pi k} - e^{-j\pi k}\right) = \begin{cases} \frac{2}{j\pi k}, & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo

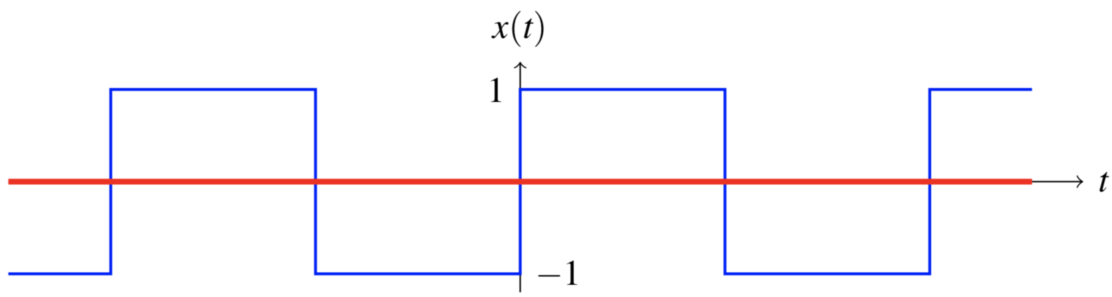


$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{j\pi k}, & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad A_k = \frac{2}{\pi k}, \qquad \theta_k = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{\pi k}\, \cos\left(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{\pi k}\, \sin\left(k\omega_0 t\right)$$

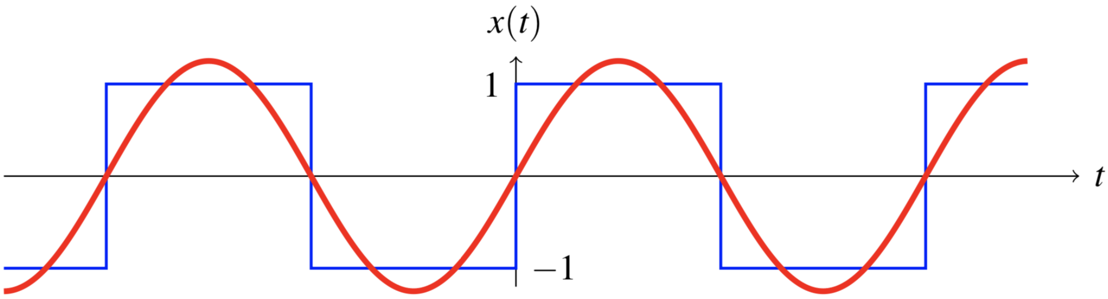
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



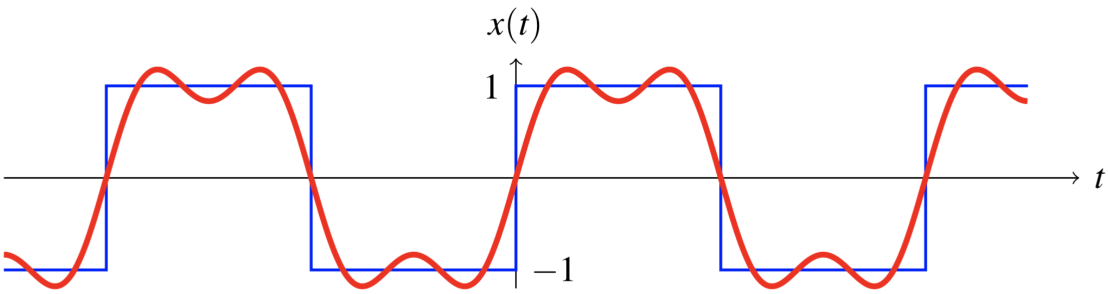
$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impar}}}^{0} \frac{2}{j\pi k}\, e^{j\omega_0 k t} = a_0 = 0$$

Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



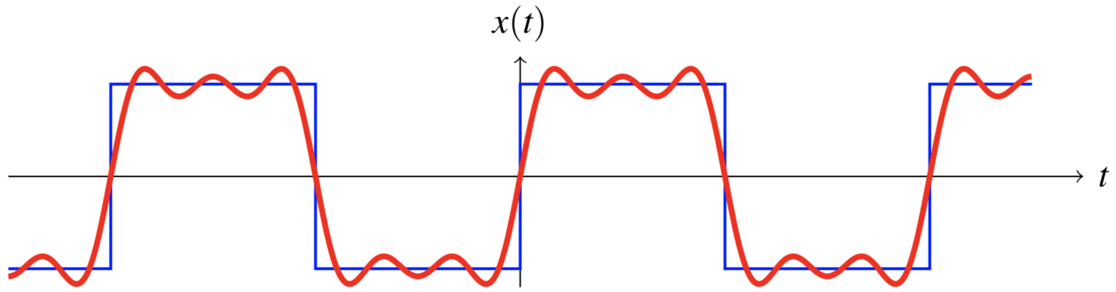
$$\sum_{\substack{k=-1\\ k\ impar}}^{1} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t);$$

Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



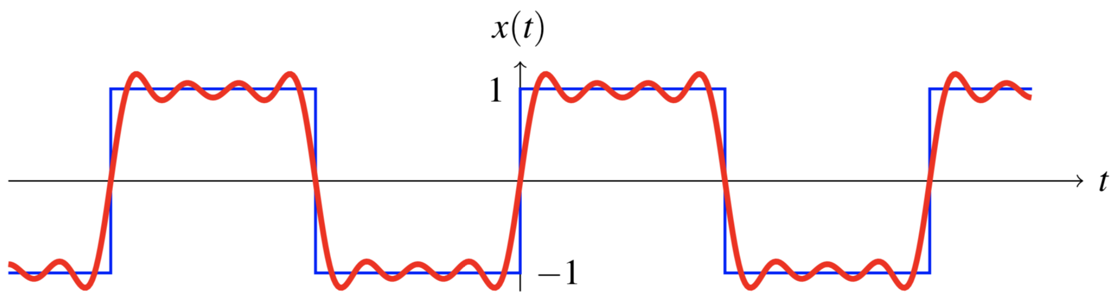
$$\sum_{\substack{k=-3\\ k\ impar}}^{3} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1\\ k\ impar}}^{3} \frac{4}{\pi k}\sin(k\omega_0 t);$$

Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



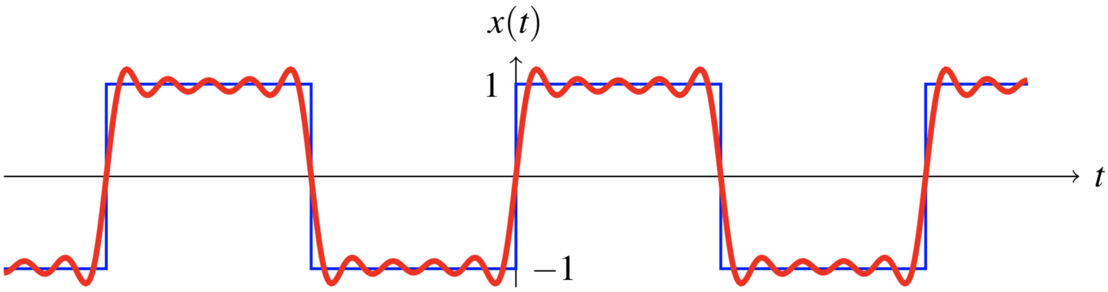
$$\sum_{\substack{k=-5\\ k \text{ impar}}}^{5} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impar}}}^{5} \frac{4}{\pi k} \sin(k\omega_0 t);$$

Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo

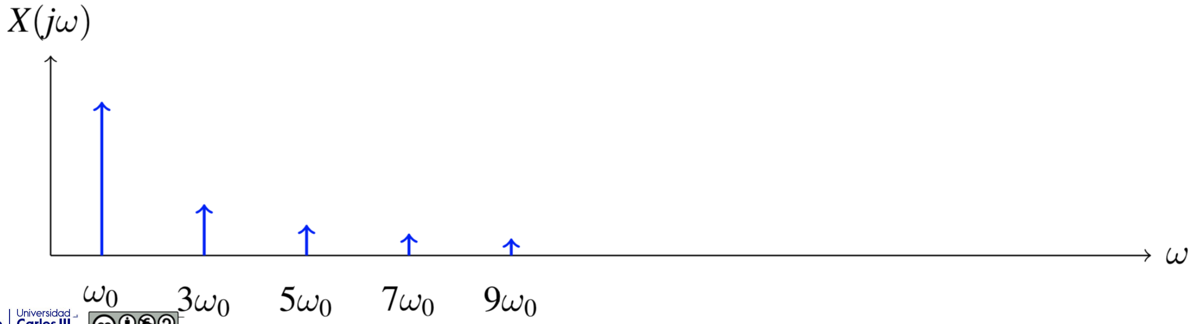


$$\sum_{\substack{k=-7\\ k \text{ impar}}}^{7} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impar}}}^{7} \frac{4}{\pi k} \sin(k\omega_0 t);$$

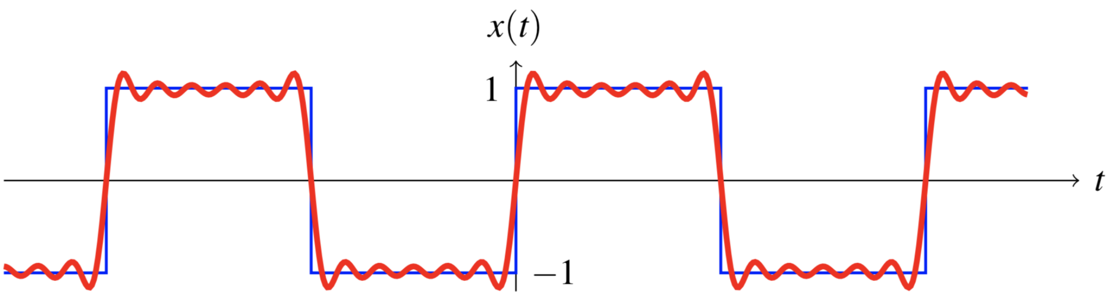
Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



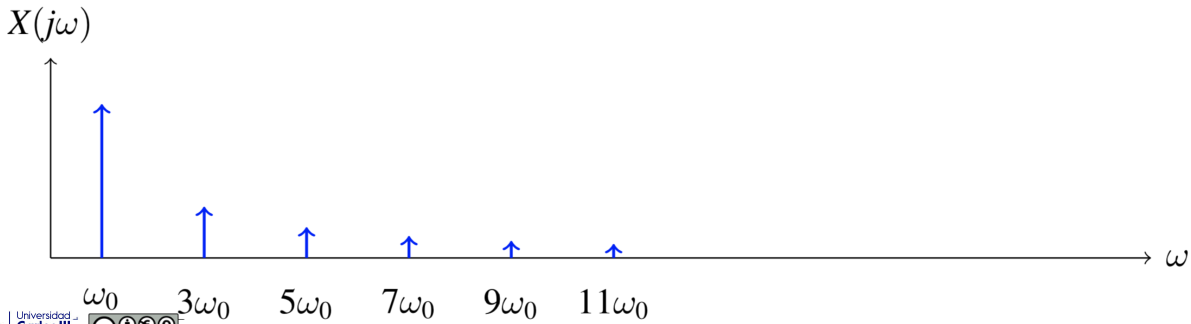
$$\sum_{\substack{k=-9\\ k\ impar}}^{9} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1\\ k\ impar}}^{9} \frac{4}{\pi k} \sin(k\omega_0 t);$$



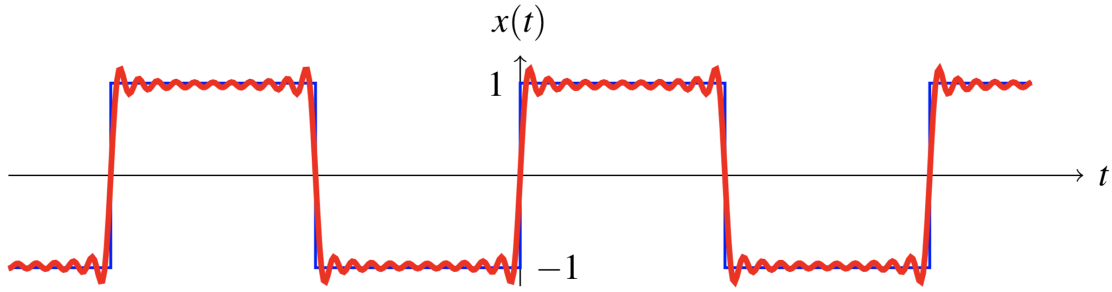
Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo



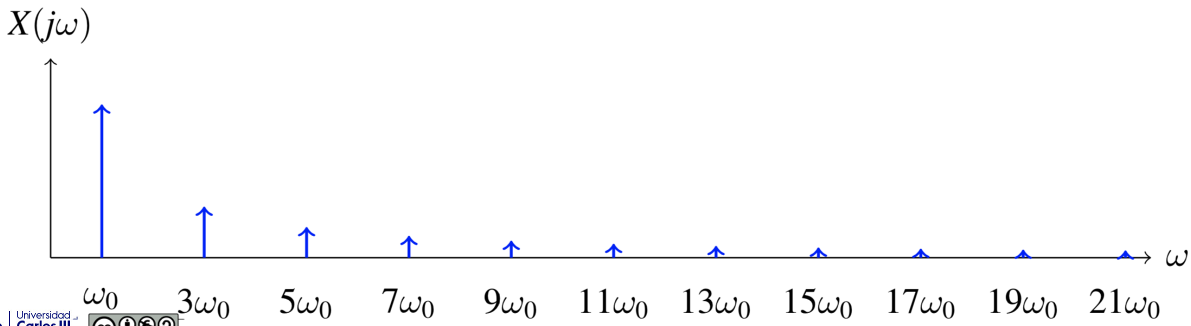
$$\sum_{\substack{k=-11\\ k\ impar}}^{11} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1\\ k\ impar}}^{11} \frac{4}{\pi k} \sin(k\omega_0 t);$$



Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo

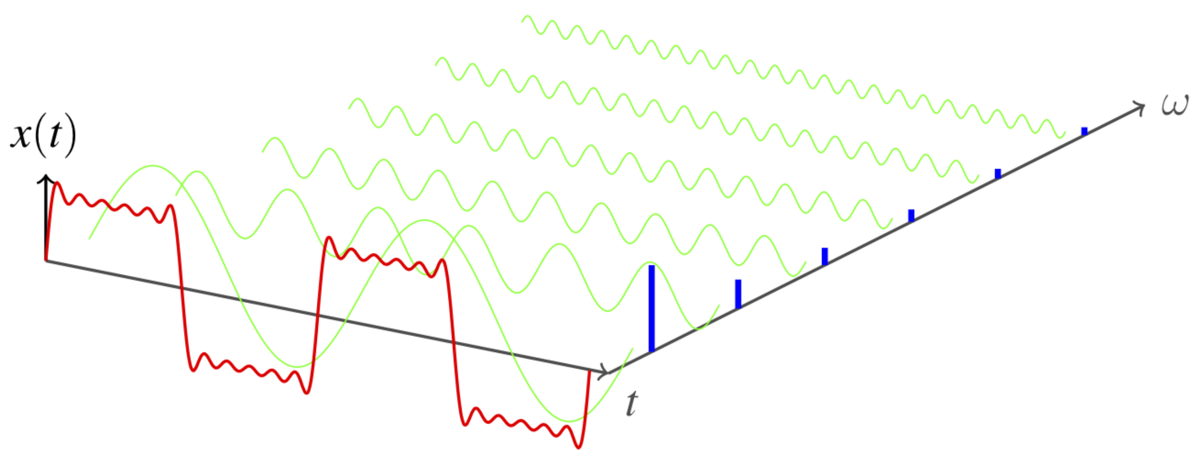


$$\sum_{\substack{k=-21 \\ k \text{ impar}}}^{21} \frac{2}{j\pi k}\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{21} \frac{4}{\pi k}\sin(k\omega_0 t);$$



Desarrollo en Serie de Fourier - Ejemplo

- Representación tiempo/frecuencia
  - Expansión incluyendo hasta el armónico 11 (en $11\omega_0$)



Propiedades de la Serie de Fourier

Propiedad	Señal	Coeficientes
	$x(t)$	a_k
	$y(t)$	b_k
Linealidad	$Ax(t)+By(t)$	Aa_k+Bb_k
Desplazamiento	$x(t-t_0)$	$e^{-jk\omega_0 t_0}\ a_k$
Abatimiento	$x(-t)$	a_{-k}
Escalado temporal	$x(\ell t)$	a_k (ver †)
Producto	$x(t)y(t)$	$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell b_{k-\ell}$
Conjugación	$x^*(t)$	a_{-k}^*
Derivada	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0\ a_k$
Integral	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau$ Sólo periódica si $a_0=0$	$\frac{1}{jk\omega_0} a_k$
Relación de Parseval	$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2\ dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \lvert a_k\rvert^2$	

†: la frecuencia fundamental cambia, $x(\ell t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ e^{jk(\ell\omega_0)t}$

Coeficientes para señales reales

- Derivan de la condición $x^*(t) = x(t)$
- Coeficientes para una señal real

$$a_k = a_{-k}^*, \text{ que implica } |a_k| = |a_{-k}|$$

- Coeficientes para una señal real y par

$$a_k \in \boldsymbol{R}, \quad a_k = a_{-k} \text{ (reales y pares)}$$

- Coeficientes para una señal imaginaria e impar

$$a_k^* \in \boldsymbol{R}, \quad a_k = -a_{-k} \text{ (imaginarios e impares)}$$

Transformada de Fourier

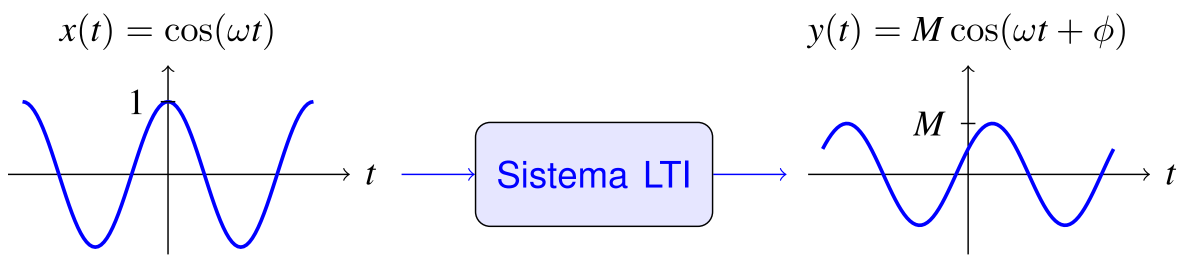
- Estensión del desarrollo en serie de Fourier para señales no periódicas

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j\omega n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\ e^{j\omega n}\ d\omega$$

$X\left(e^{j\omega}\right)$ es una función periódica de período 2π

Respuesta en frecuencia de un sistema



- Sistema lineal e invariante en el tiempo
  - Entrada: señal sinusoidal con una frecuencia ω rad/s.
  - Salida: sinusoide
    - ⋆ Misma frecuencia
    - ⋆ Posible amplitud diferente ($\times M$)
    - ⋆ Posible fase diferente ($+\phi$)
- Respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante
  - Representación de la amplitud M y de la fase ϕ en función de la frecuencia ω

Cálculo de la respuesta en frecuencia de un sistema

- Varios métodos son posibles
  - Convolución con $x(t) = \cos(\omega t)$, y solución de los valores de M y ϕ para cualquier frecuencia ω
  - Método de autovalores y autofunciones (autovectores)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema}\\ \text{LTI}\end{array}} \longrightarrow \lambda\, x(t)$$

$x(t)$: autofunción

λ : autovalor

- Autovectores para sistemas en tiempo continuo y discreto

$$x(t) = e^{st}, \quad x[n] = z^n$$

- Salida para sistemas con respuestas $h(t)$ o $h[n]$ (autovalores)

$$y(t) = x(t) * h(t) = H(s)\ e^{st}, \quad y[n] = x[n] * h[n] = H(z)\ z^n$$

Cálculo de $H(s)$ y $H(z)$

- Sistema continuo

$$\begin{aligned} y(t) =& x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\underbrace{e^{s(t-\tau)}}_{e^{st}e^{-s\tau}}d\tau \\ =& e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s) \end{aligned}$$

  - Autovalor: Tranformada de Laplace de $h(t)$: $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

- Sistema discreto

$$\begin{aligned} y[n] =& x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\ x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\ z^{n-k} \\ =& z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\ z^{-k} = z^n H(z) \end{aligned}$$

  - Autovalor: Transformada z de $h[n]$: $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\ z^{-k}$

Respuesta del sistema a una sinusoide continua

- Fórmula de Euler para una sinusoide
$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$
- Salida del sistema (en e^{st}, $s = j\omega$ y $s = -j\omega$)
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(H(j\omega)\ e^{j\omega t} + H(-j\omega)\ e^{-j\omega t}\right)$$
  - Para un canal real, $h(t) \in \boldsymbol{R}$
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt, \quad H(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t}dt = (H(j\omega))^*$$
- Salida del sistema
$$\begin{aligned} y(t) =& \text{Re}\left\{H(j\omega)\ e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{|H(j\omega)|\ e^{\angle H(j\omega)}\ e^{j\omega t}\right\} \\ =& |H(j\omega)| \text{Re}\left\{e^{\angle H(j\omega)}\ e^{j\omega t}\right\} = |H(j\omega)|\ \cos\left(\omega t + \angle H(j\omega)\right) \end{aligned}$$

Respuesta en frecuencia: $H(j\omega) \equiv M\ e^{j\phi}$

Respuesta del sistema a una sinusoide discreta

- Fórmula de Euler para una sinusoide
$$x[n] = \cos(\omega n) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}\right)$$
- Salida del sistema (en z^n, $z = e^{j\omega}$ y $z = e^{-j\omega}$)
$$y[n] = \frac{1}{2}\left(H\left(e^{j\omega}\right)\ e^{j\omega n} + H\left(e^{-j\omega}\right)\ e^{-j\omega n}\right)$$
  - Para un canal real, $h[n] \in \boldsymbol{R}$
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}, \quad H\left(e^{-j\omega}\right) = \int_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j\omega n} = \left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)^*$$
- Salida del sistema
$$\begin{aligned} y[n] =& \text{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\ e^{j\omega n}\right\} = \text{Re}\left\{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\ e^{\angle H\left(e^{j\omega}\right)}\ e^{j\omega n}\right\} \\ =& \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \text{Re}\left\{e^{\angle H\left(e^{j\omega}\right)}\ e^{j\omega n}\right\} = \left|\left(e^{j\omega}\right)\right|\ \cos\left(\omega n + \angle H\left(e^{j\omega}\right)\right) \end{aligned}$$

Respuesta en frecuencia: $H\left(e^{j\omega}\right) \equiv M\ e^{j\phi}$

Respuesta en frecuencia - Transformada de Fourier

- Sistema continuo: $H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \mathcal{FT}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\; e^{-j\omega t}\; dt$$

- Sistema discreto: $H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H\left(e^{j\omega}\right)$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{FT}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\; e^{-j\omega n}$$

Propiedades de la Transformada de Fourier $X(j\omega)$

Propiedad	Señal	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$y(t)$	$Y(j\omega)$
Linealidad	$Ax(t)+By(t)$	$AX(j\omega)+BY(j\omega)$
Desplazamiento	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\; X(j\omega)$
Abatimiento	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Escalado temporal	$x(\ell t)$	$\frac{1}{\lvert\ell\rvert}X\left(j\frac{\omega}{\ell}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Producto	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
Producto por t	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
Derivada	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega\; X(j\omega)$
Integral	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\; d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

Relación de Parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\; dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\; d\omega$

La energía de una señal se puede calcular en los dos dominios, tiempo y frecuencia, a través de la integral del módulo al cuadrado

Dualidad: Si $g(t) \overset{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} f(j\omega)$ entonces $f(t) \overset{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} 2\pi g(-j\omega)$

Pares transformados

$x(t)$	$X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\ \delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\ \delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\ \delta(\omega-\omega_0)+\pi\ \delta(\omega+\omega_0)$
$\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\ \delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\ \delta(\omega+\omega_0)$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ \Lambda\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$u(t)$	$\pi\ \delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$\frac{1}{2}\delta(t)+j\frac{1}{2\pi t}$	$u(\omega)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$

Propiedades de la Transformada de Fourier $X\left(e^{j\omega}\right)$

Propiedad	Señal	Transformada
	$x[n]$	$X\left(e^{j\omega}\right)$
	$y[n]$	$Y\left(e^{j\omega}\right)$
Linealidad	$Ax[n]+By[n]$	$AX\left(e^{j\omega}\right)+BY\left(e^{j\omega}\right)$
Desplazamiento	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}\ X\left(e^{j\omega}\right)$
Abatimiento	$x[-n]$	$X\left(e^{-j\omega}\right)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*\left(e^{-j\omega}\right)$
Expansión temporal	$x_\ell[n]^\dagger$	$X\left(e^{j\ell\omega}\right)$
Convolución	$x[n]*y[n]$	$X\left(e^{j\omega}\right)Y\left(e^{j\omega}\right)$
Producto	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\theta}\right)Y\left(e^{-j(\omega-\theta)}\right)d\theta$
Producto por n	$nx[n]$	$j\frac{d}{d\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$
Diferenciación	$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$
Acumulación	$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X\left(e^{j\omega}\right)+\pi X\left(e^{j0}\right)\sum_k\delta(\omega-2\pi k)$

Relación de Parseval: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$

Periodicidad: $X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$

† Señal expandida o interpolada por ℓ: $x_\ell[n]=\begin{cases}x[n/\ell], & \text{si } n/\ell\in\mathbb{Z}\\ 0, & \text{si } n/\ell\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

Propiedades para señales reales

- Derivan de la condición $x^*(t) = x(t)$ o $x^*[n] = x[n]$
- Transformada para una señal real

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega), \text{ que implica } |X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X^*\left(e^{-j\omega}\right), \text{ que implica } |X\left(e^{j\omega}\right)| = |X\left(e^{j\omega}\right)|$$

- Transformada para una señal real y par

$$X(j\omega) \in \boldsymbol{R}, \quad X(j\omega) = X(-j\omega) \text{ (real y par)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) \in \boldsymbol{R}, \quad X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{-j\omega}\right) \text{ (real y par)}$$

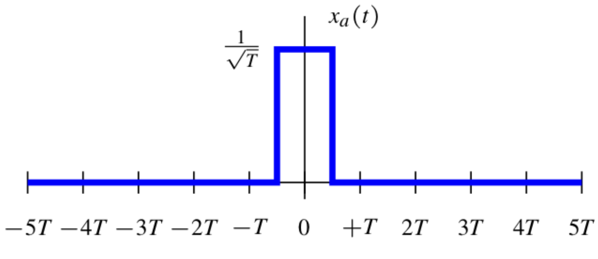
- Transformada para una señal imaginaria e impar

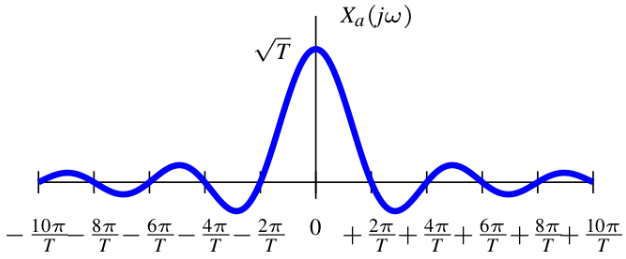
$$X^*(j\omega) \in \boldsymbol{R}, \quad X(j\omega) = -X(-j\omega) \text{ (imaginaria e impar)}$$

$$X^*\left(e^{j\omega}\right) \in \boldsymbol{R}, \quad X\left(e^{j\omega}\right) = -X\left(e^{-j\omega}\right) \text{ (imaginaria e impar)}$$

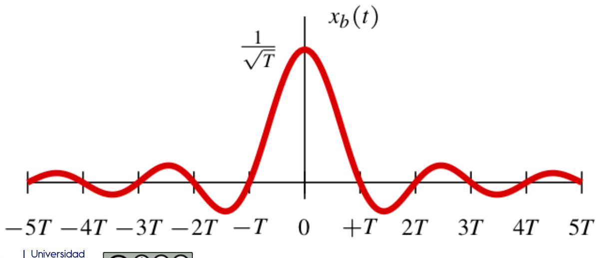
Propiedad de dualidad: ejemplos

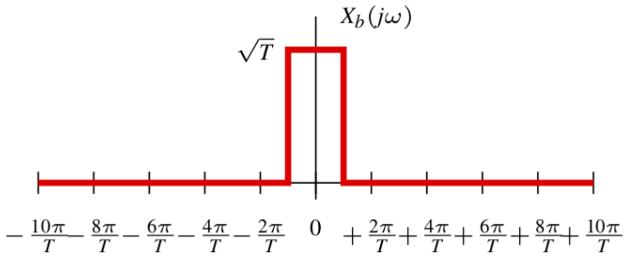
$$x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} X_a(j\omega) = \sqrt{T}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



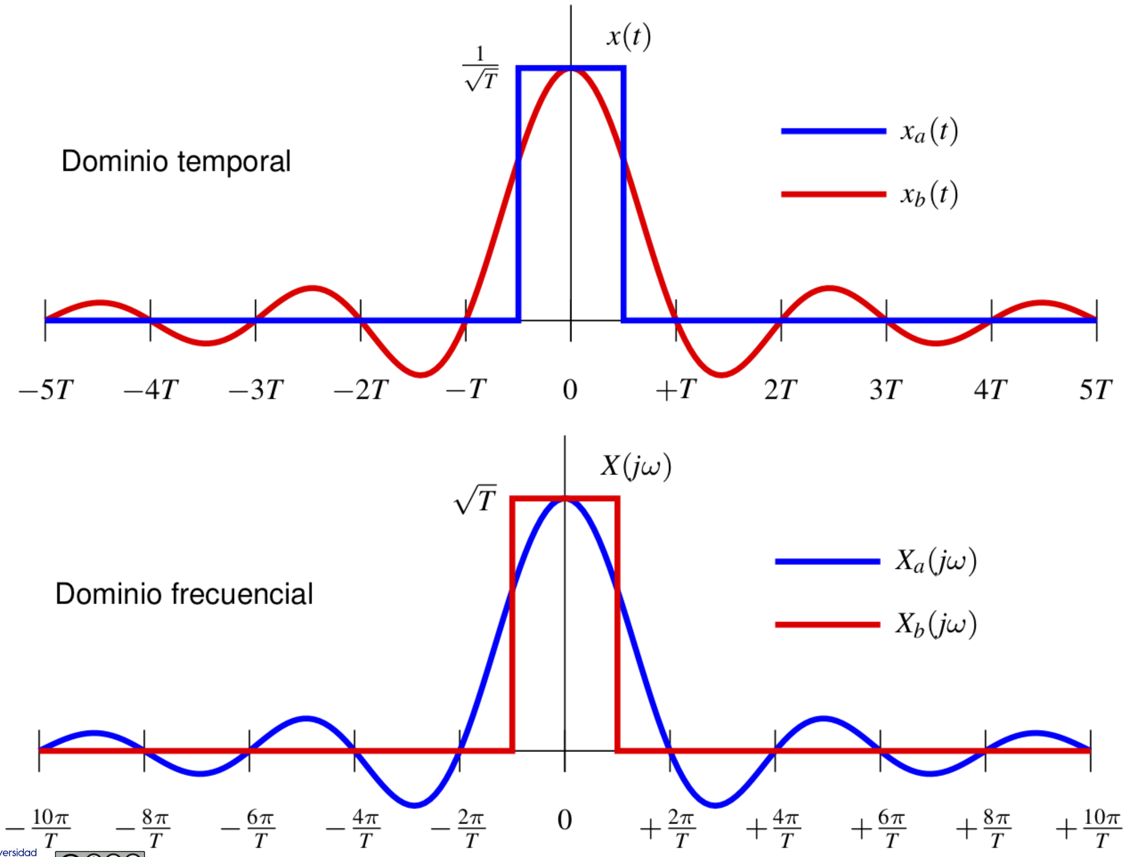


$$x_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} X_b(j\omega) = \sqrt{T}\,\Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

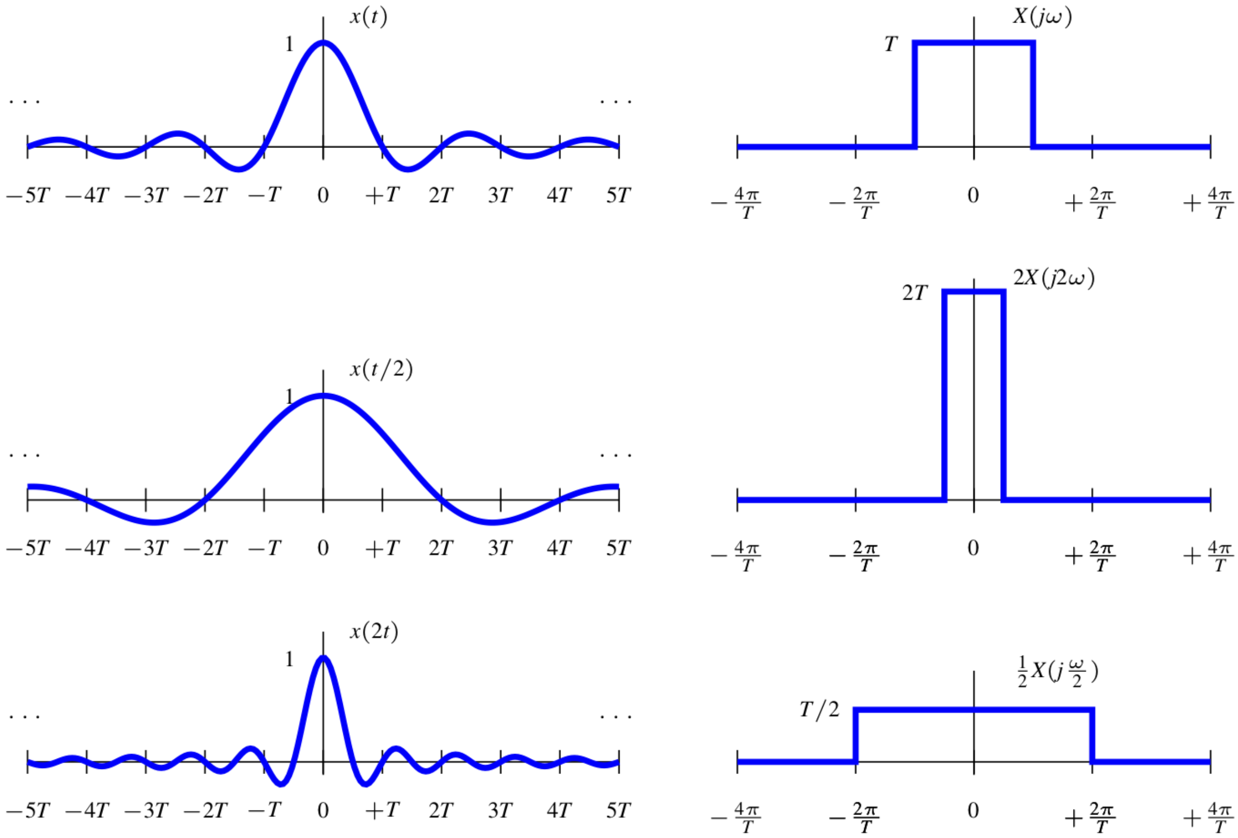




Propiedad de dualidad: ejemplos (II)



Expansión/compresión



Transformada discreta de Fourier (DFT)

- DFT: *Discrete Fourier Transform*
- Se aplica a una secuencia discreta de N muestras

$$x[n], \quad n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

  - La DFT tiene N muestras

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

- Transformada inversa (IDFT)

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

- Algoritmos rápidos: FFT (*Fast Fourier Transform*)
  - Aplicable si $N = 2^m$, con $m \in \mathbb{Z}$

Propiedades de la Transformada discrete de Fourier $X[k]$

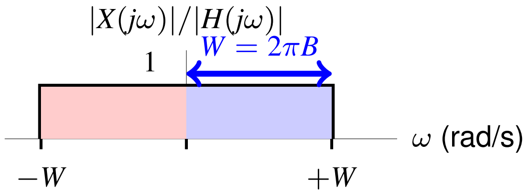
Propiedad	Señal	Transformada
	$x[n]$	$X[k]$
	$y[n]$	$Y[k]$
Linealidad	$Ax[n] + By[n]$	$AX[k] + BY[k]$
Desplazamiento	$x[n-n_0]\big\|_N$	$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}\, X[k]$
Abatimiento	$x[N-n]$	$X[N-k]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*[N-k]$
Convolución circular	$x[n] \circledast y[n]\big\|_N$	$X[k]Y[k]$
Producto	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{N}X[k] \circledast Y[k]\big\|_N$
Parte real (tiempo)	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}\,(X[k] + X^*[N-k])$
Parte imaginaria (tiempo)	$\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{j2}\,(X[k] - X^*[N-k])$
Parte real (frecuencia)	$\frac{1}{2}\,(x[n] + x^*[N-n])$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
Parte imaginaria (frecuencia)	$\frac{1}{j2}\,(x[n] - x^*[N-n])$	$\mathcal{I}m\{X[k]\}$

Parseval: $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2, \quad \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y^*[k]$

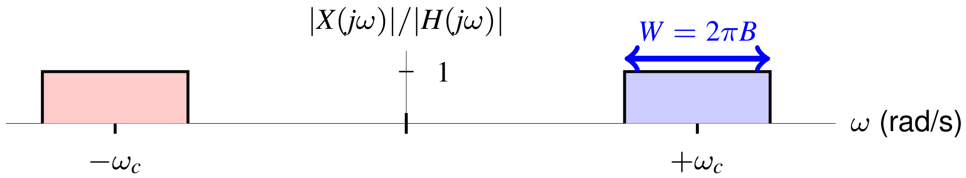
Periodicidad: $X[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = X[k]$

Ancho de banda de una señal/sistema

- Señal/sistema en banda base
  - Respuesta en frecuencia centrada en 0 Hz
- Señal/sistema paso banda
  - Respuesta en frecuencia centrada en la frecuencia central f_c Hz (o equivalentemente en $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s)
- Ancho de banda (B Hz, o $W = 2\pi B$ rad/s)
  - Rango de frecuencias positivas utilizadas o disponibles



Señal/sistema en banda base



Señal/sistema paso banda (frecuencia central ω_c rad/s)

Convolución: alternativa en el dominio de la frecuencia

$$x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right), \quad y(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$X(j\omega) = T\,\Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right), \quad Y(j\omega) = T\,\Lambda\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

- Convolucionar dos señales en muchos casos puede ser complicado

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau/T)}{\pi\tau/T} \frac{\sin^2(\pi(t-\tau)/T)}{(\pi(t-\tau)/T)^2} d\tau = ?? \end{aligned}$$

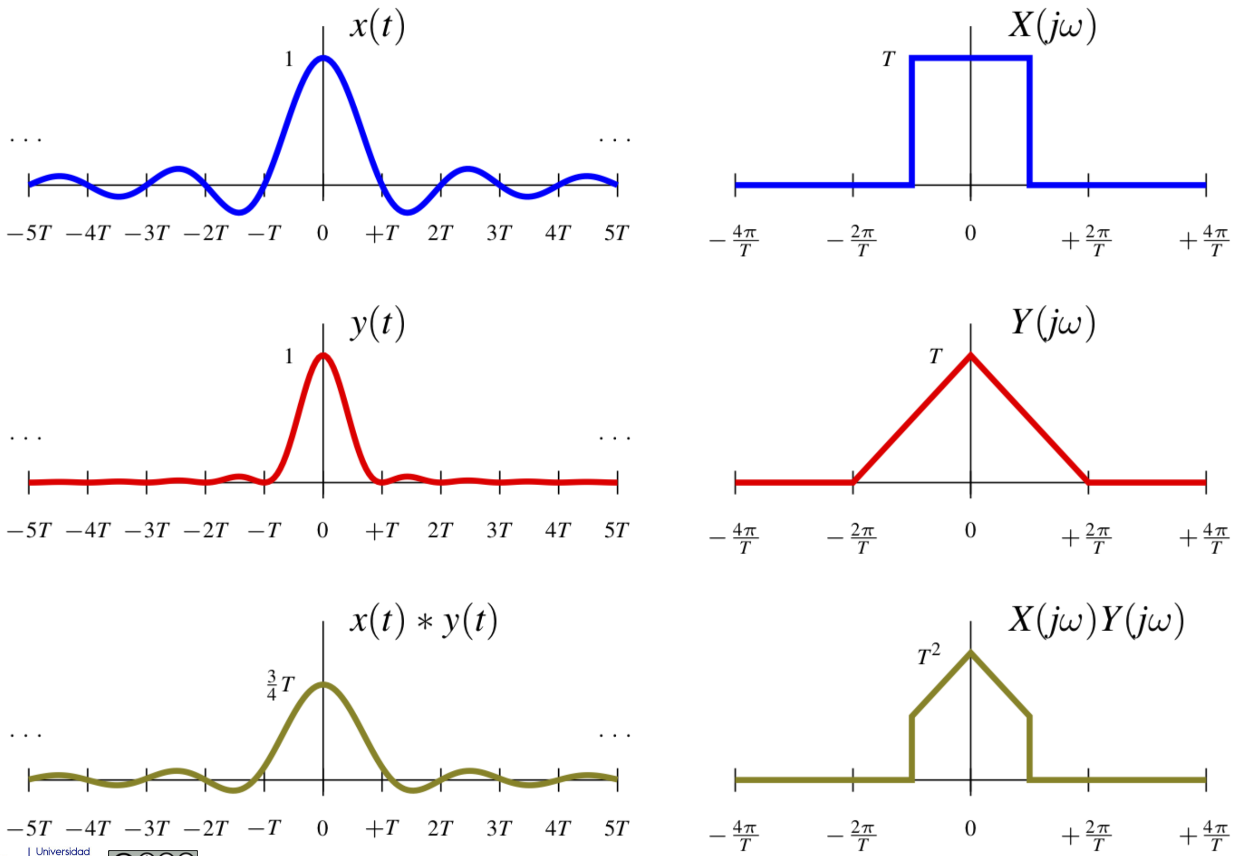
- Multiplicar dos funciones es relativamente simple

$$Z(j\omega) = X(j\omega)Y(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\Lambda\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = \frac{T^2}{2}\Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) + \frac{T^2}{2}\Lambda\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

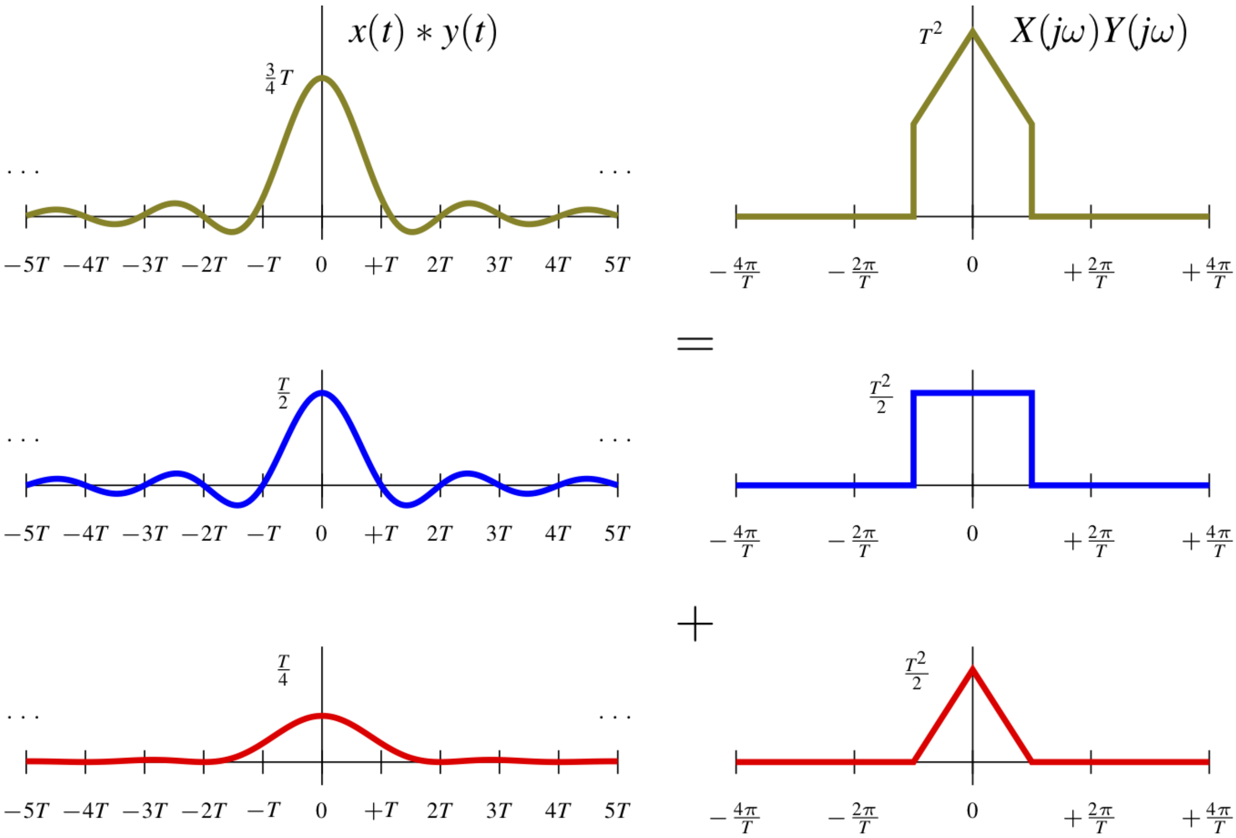
- Alternativa para calcular la convolución de dos señales

$$z(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{Z(j\omega)\} = \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{T}{4}\text{sinc}^2\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Convolución de señales - Ejemplo



Convolución de señales - Ejemplo (II)

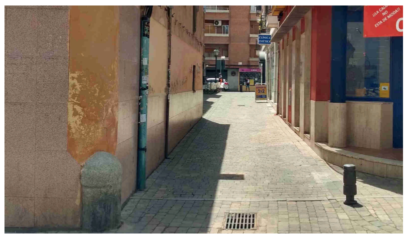


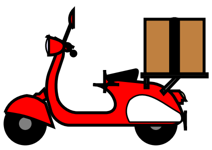
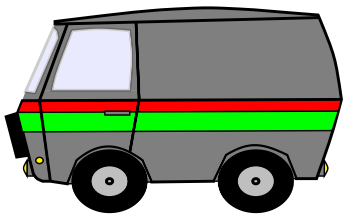
Análisis de sistemas en el dominio frecuencial

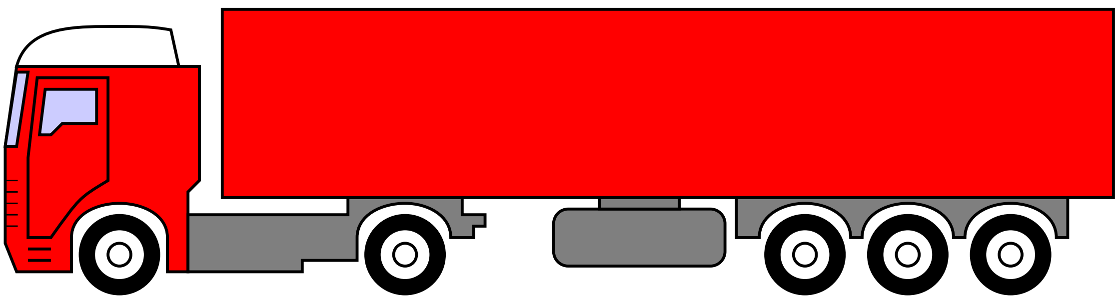
$$\xrightarrow[X(j\omega)]{x(t)} \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(j\omega) \end{matrix}} \xrightarrow[Y(j\omega)\,=\,X(j\omega)H(j\omega)]{y(t)\,=\,x(t)*h(t)}$$

- Un sistema lineal no genera nuevas frecuencias
  - Si $X(j\omega_0) = 0$, entonces para esa frecuencia $Y(j\omega_0) = 0$
- Un sistema lineal anula las frecuencias fuera de su banda
  - Si $H(j\omega_0) = 0$, entonces para esa frecuencia $Y(j\omega_0) = 0$
- Implicación en sistemas de comunicaciones
  - La cantidad de información que se puede transmitir está limitada por el ancho de banda disponible del sistema (canal)
  - Cualquier componente frecuencial fuera de la banda de paso del canal en la señal de información a transmitir será eliminada durante la transmisión







Respuesta ideal de un sistema lineal

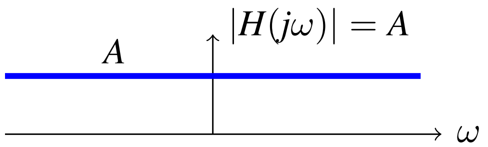
- Transmisión ideal (sin distorsión): $y(t) = A\ x(t - t_0)$
  - Atenuación
    - Toda señal electromagnética sufre una atenuación durante su transmisión
  - Retardo
    - Las ondas electromagnéticas viajan muy rápido, pero a una velocidad finita
- Respuesta al impulso de un sistema ideal

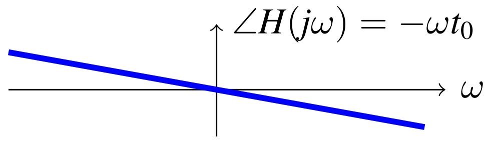
$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow h(t) = A\ \delta(t - t_0)$$

- Respuesta en frecuencia de un sistema ideal

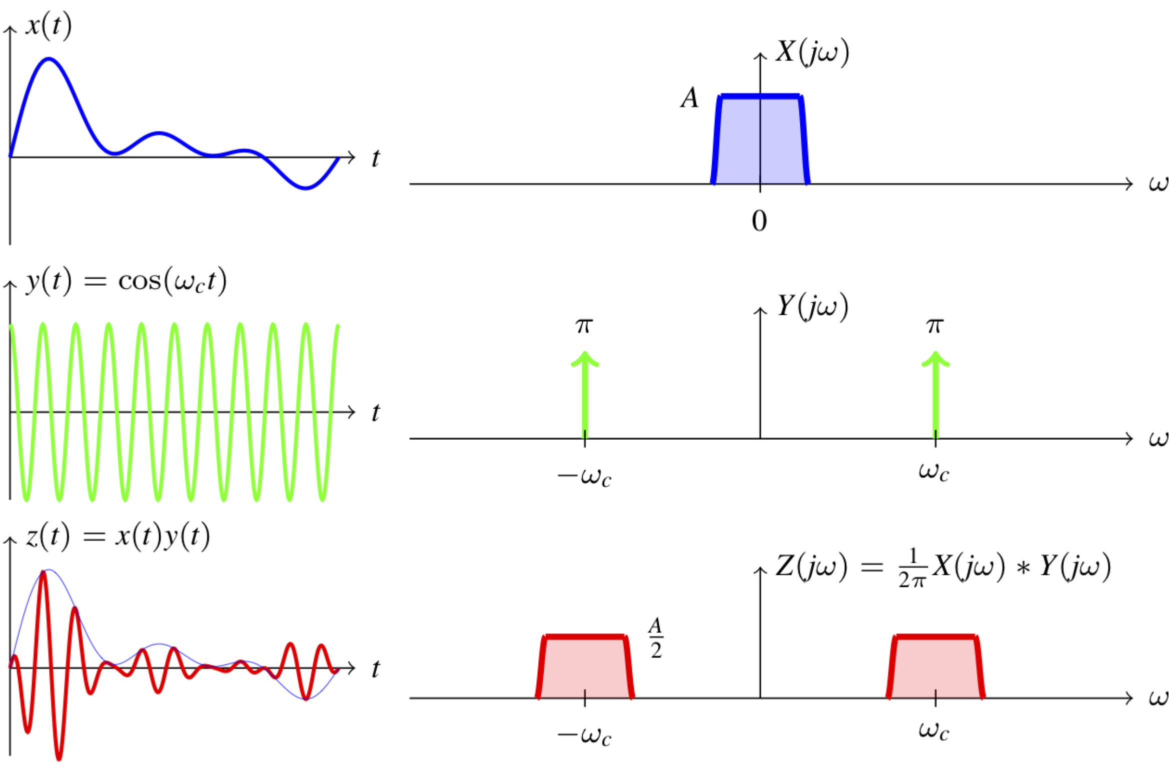
$$h(t) = A\ \delta(t - t_0) \stackrel{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} H(j\omega) = A\ e^{-j\omega t_0}$$

  - Módulo y fase de un sistema ideal
    - Módulo constante, fase lineal (pendiente dada por el retardo)





Producto por una sinusoide - Efecto en frecuencia



$$z(t) = x(t)\cos(\omega_c t) \stackrel{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} Z(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_c)$$

Producto por una sinusoide - Efecto en frecuencia (II)

$$d(t) = z(t)\cos(\omega_c t) \overset{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} D(j\omega) = \frac{1}{2}Z(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}Z(j\omega + j\omega_c)$$