uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Fundamentos de Teoría de la Señal

Máster Universitario en Internet de las Cosas:
Tecnologías Aplicadas

Capítulo 3

Filtrado y muestreo de señales

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Índice de contenidos

Escala logarítmica: decibelios

- Relación entre cantidades (medida relativa, adimensional)
  - Relación de potencias

$$\text{dB} \equiv 10\ \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

  - Relación de voltajes o intensidades

$$\text{dB} \equiv 20\ \log_{10} \frac{V_1}{V_2} \qquad \text{dB} \equiv 20\ \log_{10} \frac{I_1}{I_2}$$

  - Representación de la respuesta en frecuencia de un sistema

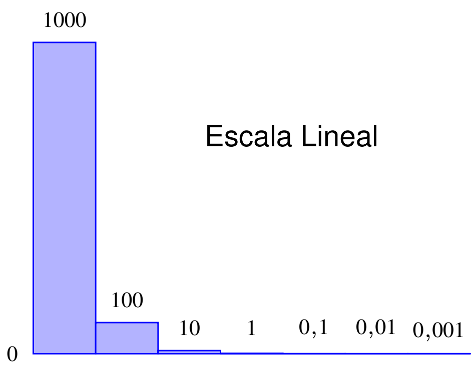
$$\text{dB} \equiv 20\ \log_{10} |H(j\omega)|$$

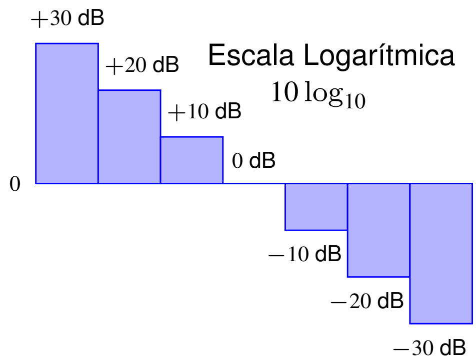
- En ocasiones miden la diferencia relativa respecto de una unidad de referencia
  - Ejemplo: Intensidad sonora (referencia: umbral de audición, 1pW)

$$\text{dB} \equiv 10\ \log_{10} \frac{P_1}{P_0} = 10\ \log_{10} \frac{P_1}{10^{-12}}$$

    - ★ Referencia: 0 dB equivalen a una potencia igual al umbral de audición, 1pW

Escala logarítmica: ejemplo gráfico





- Propiedades de la representación en decibelios
  - Productos en lineal se convierten en sumas en dB

$$A \times B \leftrightarrow 10 \log_{10}(A \times B) = 10 \log_{10} A + 10 \log_{10} B = a \text{ dB} + b \text{ dB}$$

  - Doblar/dividir por dos, en lineal, equivale a
    - ★ Sumar/restar 3 dB ($10 \log_{10}$)
    - ★ Sumar/restar 6 dB ($20 \log_{10}$)
  - Multiplicar/dividir por 10, en lineal, equivale a
    - ★ Sumar/restar 10 dB ($10 \log_{10}$)
    - ★ Sumar/restar 20 dB ($20 \log_{10}$)

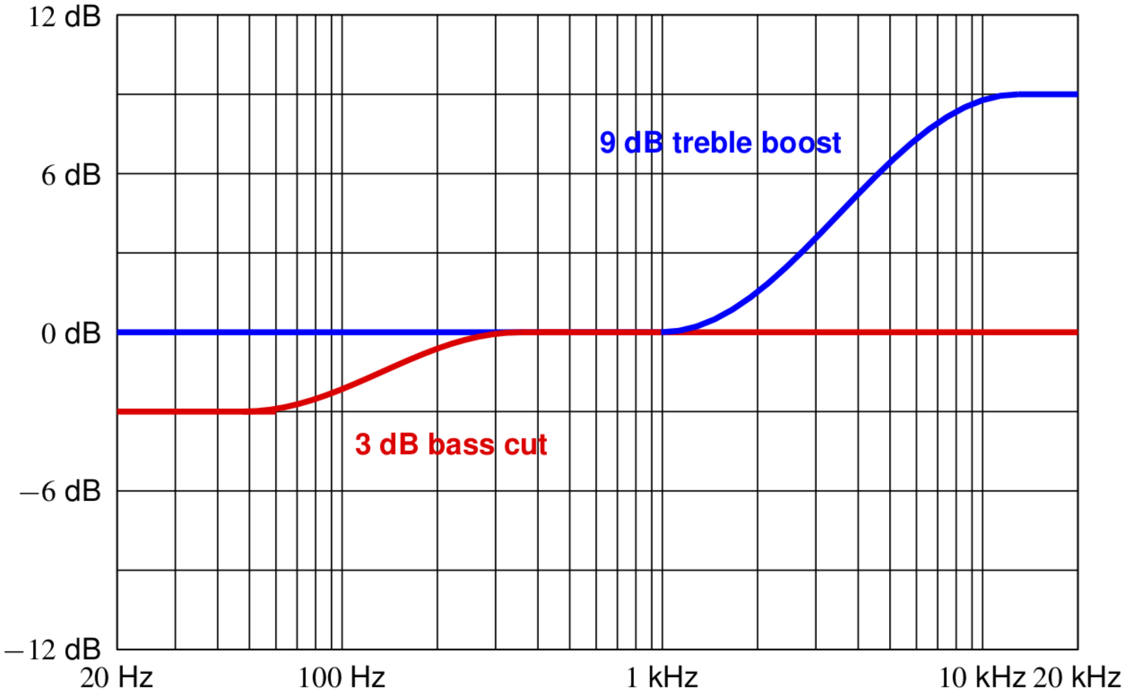
Unidades basadas en el decibelio

- dB_{SPL}: referencia de nivel de presión sonora
  - En el aire: 10 μPa
  - En el agua: 1 μPa
- dBW: referencia 1 W (potencia)
- dBm: referencia 1 mW (potencia)
- dBu: referencia $\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}7746$ V (voltaje)
  - Es la tensión que aplicada a una impedancia de 600 Ω desarrolla una potencia de 1 mW
- dBc: toma como referencia el valor de la portadora (para medir el valor de sus armónicos)
- dBI: toma como referencia una antena isotrópica

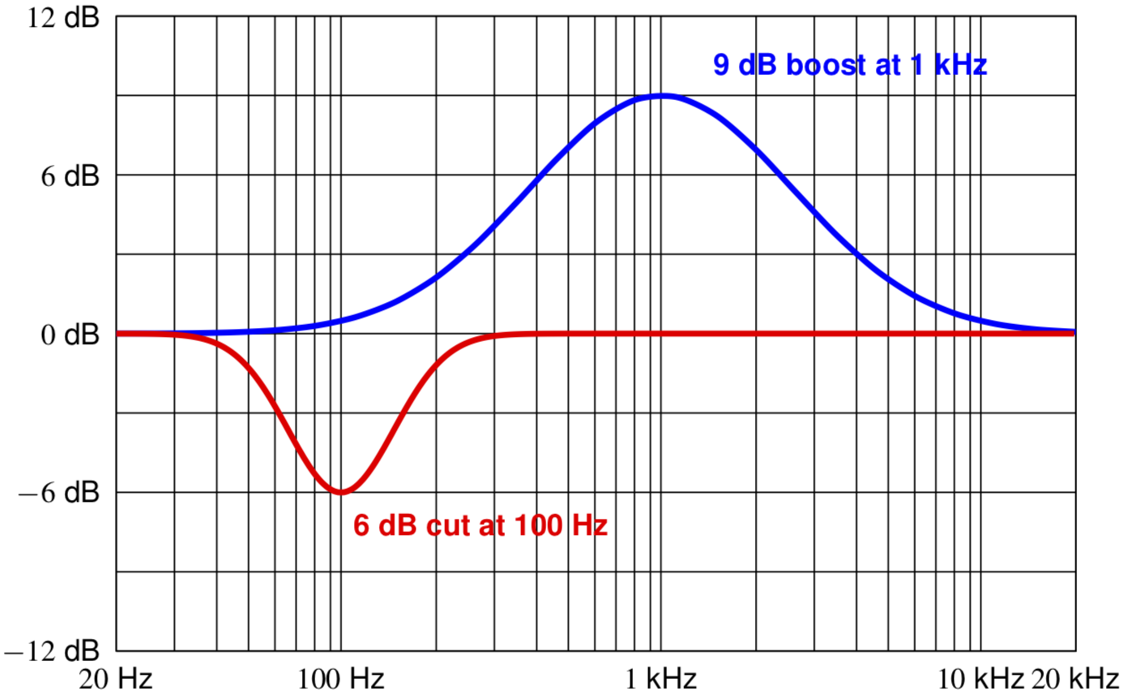
Filtrado de señales

- Filtrado conformador (en frecuencia)
  - Cambio de la forma del espectro de la señal
    - Pueden enfatizar algunas frecuencias y/o atenuar otras con distintos propósitos
  - Ejemplo: ecualización en procesado de audio
- Filtrado selectivo (en frecuencia)
  - Atenúan de manera significativa o eliminan completamente algunas bandas de frecuencias, mientras dejan pasar el resto
  - Varios tipos de filtros
    - Filtros paso bajo
    - Filtros paso alto
    - Filtros paso banda
    - Filtros de rechazo de banda

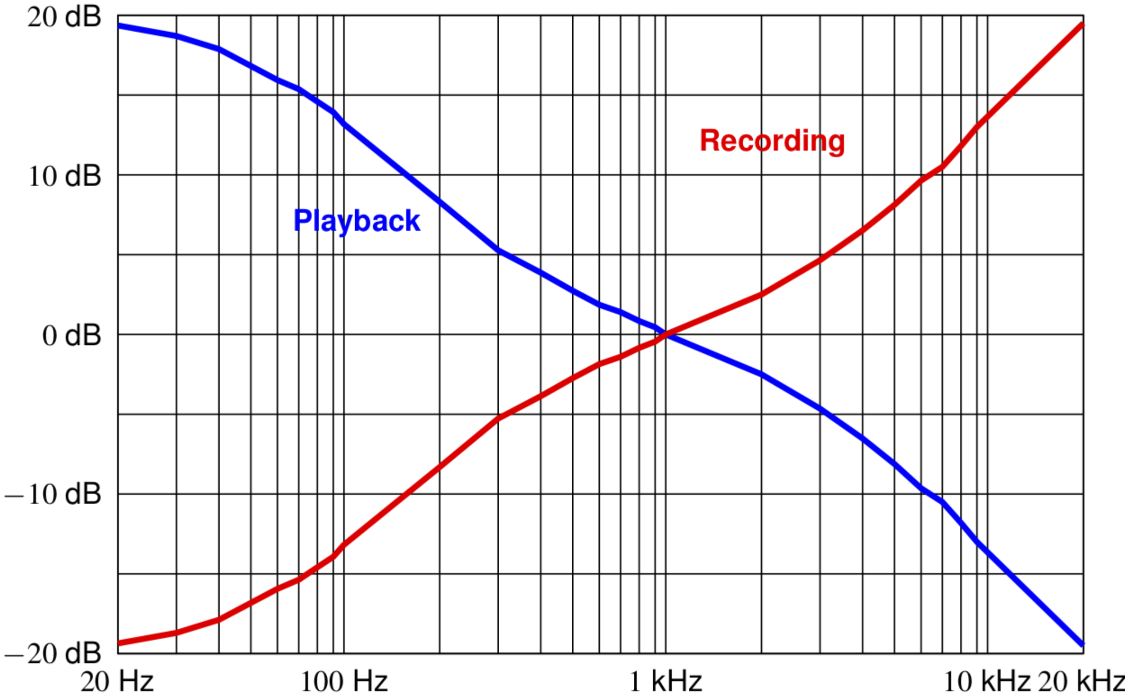
Filtros de ecualización



Filtros de ecualización



Filtro de ecualización RIAA (pre-énfasis/de-énfasis)

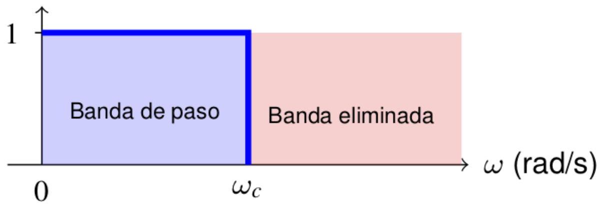


RIAA: Recording Industry Association of America

Filtrado selectivo - Tipos de filtros más comunes (ideales)

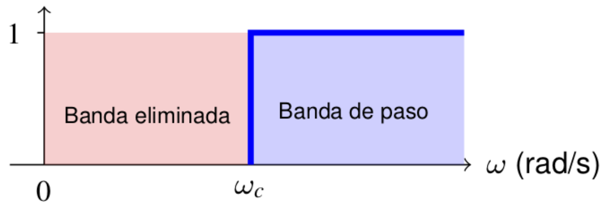
Filtro paso bajo

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



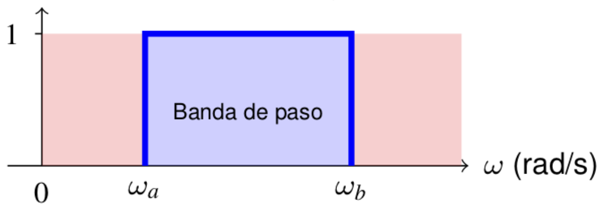
Filtro paso alto

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| > \omega_c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



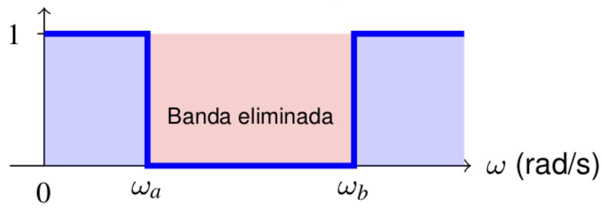
Filtro paso banda

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_a < |\omega| < \omega_b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

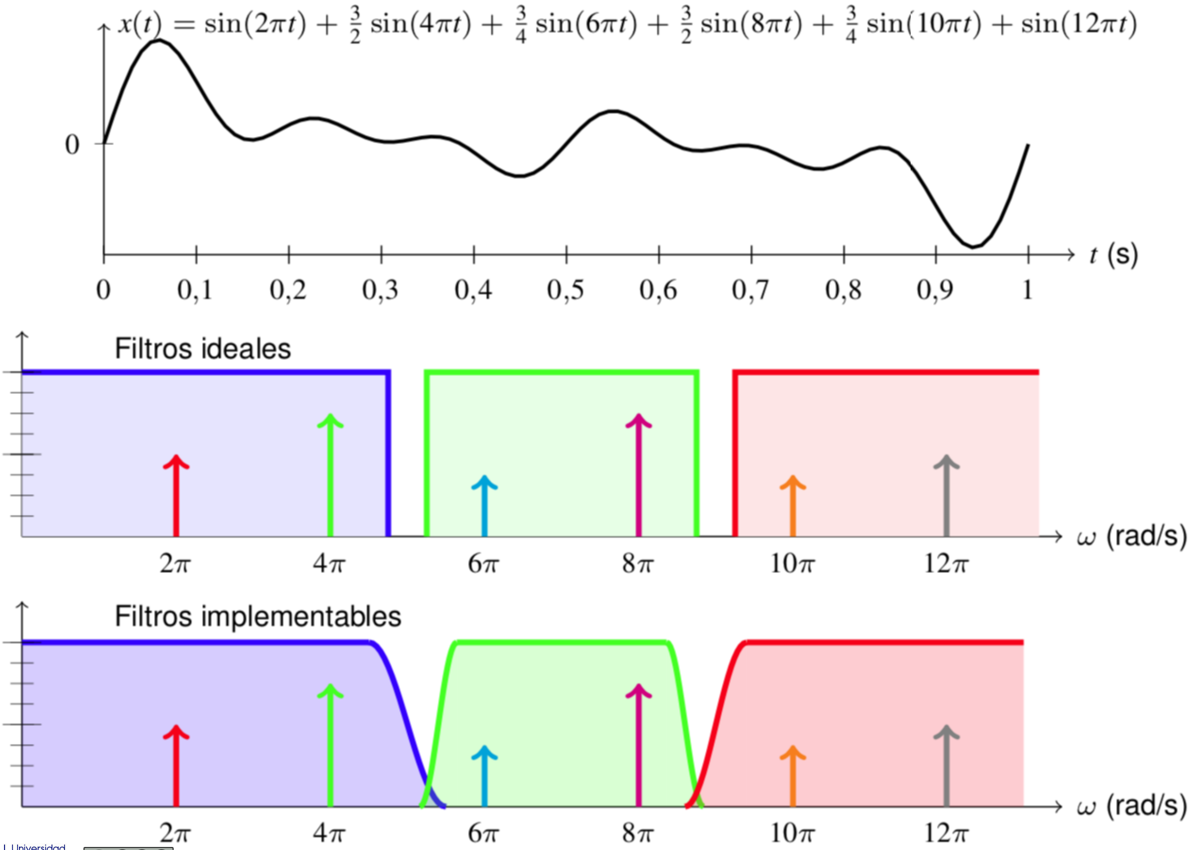


Filtro de rechazo de banda

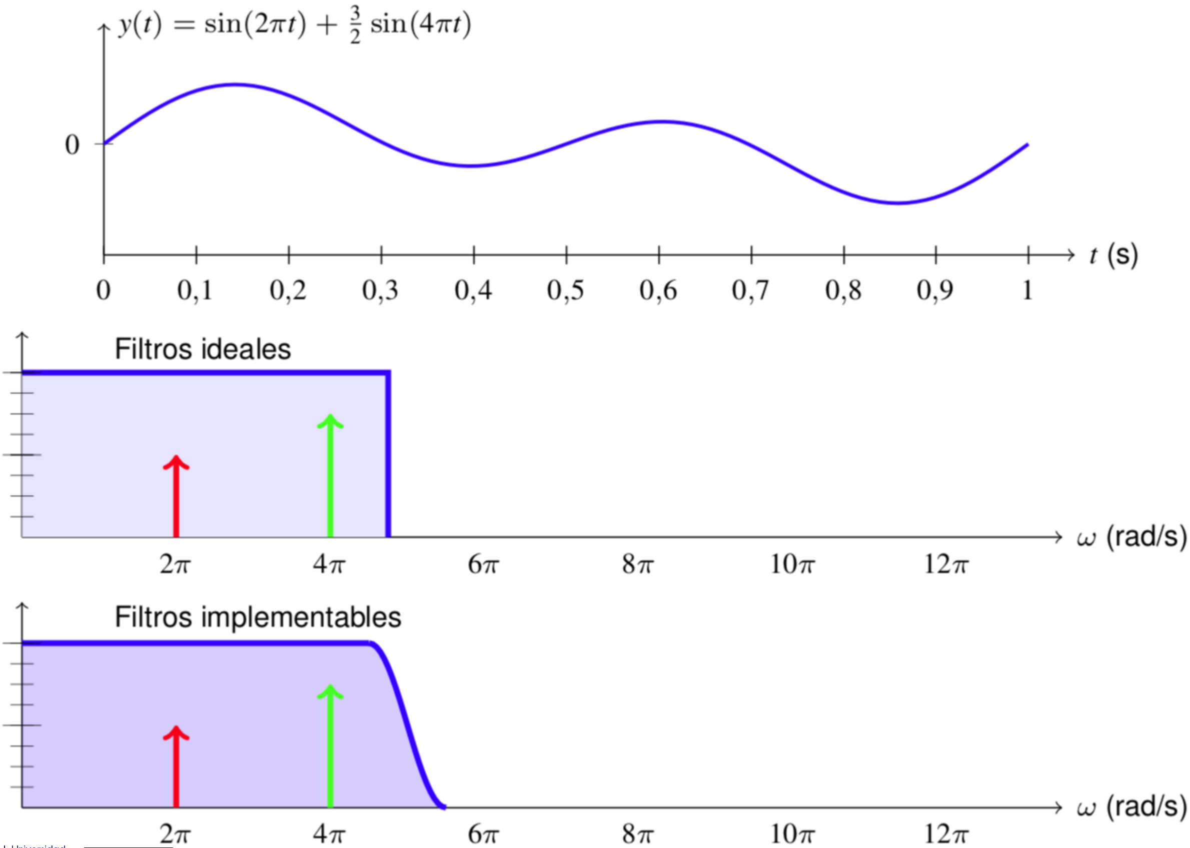
$$H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_a < |\omega| < \omega_b \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



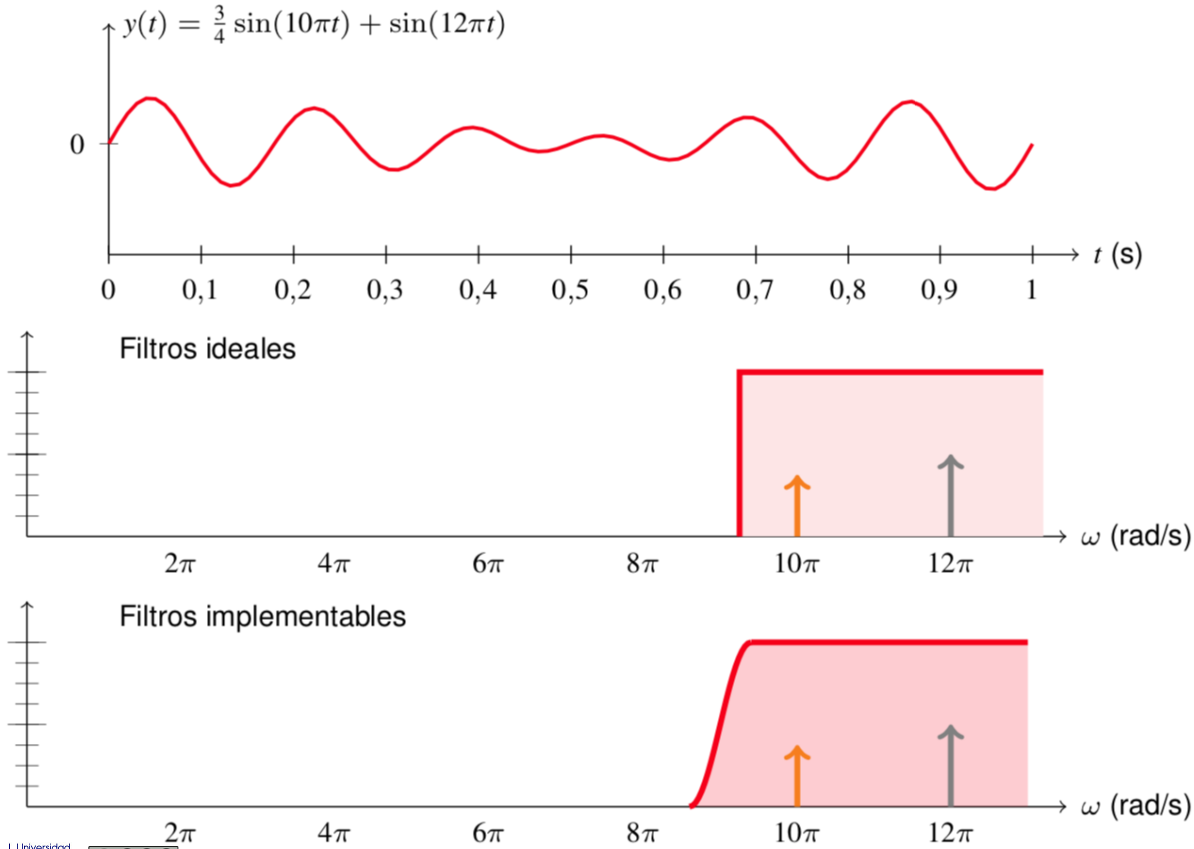
Ejemplos de filtrado selectivo de una señal



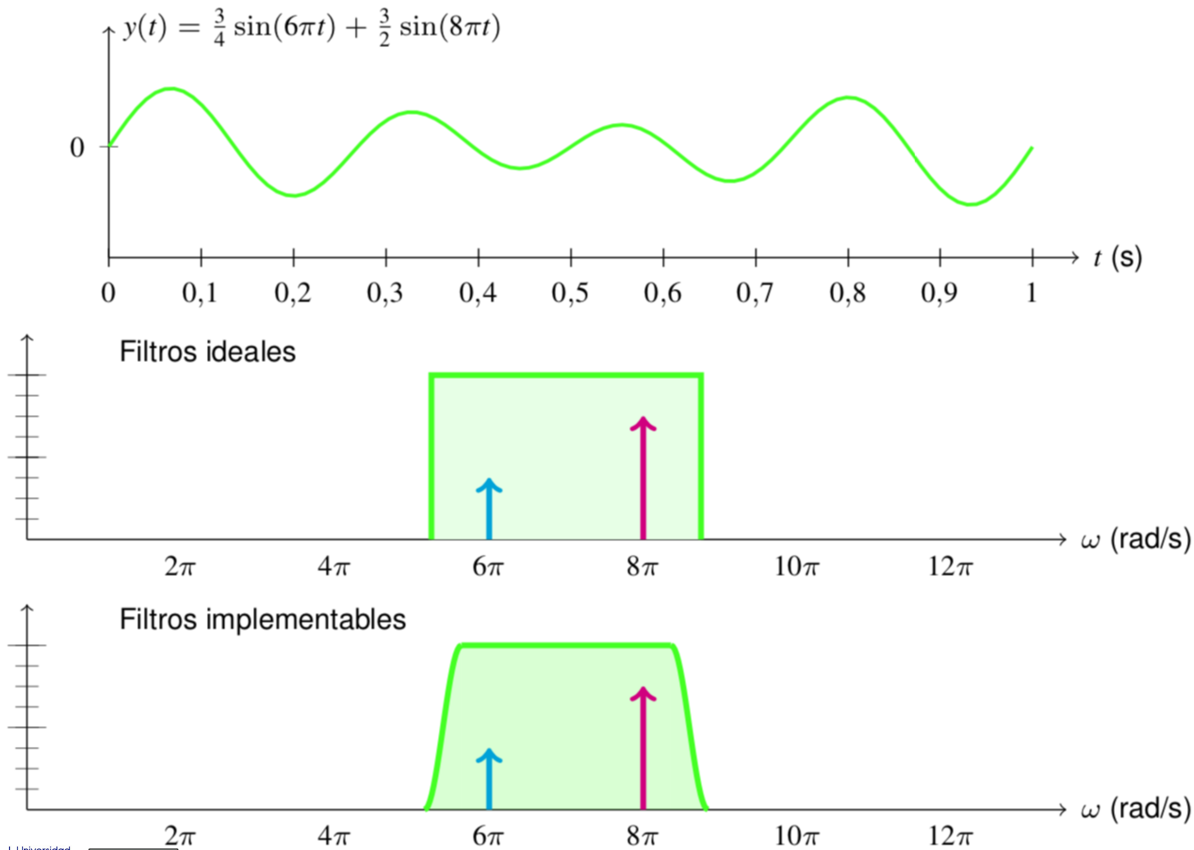
Filtrado de señales - Paso bajo



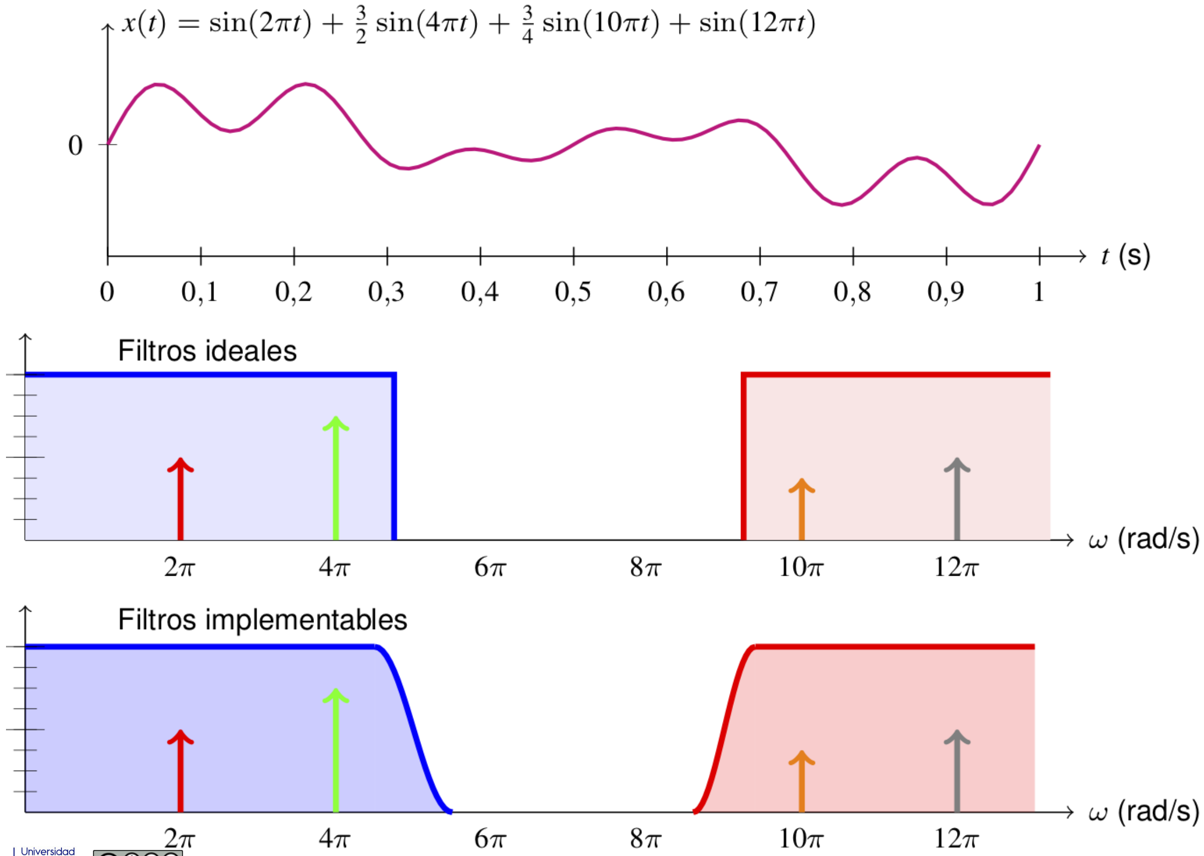
Filtrado de señales - Paso alto



Filtrado de señales - Paso banda



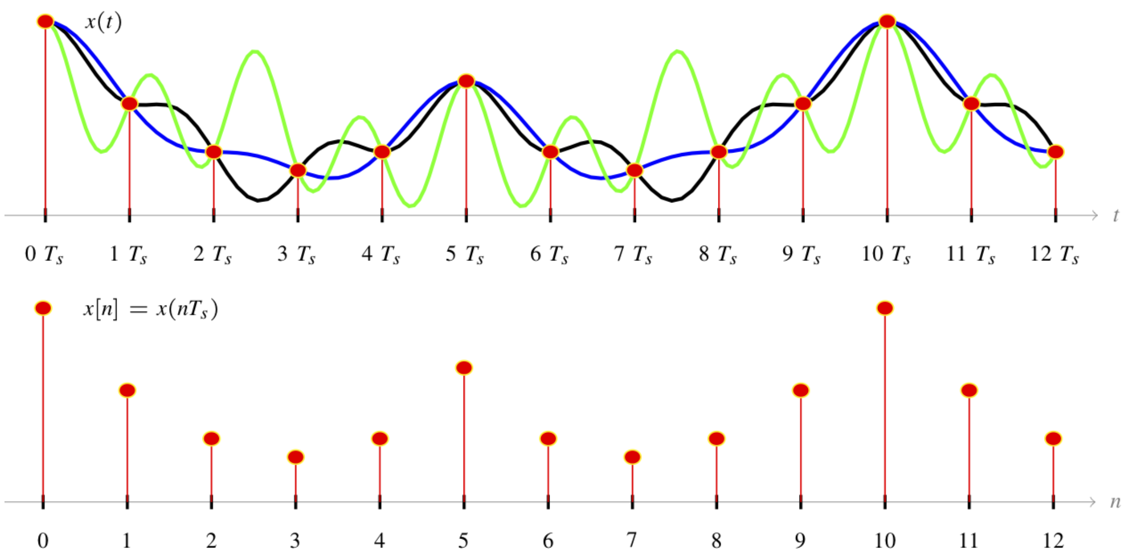
Filtrado de señales - Rechazo de banda



Muestreo de señales continuas

- Muestreo a una tasa de $f_s = \frac{1}{T_s}$ muestras/s
  - Conversión de señal en tiempo continuo a señal en tiempo discreto

$$x[n] = x(nT_s)$$



Existe un número infinito de señales que pueden generar un conjunto dado de muestras

Teorema del muestreo para señales limitadas en banda

- Señal de ancho de banda limitado a B Hz

$$X(j\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > W = 2\pi B \text{ rad/s}$$

- Teorema del muestreo para señales de ancho de banda B Hz
  - La señal $x(t)$ está unívocamente determinada por sus muestras $x(nT_s)$ si la tasa de muestreo cumple

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B \text{ muestras/s}$$

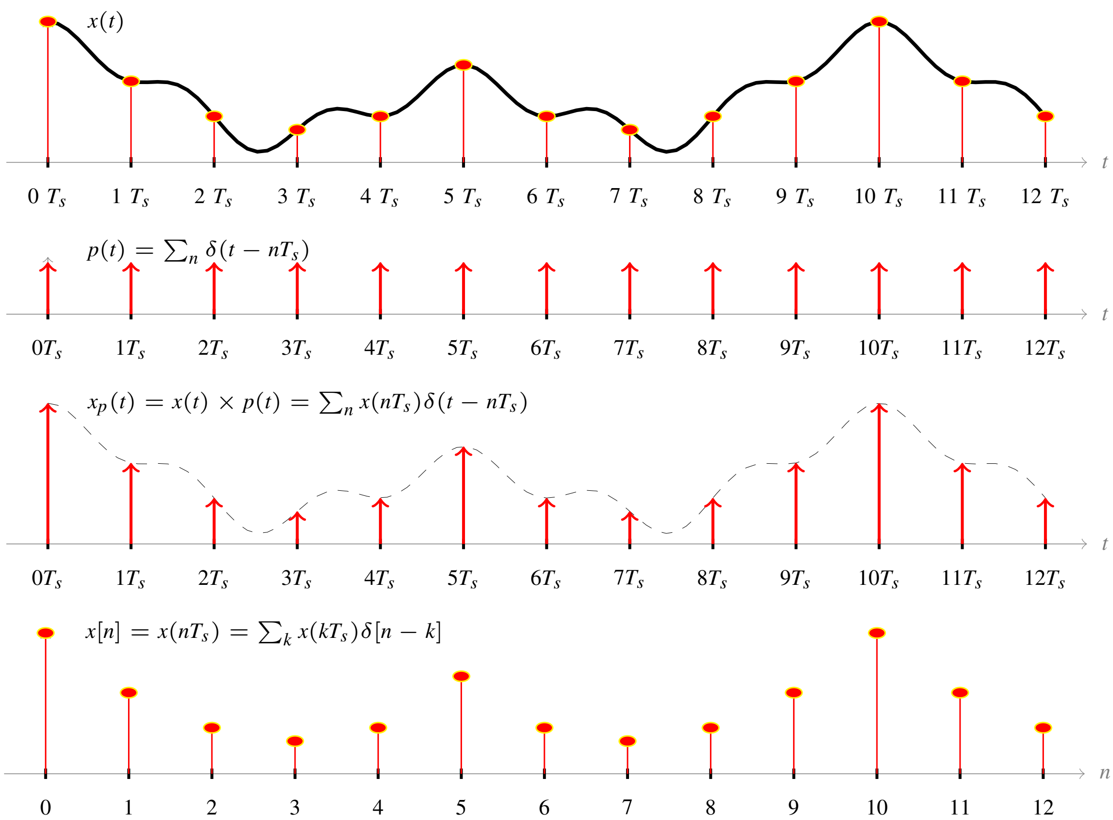
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2W \text{ rad/s}$$

  - Reconstrucción de $x(t)$: interpolación de $x[n]$ con sincs a T_s s

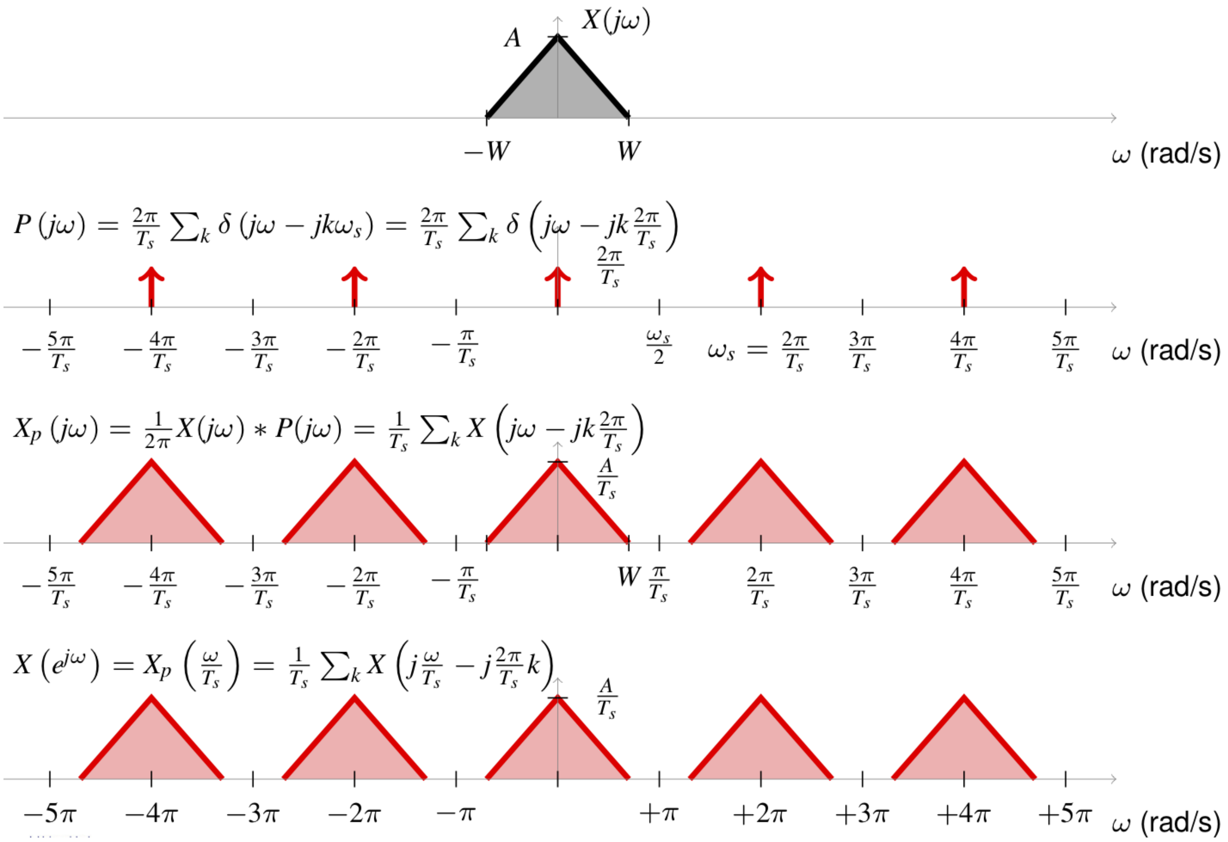
$$x_r(t) = \sum_n x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) = x(t)$$

    - ★ Equivalente a interpolar las muestras con un tren de impulsos (deltas) cada T_s s y filtrar esta señal con un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz y ganancia T_s.

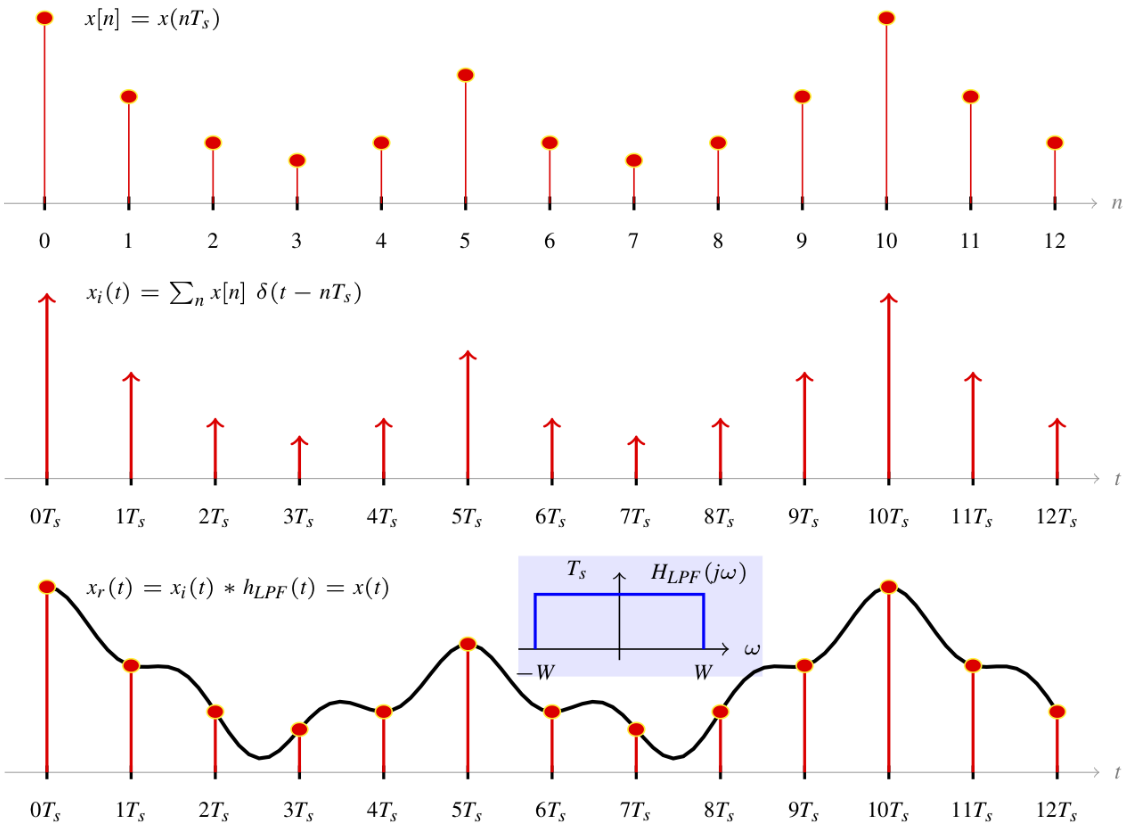
Muestreo como producto por tren de impulsos (deltas)



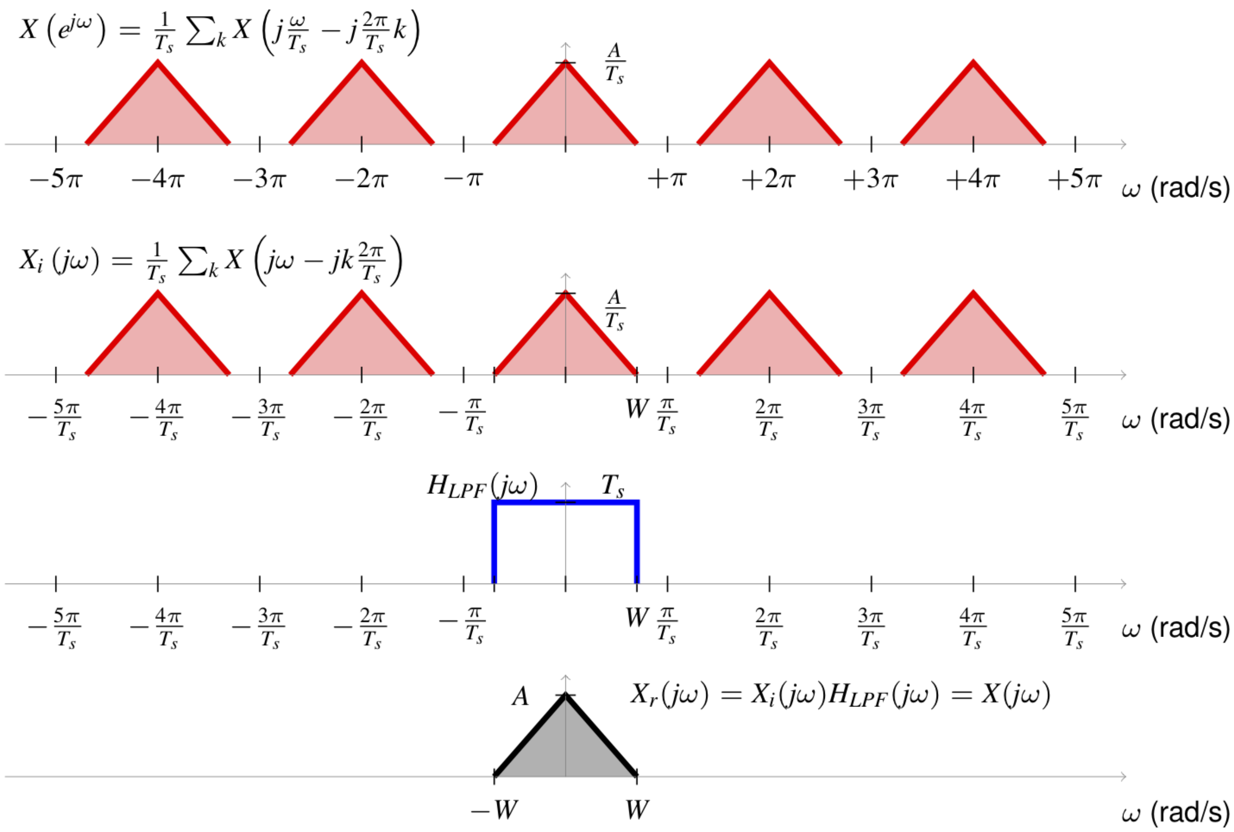
Muestreo: Análisis en el dominio de la frecuencia



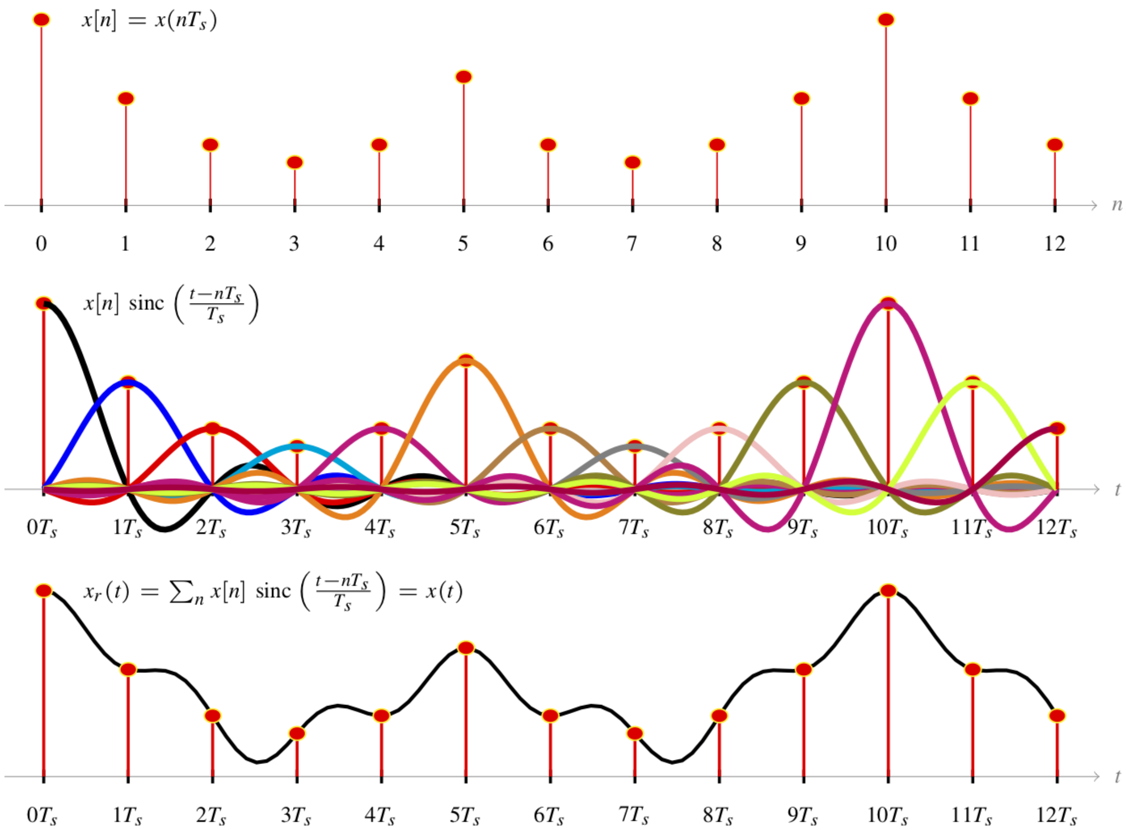
Reconstrucción: interpolación con impulsos + filtrado



Reconstrucción: Análisis en el dominio de la frecuencia



Reconstrucción: interpolación con sincs a T_s s

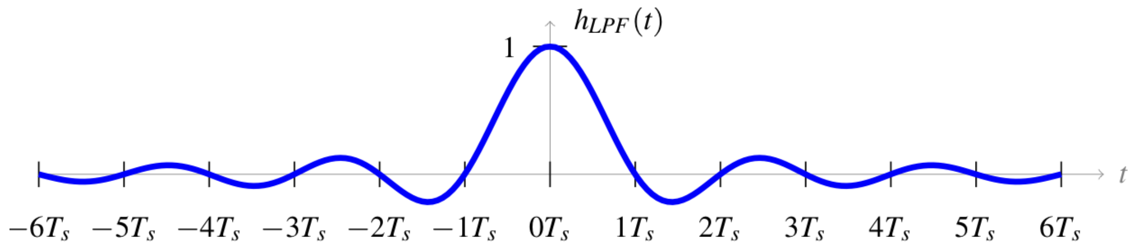


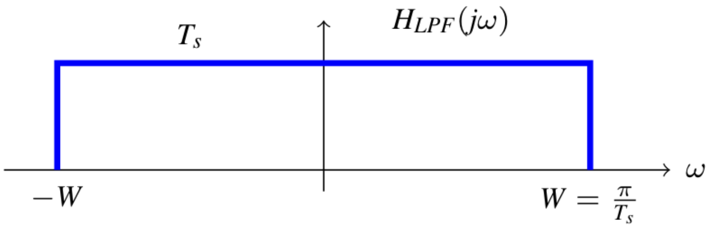
Equivalencia de las dos reconstrucciones

- Por simplicidad, $f_s = \frac{1}{T_s} = 2B$ $(\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2W)$

$$h_{LPF}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\leftrightarrow} \quad H_{LPF}(j\omega) = T_s\ \Pi\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right)$$

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) * \delta(t - nT_s) = \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

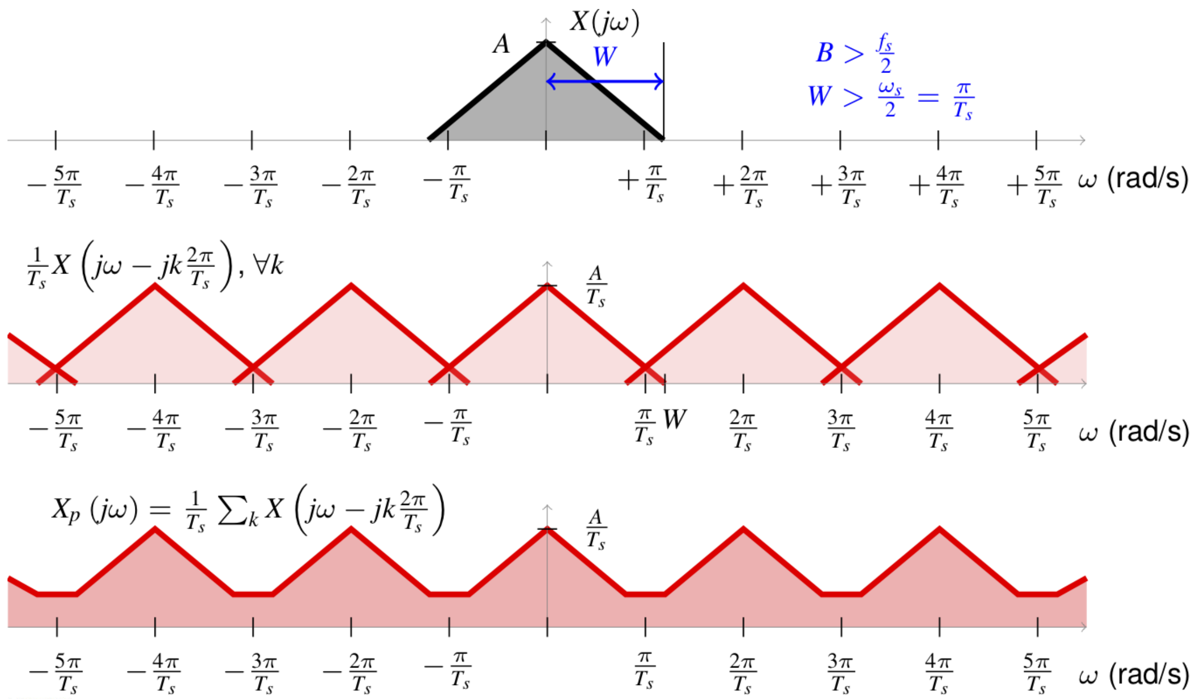




Solapamiento espectral (Aliasing)

- Muestreo de una señal real con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

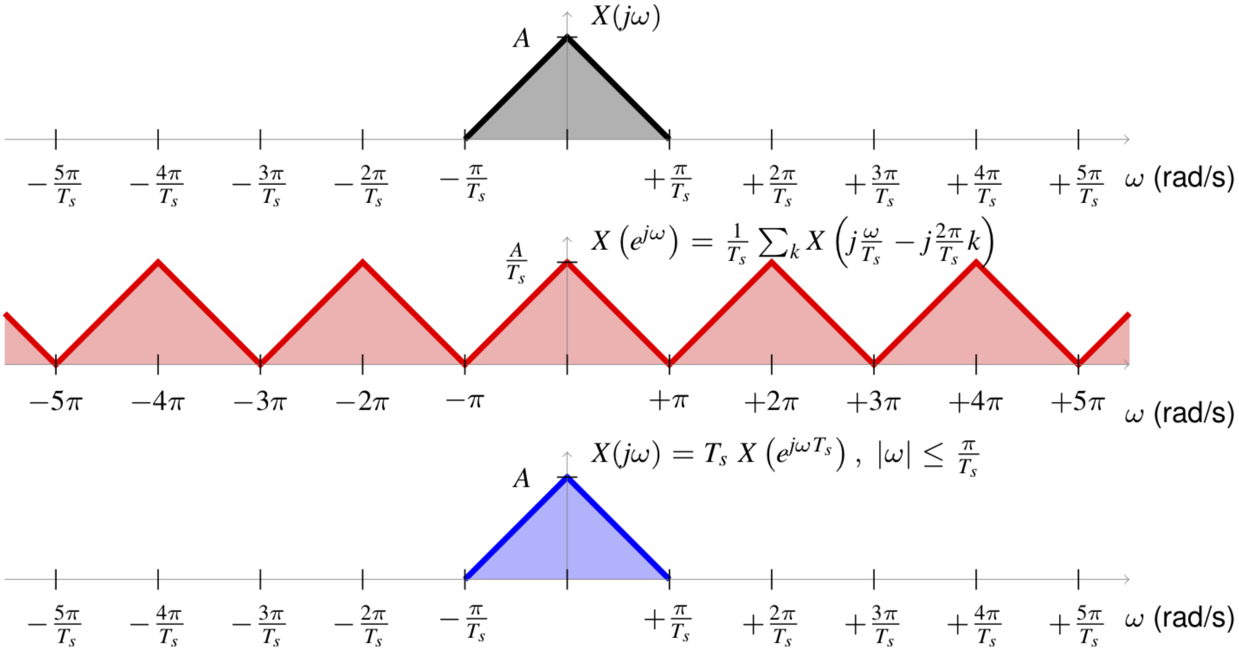
Frecuencia de muestreo insuficiente: $f_s = \frac{1}{T_s} < 2B$ muestras/s



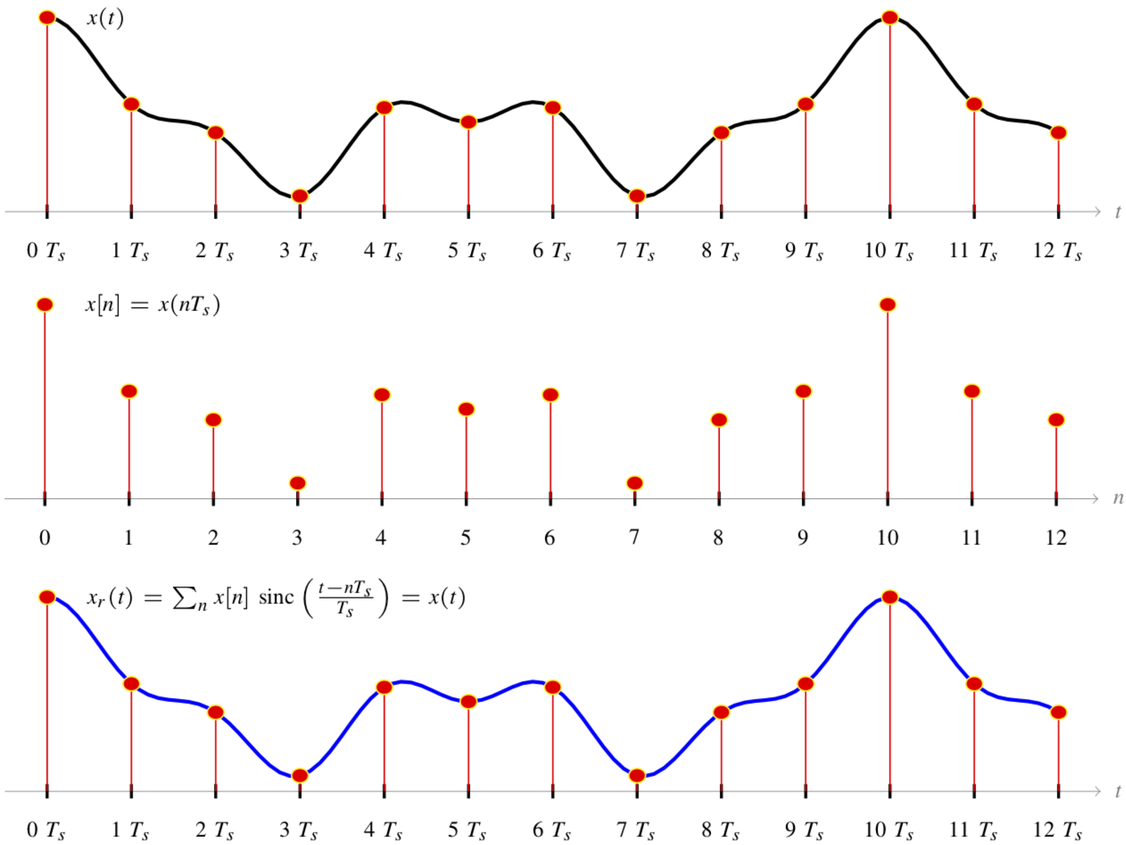
Muestreo en el dominio de la frecuencia cumpliendo Nyquist

- Muestreo de una señal real en banda base con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B = \frac{W}{\pi} \text{ samples/s (Nyquist)}$$



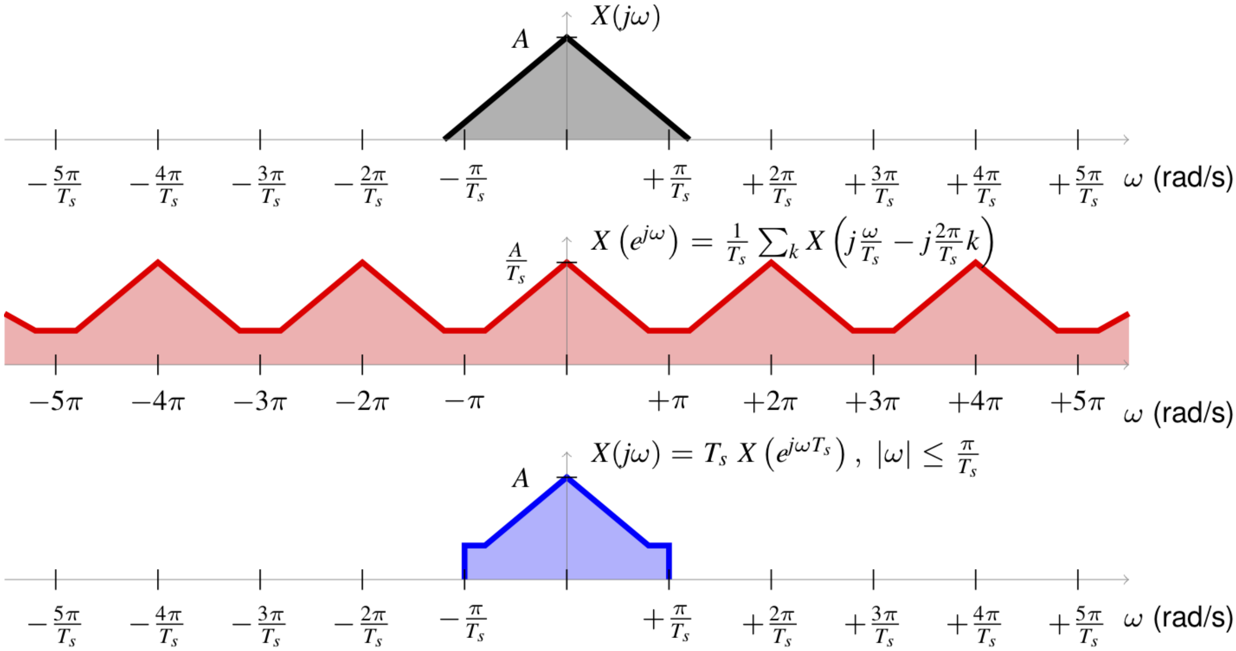
Reconstrucción a partir de muestras cumpliendo Nyquist



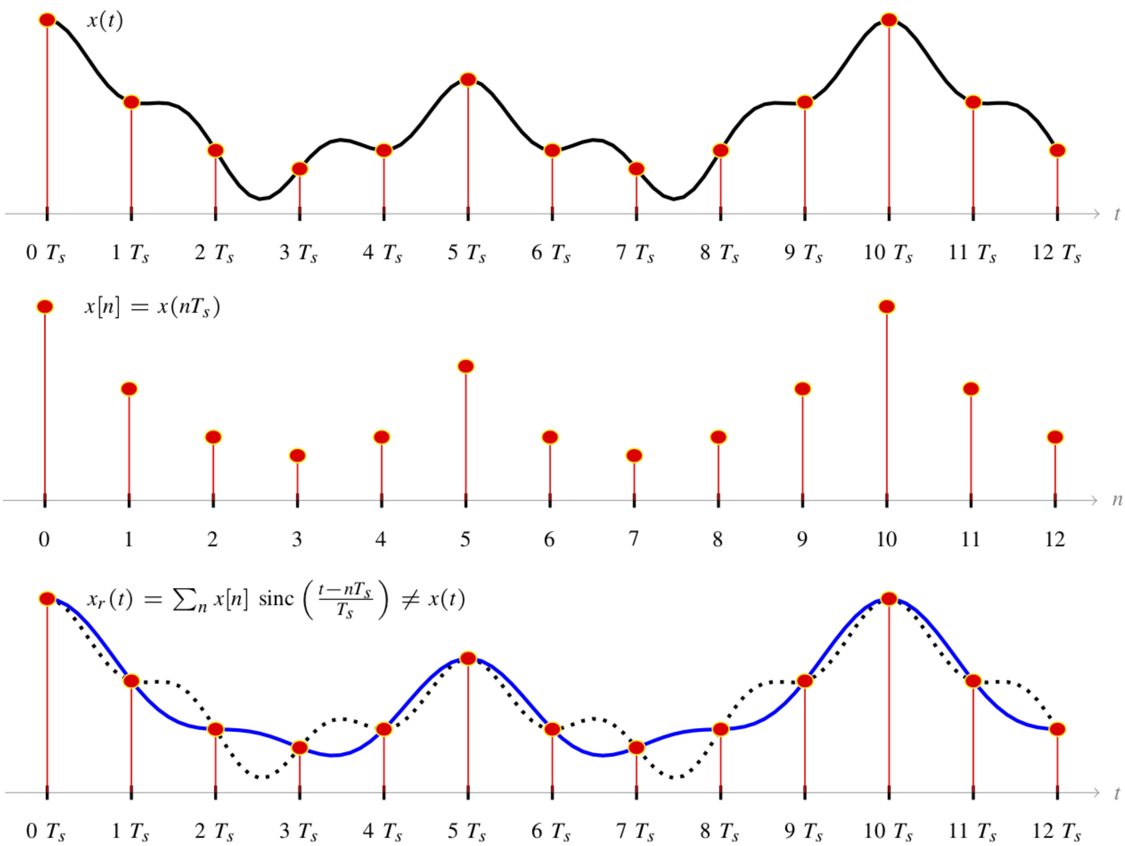
Muestreo en frecuencia con solapamiento espectral

- Muestreo de una señal real con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

$$f_s = \frac{1}{T_s} < 2B = \frac{W}{\pi} \text{ muestras/s (aliasing)}$$



Reconstrucción de muestras con solapamiento espectral



Tasas de muestreo de Nyquist para señales complejas

- Señal con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)
- Tasa de muestreo para reconstrucción perfecta a partir de muestras (Nyquist sampling rate)
  - Señales reales en banda base
$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B = \frac{W}{\pi} \text{ muestras/s}$$
  - Señales complejas paso banda
$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq B = \frac{W}{2\pi} \text{ muestras/s}$$

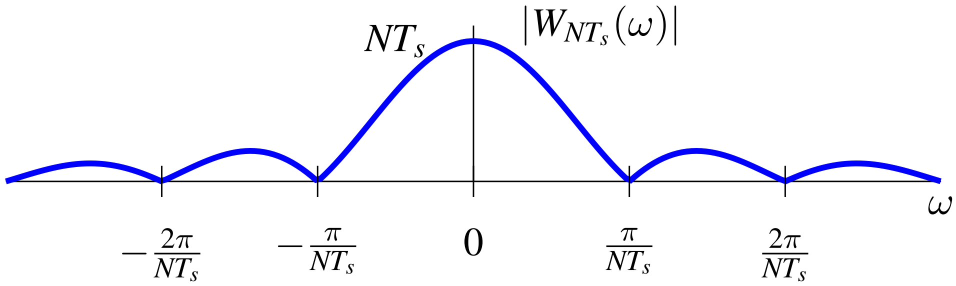
Muestreo: Relaciones entre representaciones en frecuencia

- Señal muestreada a $f_s = \frac{1}{T_s}$ muestras/s
$$x[n] = x(nT_s)$$
- Transformadas de Fourier de $x(t)$ y de $x[n]$
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_k X\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi}{T_s}k\right)$$
$$X(j\omega) = \begin{cases} X\left(e^{j\omega T_s}\right), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
- Transformada discreta de Fourier de $x[n]$ si esta tiene N muestras
$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \begin{cases} \frac{1}{T_s}X\left(j\omega\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{NT_s}k} & \text{si } k \leq \frac{N}{2} \\ \frac{1}{T_s}X\left(j\omega\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{NT_s}(k-N-1)} & \text{si } k > \frac{N}{2} \end{cases}$$
  - Muestreo de la transformada de Fourier de $x(t)$

Efecto enventanado

- N muestras de una señal de duración mayor que NT_s
  - Muestreo de señal enventanada

$$x_w(t) = x(t)\ w_{NT_s}(t), \quad \text{con } w_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



  - Frecuencia: convolución con función sinc

$$X_w(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * W_{NT_s}(j\omega)$$

Conversión Analógico Digital (A/D)

- Fuentes analógicas: amplitudes continuas, tiempo continuo
- Conversión analógico/digital (A/D):
  - Tiempo discreto: Muestreo a frecuencia f_s muestras/s
  - Amplitudes discretas: Cuantificación a n bits/muestra
    - ⋆ Ruido de cuantificación: sólo hay 2^n niveles de cuantificación
      - Diferencia entre valor muestreado y valor cuantificado
    - ⋆ Decrece a medida que se incrementa n
  - Tasa binaria (bits/s):

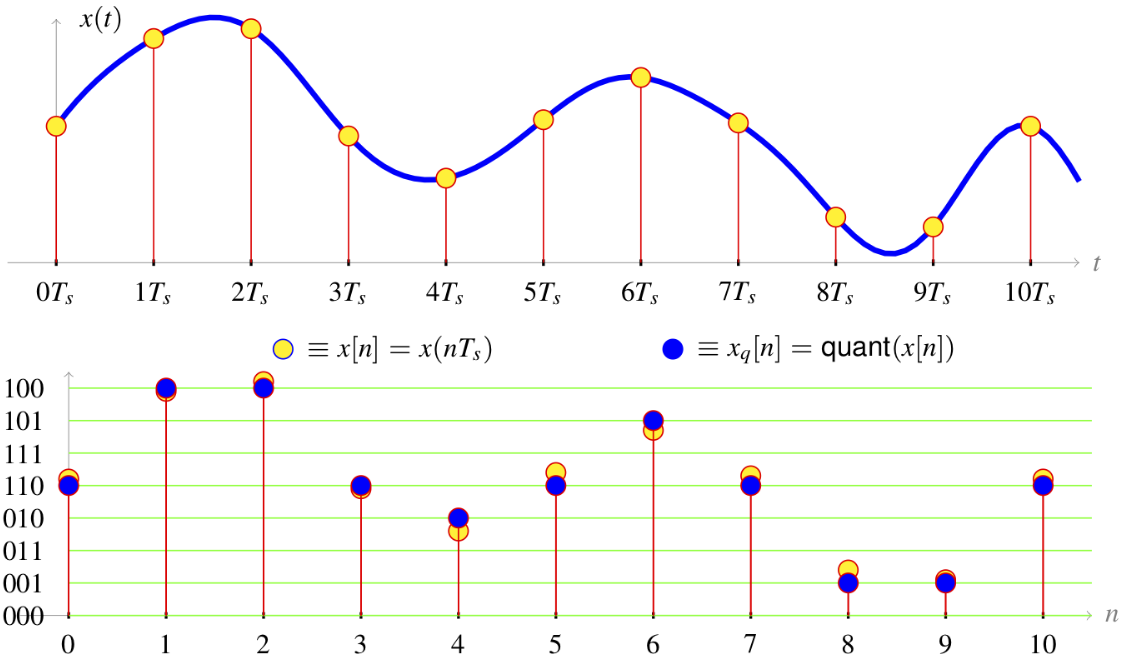
$$R_b \text{ (bits/s)} = f_s \text{ (muestras/s)} \times n \text{ (bits/muestra)}$$

- Conversión digital/analógico (D/A):
  - Conversión de bits a muestras (cuantificadas)
  - Reconstrucción de la señal a partir de las muestras
    - ⋆ Interpolación con impulsos + filtrado paso bajo

$$x_i(t) = \sum_n x_q[n]\ \delta(t - nT_s) \rightarrow x_r(t) = x_i(t) * h_{LPF}(t)$$

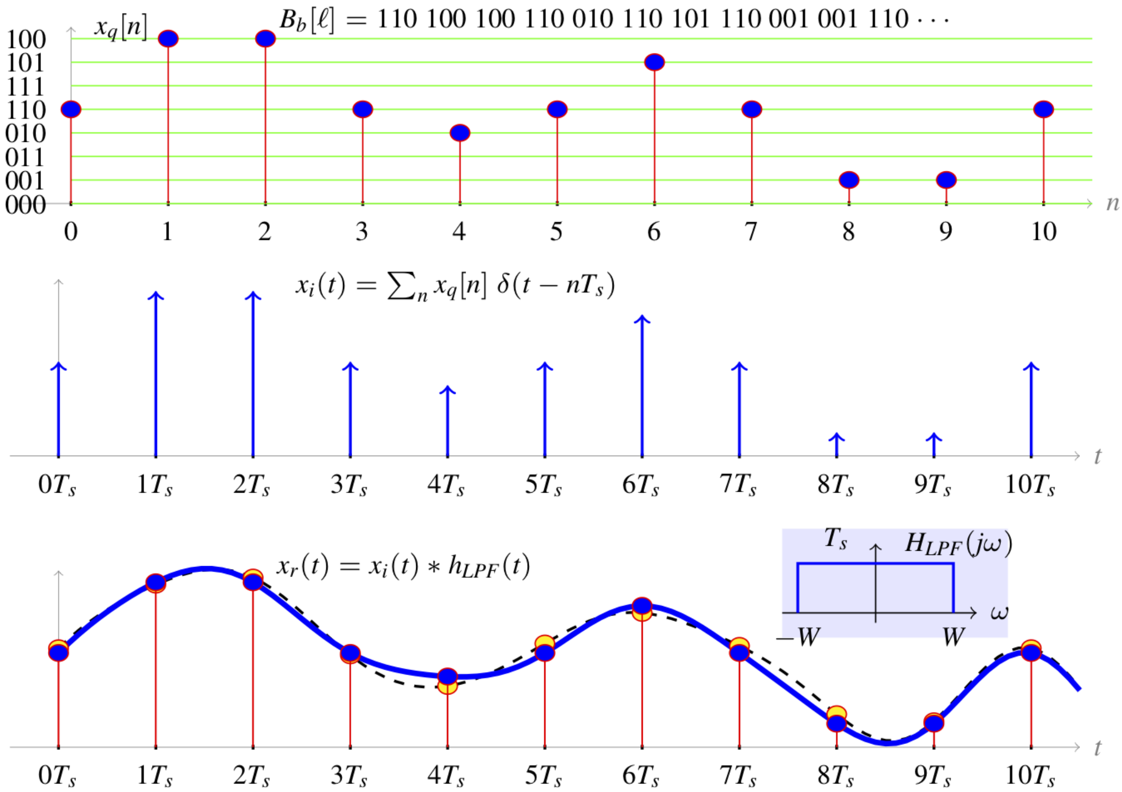
$$x_r(t) = \sum_n x_q[n]\ \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Muestreo + cuantificación



$B_b[\ell] = 110\ 100\ 100\ 110\ 010\ 110\ 101\ 110\ 001\ 001\ 110 \cdots$

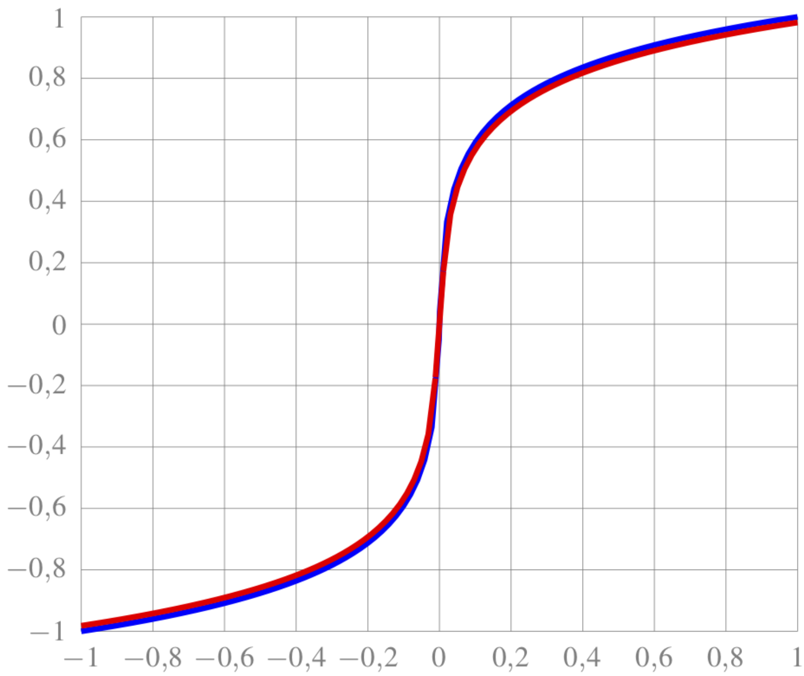
Reconstrucción: interpolación con impulsos + filtrado



Cuantificación logarítmica

- Alternativa para tener una mayor resolución en niveles bajos
  - Pasos de cuantificación pequeños en niveles pequeños de amplitud
  - Pasos de cuantificación altos en niveles altos de amplitud
- Implementación
  - Compresión logarítmica + cuantificación uniforme
    - Ejemplos de compresores: Ley μ y Ley A
  - A la salida: Expansión logarítmica
  - Compansor: conjunto de compresión y expansión

Ley μ y ley A



Ley μ

$$F(x) = \frac{x}{|x|}\frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)}$$

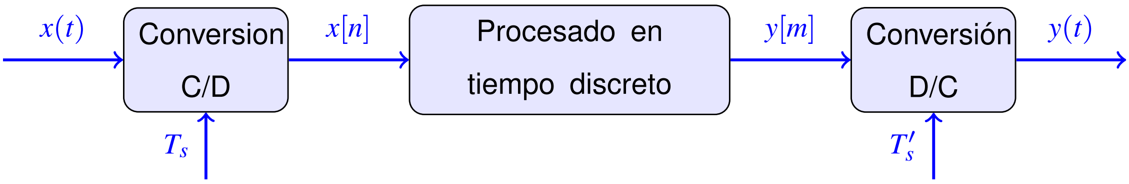
$\mu = 255$ (8 bits)

Ley A

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\frac{A|x|}{1+\ln(A)}, & |x| < \frac{1}{A} \\ \frac{x}{|x|}\frac{1+\ln(A|x|)}{1+\ln(A)}, & |x| \geq \frac{1}{A} \end{cases}$$

$A = 87{,}6$ Rec. G. 711

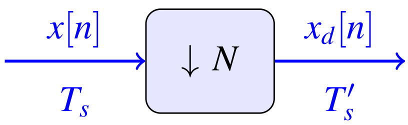
Procesado discreto de señales continuas



- Procesado digital de señales
  DSP:*Digital Signal Processing*
  - Ventajas significativas en múltiples aplicaciones
  - Existen dispositivos especialmente diseñados para procesar señales discretas
- Procesamiento digital
  - Conversión de tiempo continuo a tiempo discreto
    - ⋆ Muestreo a T_s
  - Procesado en tiempo discreto
  - Conversión de tiempo discreto a tiempo continuo
    - ⋆ Reconstrucción a T_s'
      Normalmente $T_s = T_s'$, pero es posible $NT_s = MT_s'$ con $N, M \in \mathbb{Z}$

Cambios de tasa: Decimado, interpolación, sobremuestreo

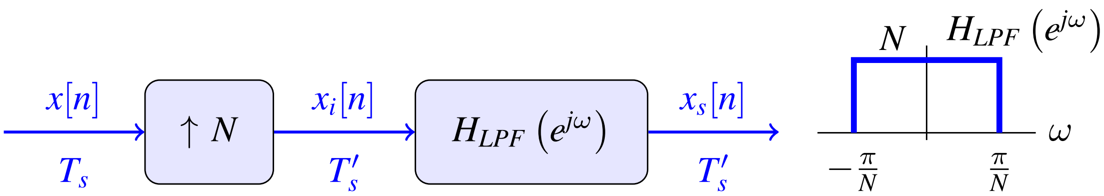
- Decimado: $T_s' = N \times T_s$



$$x_d[n] = x[Nn]$$

Si $x[n] = x(nT_s)$, entonces $x_d[n] = x(nNT_s) = x(nT_s')$

- Interpolación y sobremuestreo: $T_s' = \frac{T_s}{N}$

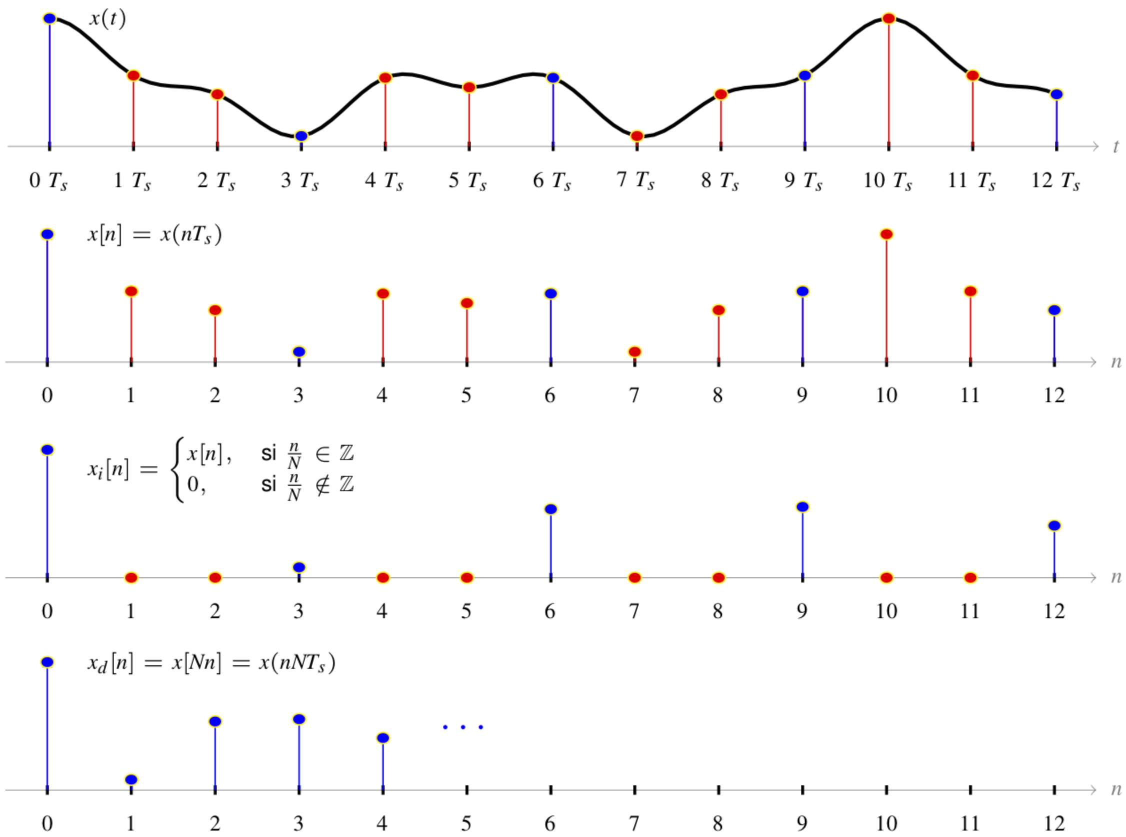


$$x_i[n] = \begin{cases} x[n/N], & \text{si } \frac{n}{N} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } \frac{n}{N} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

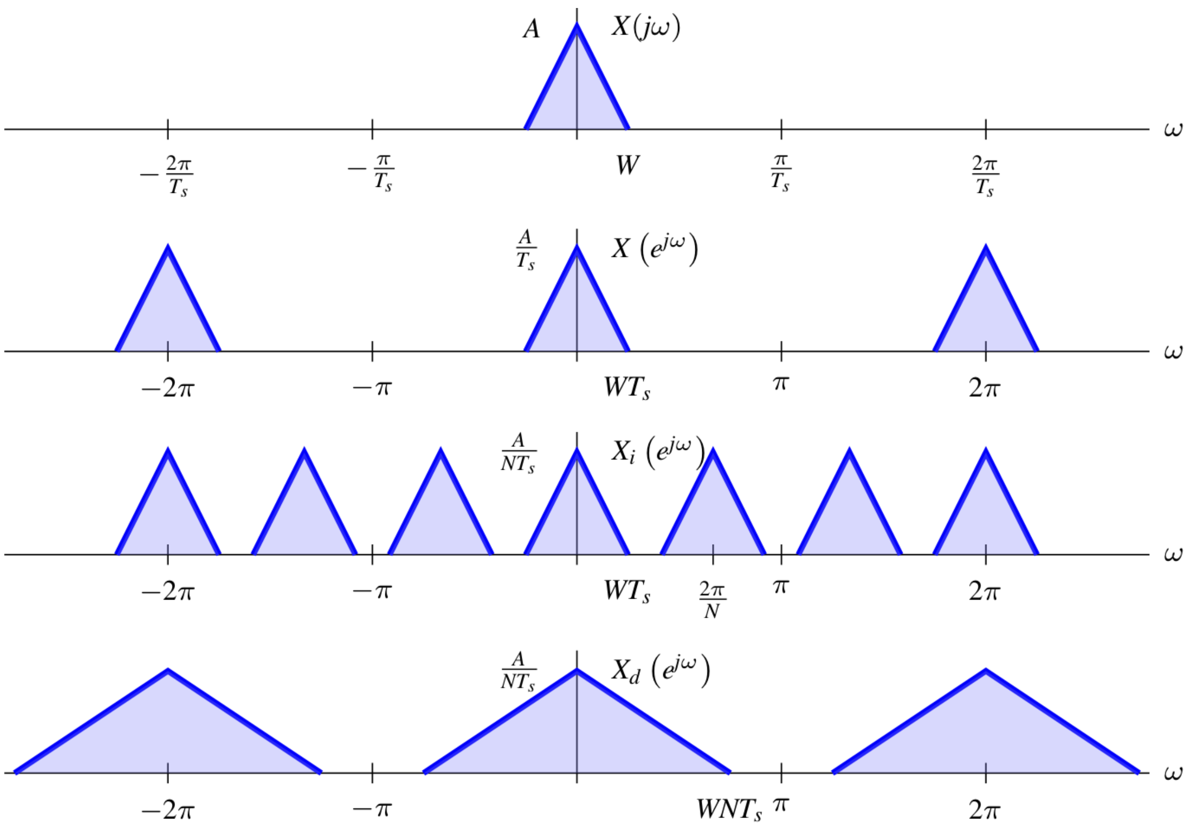
Si $x[n] = x(nT_s)$, entonces† $x_s[n] = x\left(n\frac{T_s}{N}\right) = x(nT_s')$

† : suponiendo que a T_s se cumple el criterio de Nyquist para el muestreo para $x(t)$

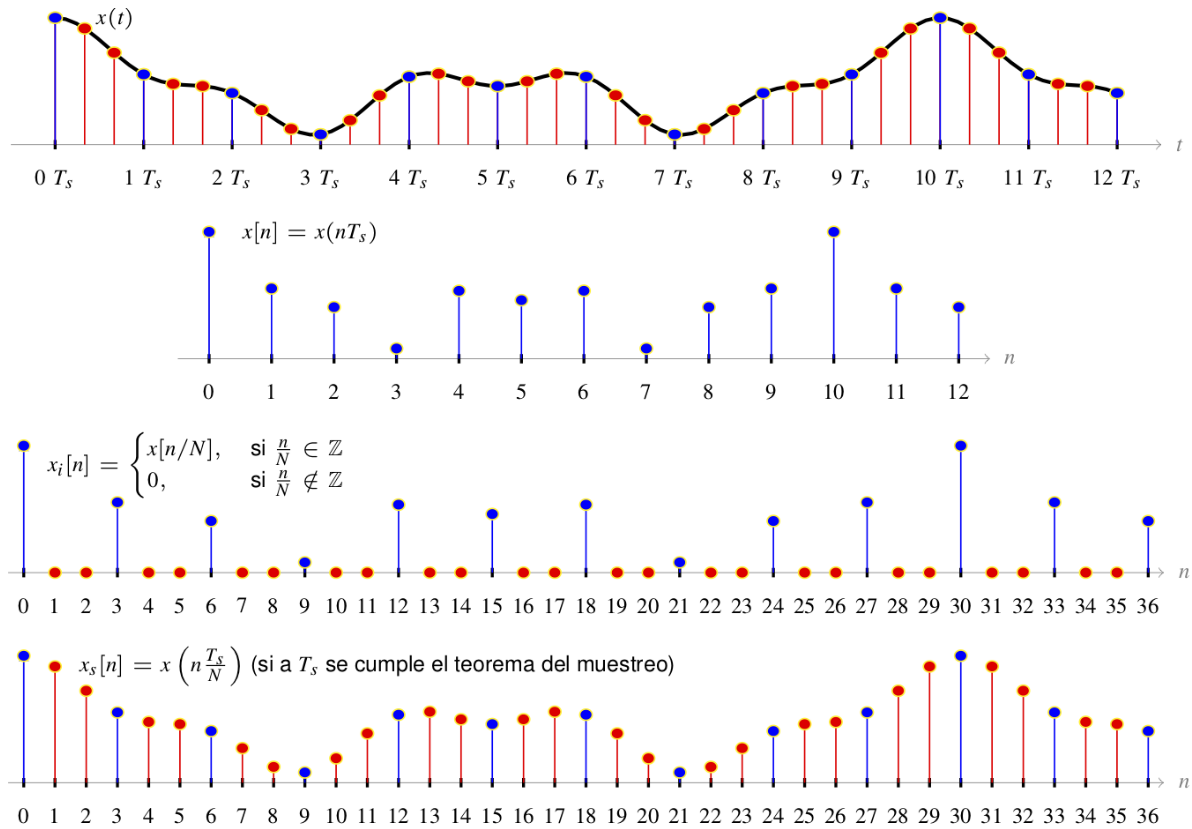
Diezmado: ejemplo $N = 3$



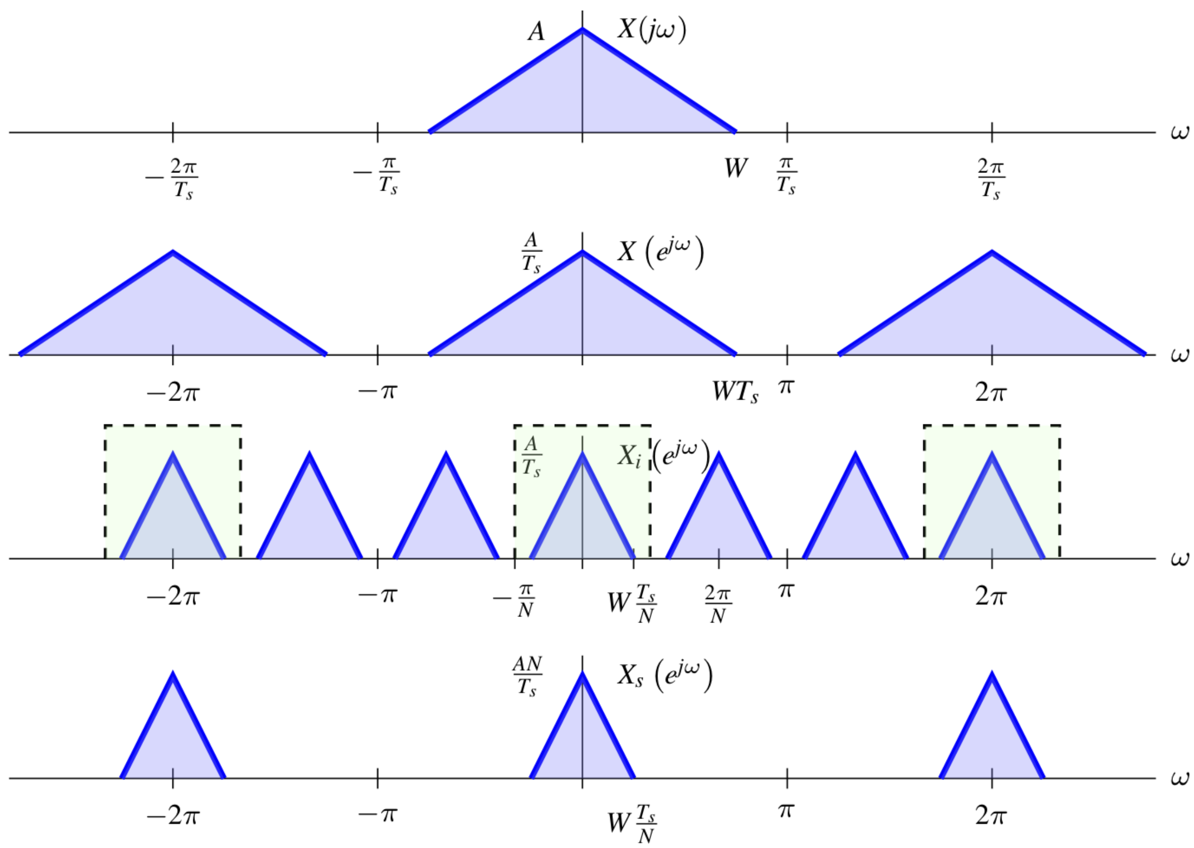
Diezmado en el dominio de la frecuencia



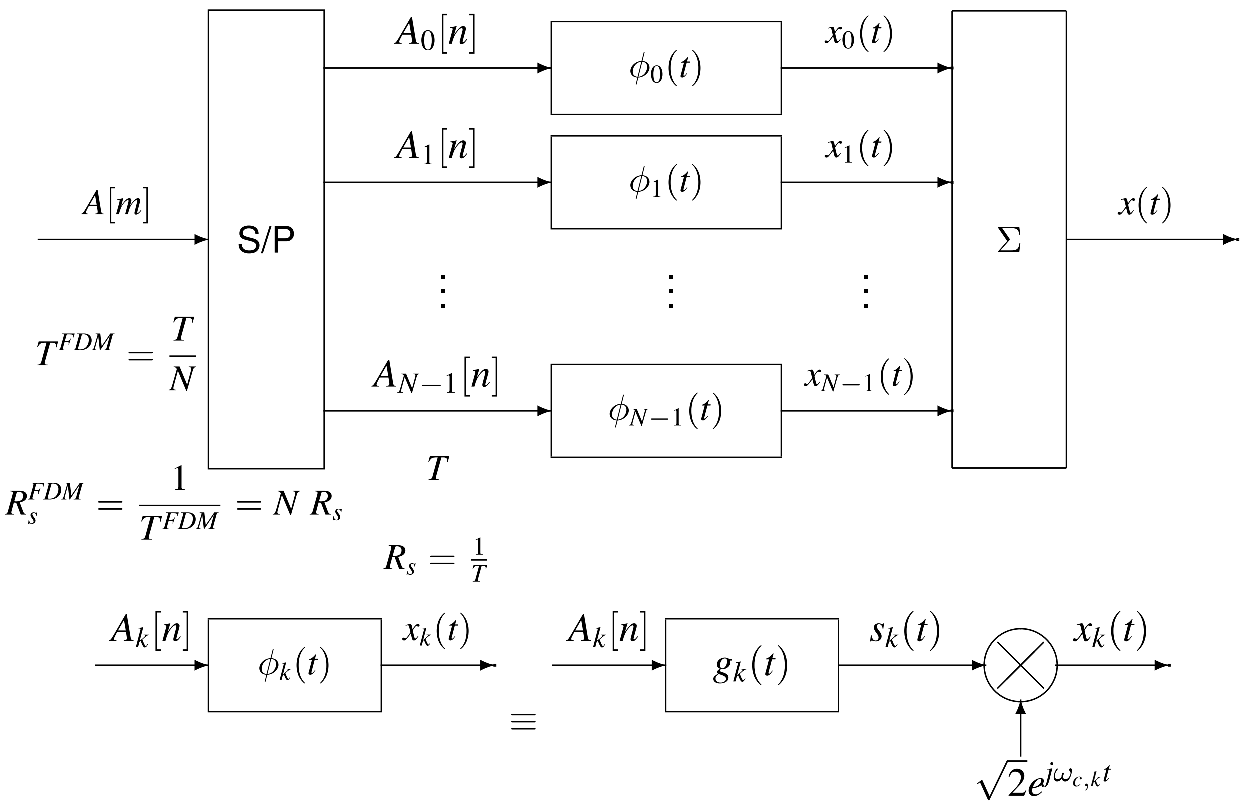
Sobremuestreo: ejemplo $N = 3$



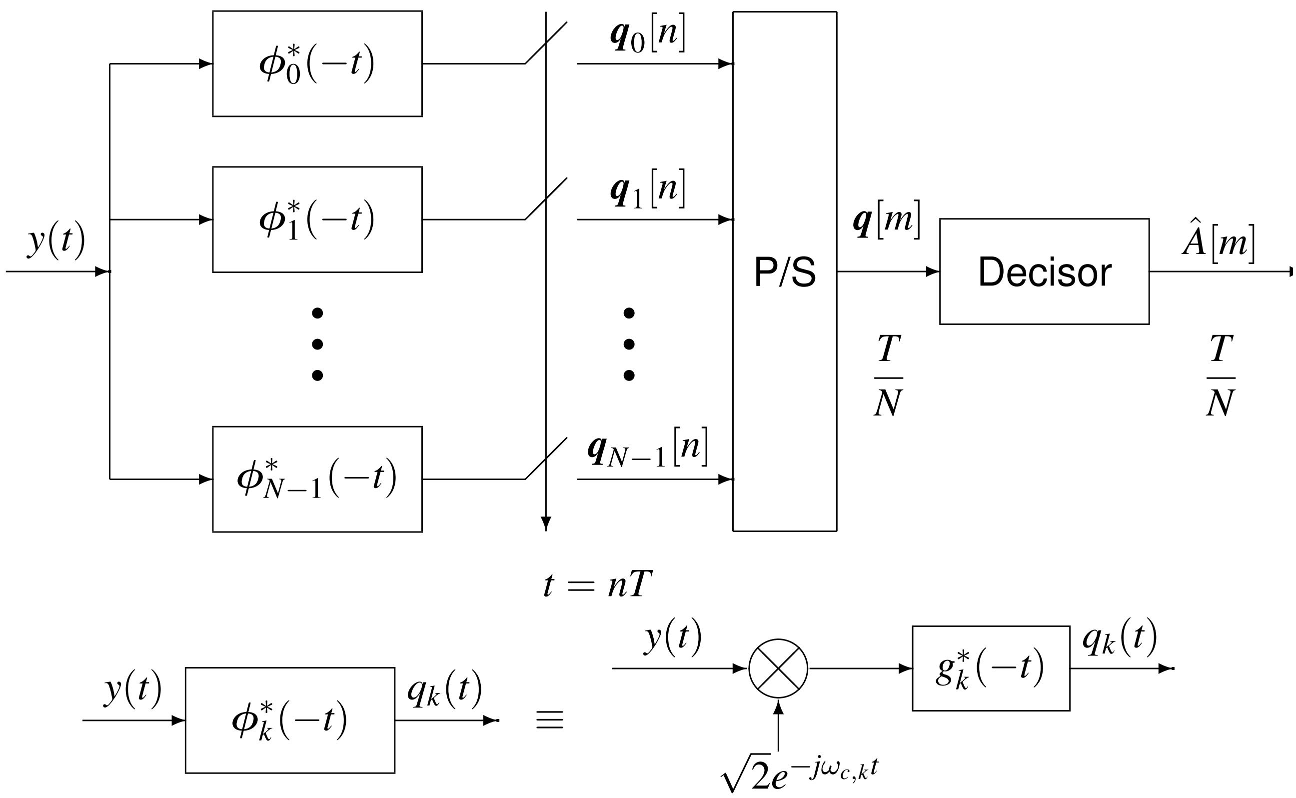
Sobremuestreo en el dominio de la frecuencia



Ejemplo de aplicación del DSP: Modulador OFDM



Ejemplo de aplicación del DSP: Demodulador OFDM



Modulador/demodulador OFDM con DSP