Universidad Carlos III de Madrid

Fundamentos de Teoría de la Señal

Máster Universitario en Internet de las Cosas:
Tecnologías Aplicadas

Capítulo 4

Sistemas de comunicaciones. Canales con ruido

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

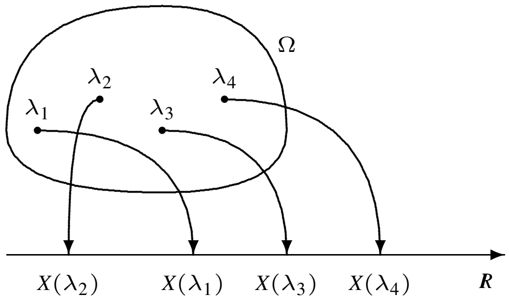
Índice de contenidos

- Revisión de conceptos de estadística
  - Variable aleatoria
  - Procesos aleatorios
- Procesos aleatorios y sistemas lineales
  - Relaciones entrada/salida para señales aleatorias
    - Relaciones en el dominio temporal
    - Relaciones en el dominio frecuencial
- Caracterización del ruido térmico
  - Procesos blancos
  - Procesos gausianos
- Relación señal a ruido
  - Filtrado de ruido térmico

Variable aleatoria (Real)

Función que asigna un valor numérico (real) a la salida de un experimento aleatorio

$$\Omega \rightarrow \boldsymbol{R}$$
$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(\lambda) \in \boldsymbol{R}$$



- Rango de X: Rango$_X = \{x \in \boldsymbol{R} : \exists\, \lambda \in \Omega,\, X(\lambda) = x\}$
  - V.a. discreta: rango formado por conjunto discreto de valores
  - V.a. continua: rango continuo de valores
- Descripción (probabilística):
  - Función de distribución: $F_X(x)$
  - Función densidad de probabilidad: $f_x(x)$

Función de distribución

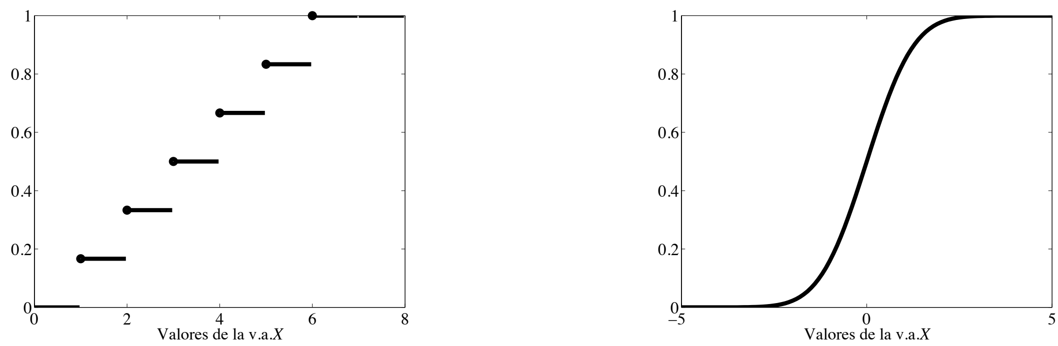
- Definición

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Interpretación frecuencial (probabilística)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X
n_x : número de resultados en las n realizaciones con $X \leq x$



(a) Discreta

(b) Continua

Función densidad de probabilidad

- Definición

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

  - V.a. discreta: puntos de masa $p_i = P(X = x_i)$
  - Notación v.a. discreta: $p_X(x_i) = p_i$

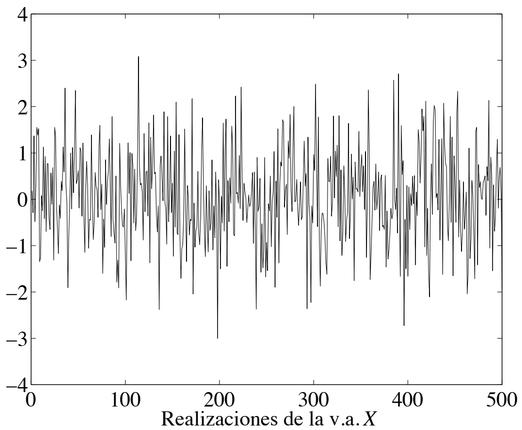
- Interpretación frecuencial (probabilística)

$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta_x)}{\Delta_x}$$

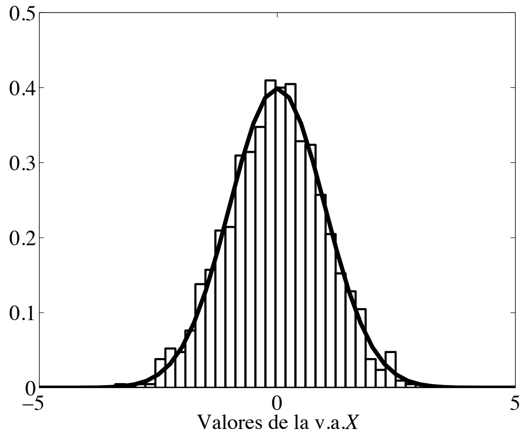
$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta_x} \lim_{n \to \infty} \frac{n_x}{n} \right\}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X
n_x : número de resultados en las n realizaciones con $x \leq X \leq x + \Delta_x$

Estima de la f.d.p.



(a) Realizaciones

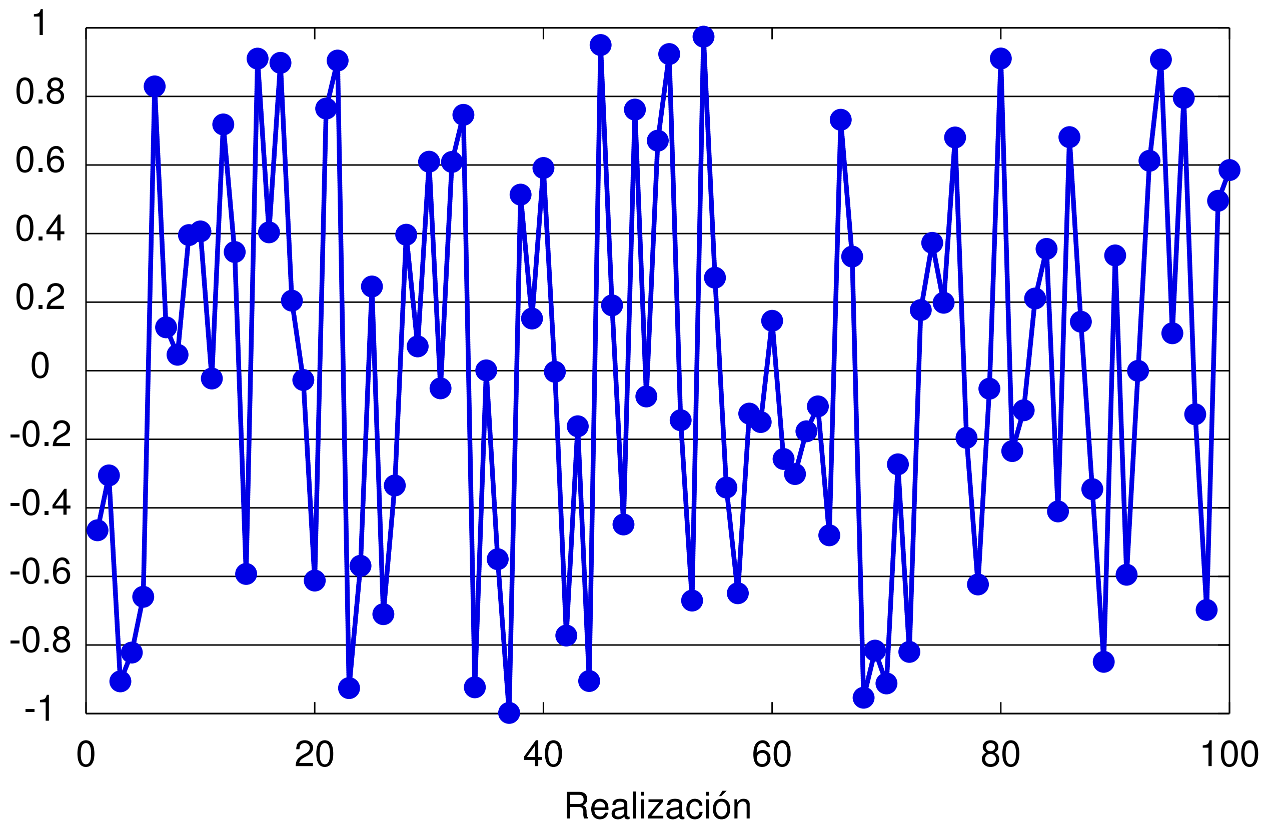


(b) Estima de $f_X(x)$

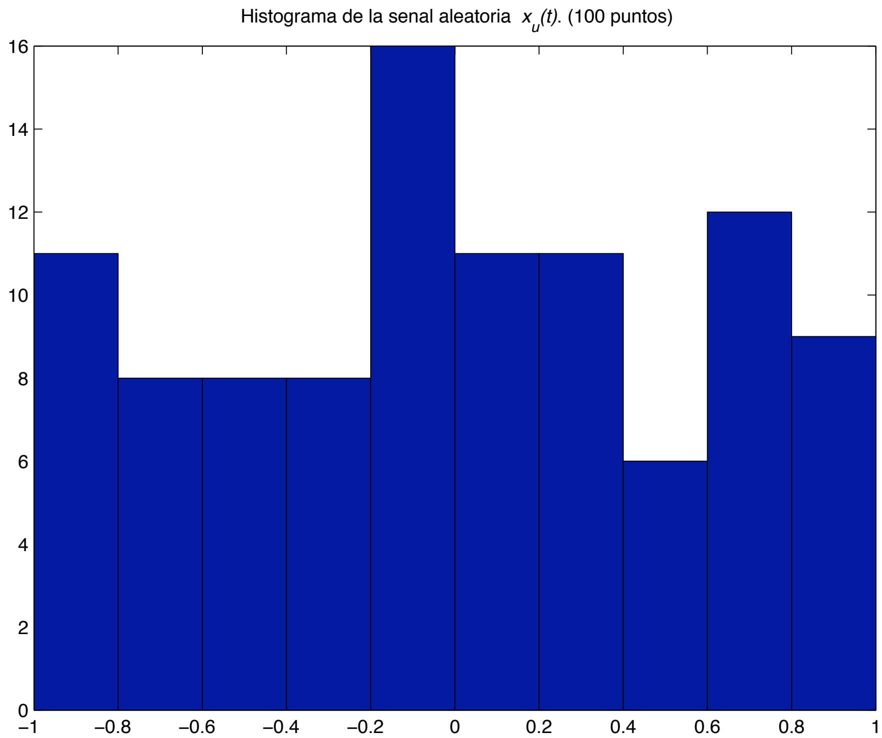
Interpretación de la función densidad de probabilidad

- La f.d.p. indica cómo se distribuyen los valores que toma una variable aleatoria
- Rangos donde $f_X(x)$ toma valores elevados indican una probabilida alta de que la variable aleatoria tome valores en ese rango
  - Por esta razón esta función puede utilizarse para el cálculo de probabilidades sobre los posibles valores de una variable aleatoria
- Una f.d.p. se puede interpretar como un histograma llevado al límite
- A continuación se muestran varios ejemplos
  - Variable aleatoria uniforme
  - Variable aleatoria gausiana

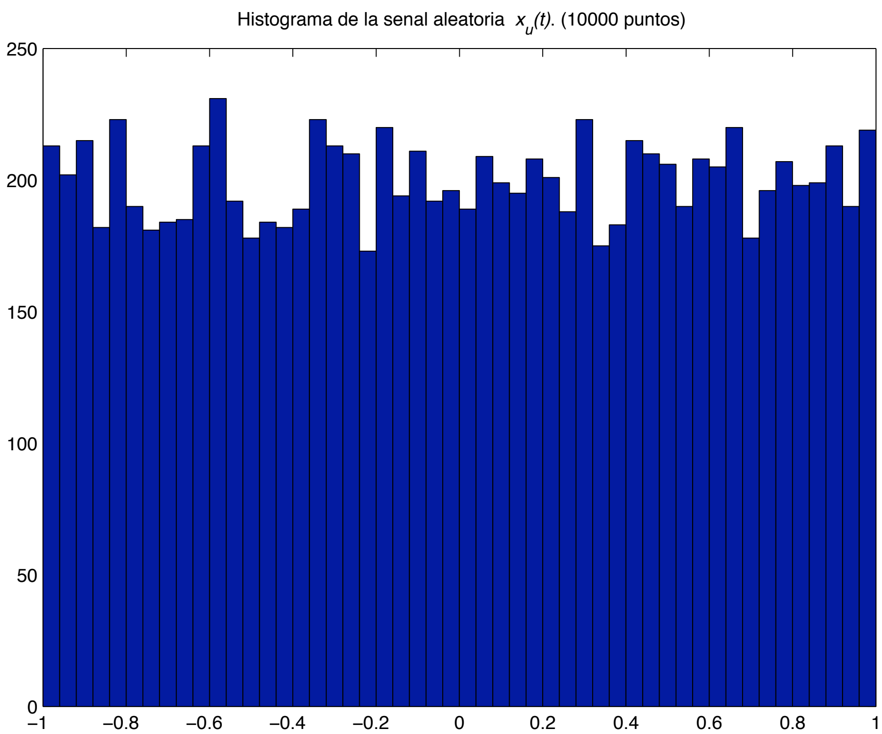
Realizaciones de una variable aleatoria uniforme



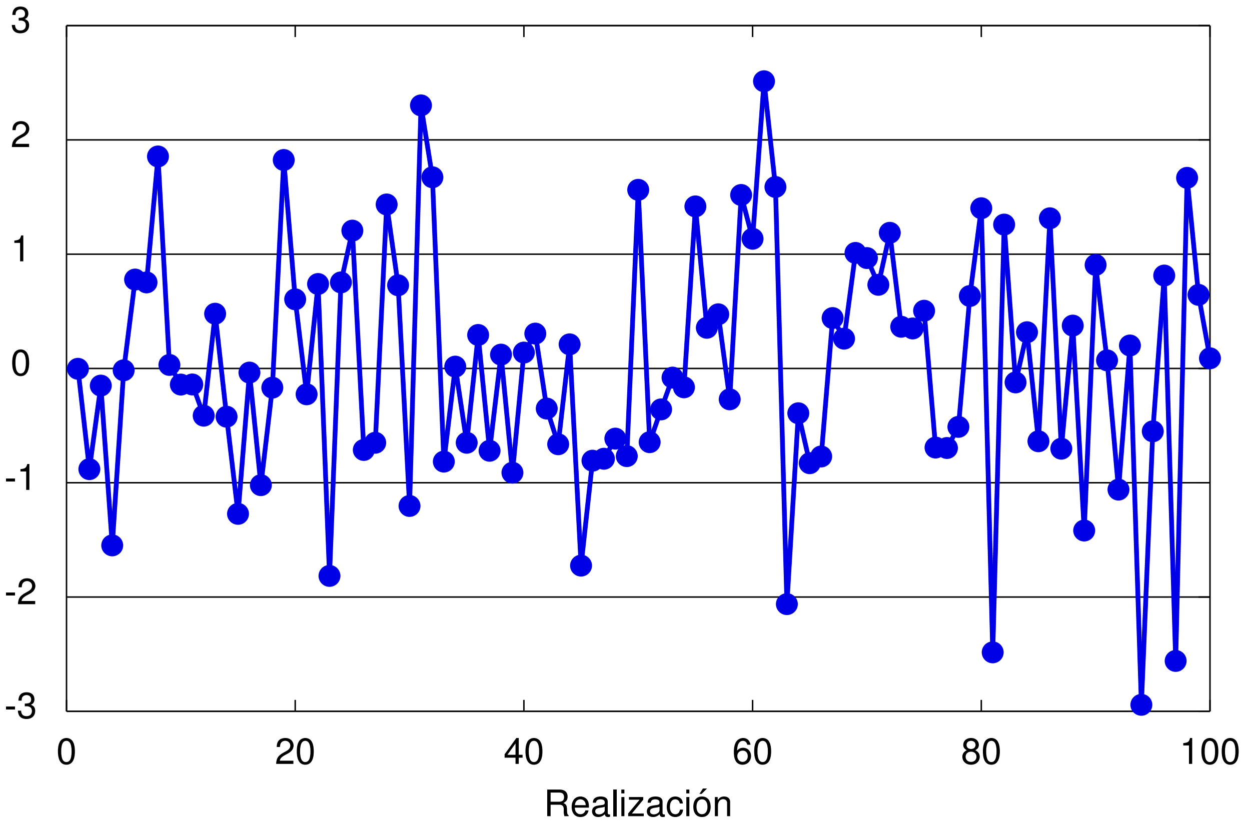
Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria uniforme



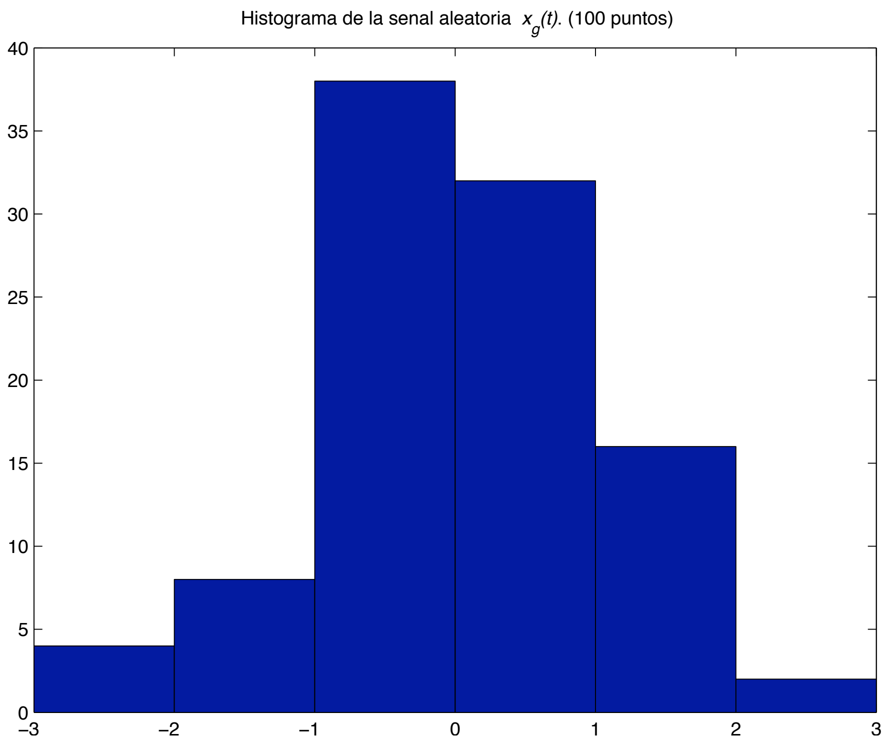
Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria uniforme



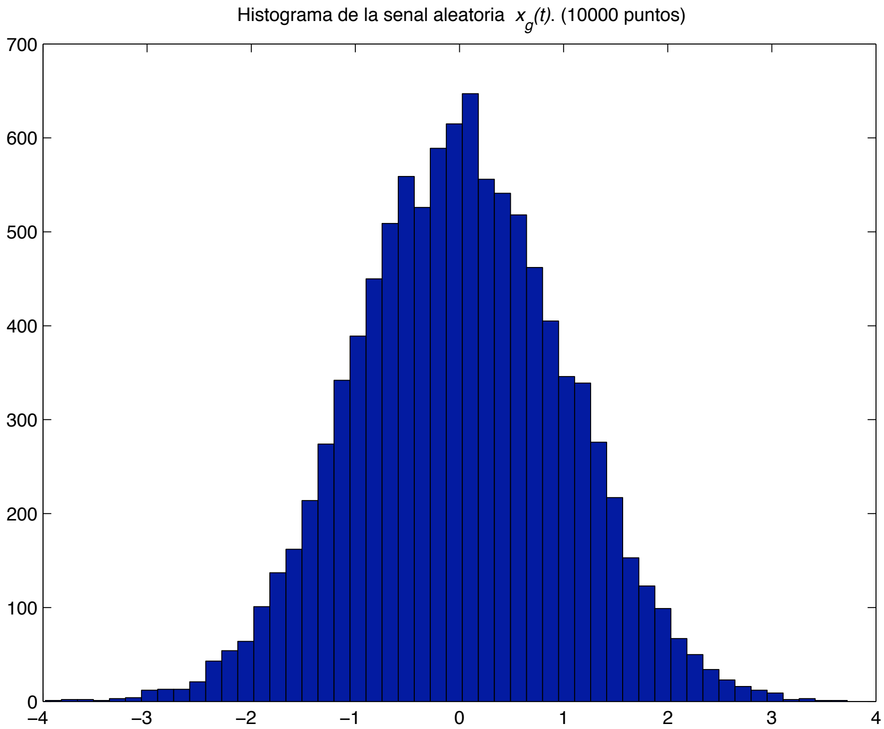
Realizaciones de una variable aleatoria gausiana



Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria gausiana



Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria gausiana



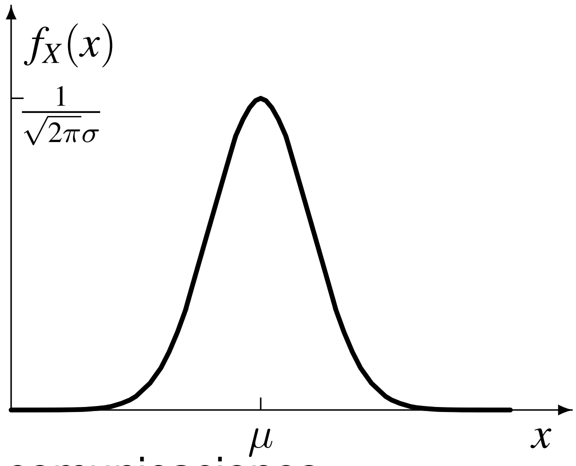
Propiedades de $f_X(x)$

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$
3. $\displaystyle\int_{a^+}^{b^+} f_X(x)\, dx = P(a < X \leq b)$
4. En general, $P(X \in A) = \displaystyle\int_A f_X(x)\, dx$
5. $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)\, du$

Variable aleatoria gausiana (normal)

- Parámetros: media (μ), y varianza (σ^2)
  - Notación: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Modelado del ruido térmico

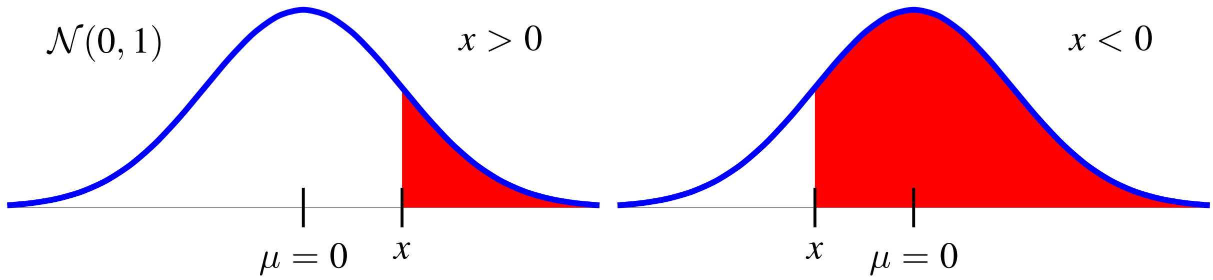
Función $Q(x)$

- Función tabulada calculada numéricamente relacionada con la integral de una distribución gausiana
- Definición: probabilidad de que una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza unidad tome valores mayores que su argumento

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow f_X(x) = \mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow Q(x) = P(X > x)$$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} f_X(z)\, dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

- Interpretación gráfica
  - Sólo se tabula para $x \geq 0$
  - Para $x < 0$, dada la simetría de $f_X(x)$: $Q(-x) = 1 - Q(x)$



Función $Q(x)$ - Propiedades

- Relación con la función de distribución de una v.a. gausiana (con $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

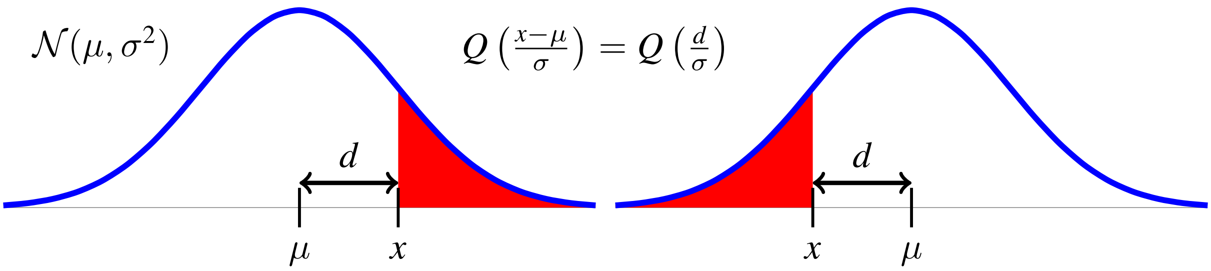
- Función $Q(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ para $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
- Algunas propiedades de la función $Q(x)$
  - $Q(-x) = 1 - Q(x)$
  - $Q(0) = \frac{1}{2}$
  - $Q(\infty) = 0$

Integrales sobre distribuciones gausianas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

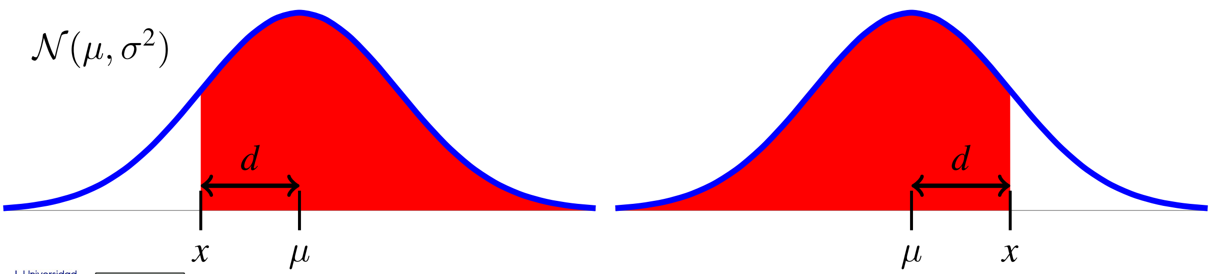
- Si la distribución gausiana tiene media μ y varianza σ^2

$$P(X > x) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Interpretación gráfica (considerando definición y simetría)

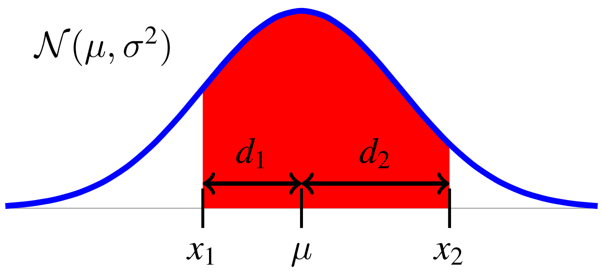


$$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = Q\left(-\frac{d}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

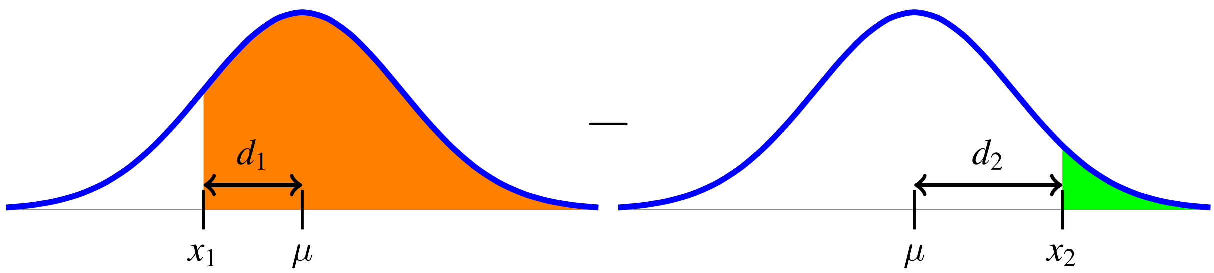


Integrales sobre $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en intervalos

- En general se pueden escribir como sumas o diferencias de diferentes términos involucrando integrales desde un punto a $\pm\infty$, que ya hemos visto como se obtienen utilizando la función $Q(x)$
- Un ejemplo ilustrativo



$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \int_{x_1}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) - \int_{x_2}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \left[1 - Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)\right] - \left[Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)\right]$$



Procesos aleatorios (reales)

- Extensión de v.a. incluyendo dependencia temporal
  - Variable aleatoria
$$\lambda \in \Omega \to X(\lambda)$$
  - Proceso aleatorio (en tiempo continuo o en tiempo discreto)
$$\lambda \in \Omega \to X(t, \lambda) \text{ o } X[n, \lambda]$$
- Particularizaciones
  - $X(t, \lambda_i)$ o $X[n, \lambda_i]$: señal temporal asociada a λ_i, $x_i(t)$ o $x_i[n]$
  - $X(t_i, \lambda)$ o $X[n_i, \lambda]$: variable aleatoria ($X(\lambda)$)
  - $X(t_i, \lambda_j)$ o $X[n_i, \lambda_i]$: realización individual de una v.a.
- Notación: $X(t)$ o $X[n]$
- Interpretación: conjunto indexado de variables aleatorias
  - Índice continuo ($t \in \boldsymbol{R}$): Proceso aleatorio en tiempo continuo
  - Índice discreto ($n \in \mathbb{Z}$): Proceso aleatorio en tiempo discreto

Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo I

- Experimento aleatorio: lanzamiento de un dado
  - 6 posibles resultados

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

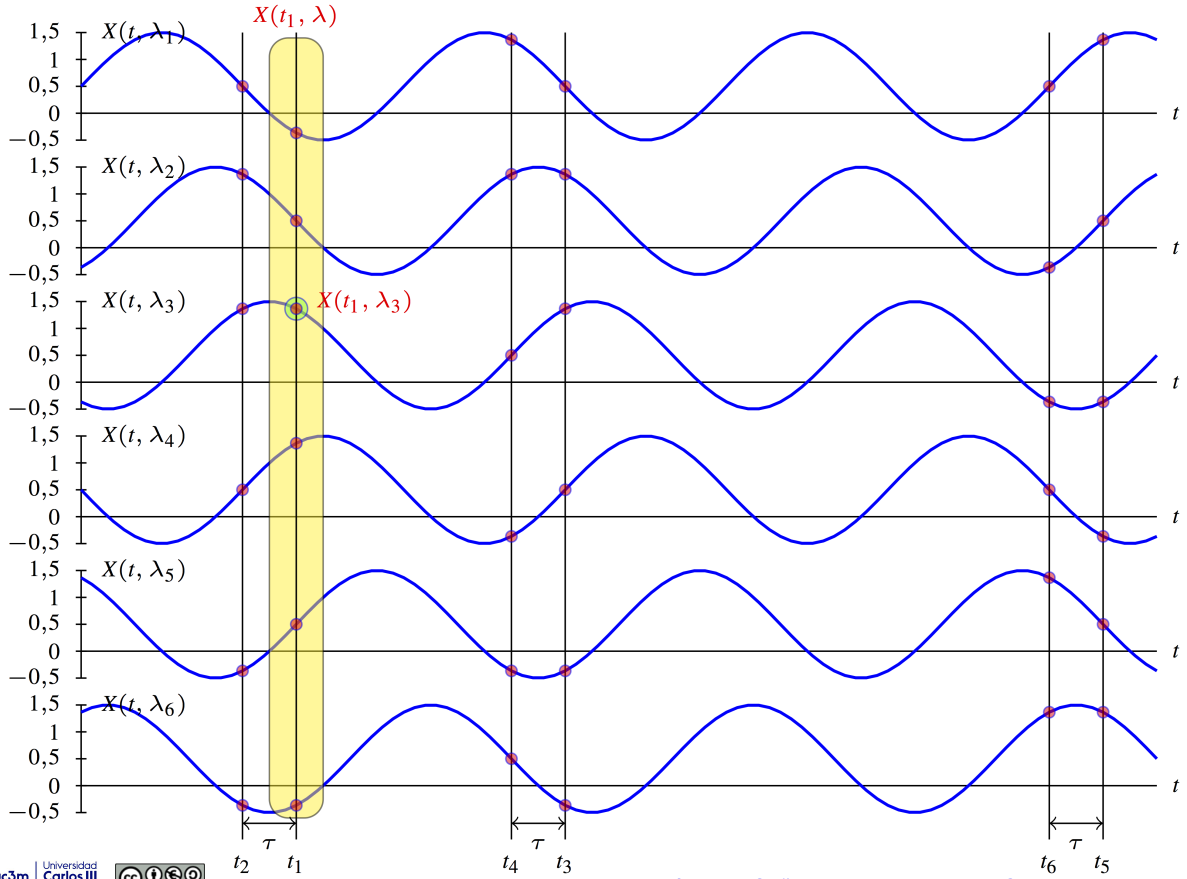
- Proceso aleatorio
  - Una señal para cada posible resultado del experimento

$$X(t,\lambda_i) = \frac{1}{2} + \sin(\omega_0 t - \theta_i)$$

$$\text{con } \theta_i = (i-1)\frac{2\pi}{6}$$

$$\text{para } i \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo I



Proceso aleatorio $X(t, \lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo II

- Experimento aleatorio: lanzamiento de un dado
  - 6 posibles resultados

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

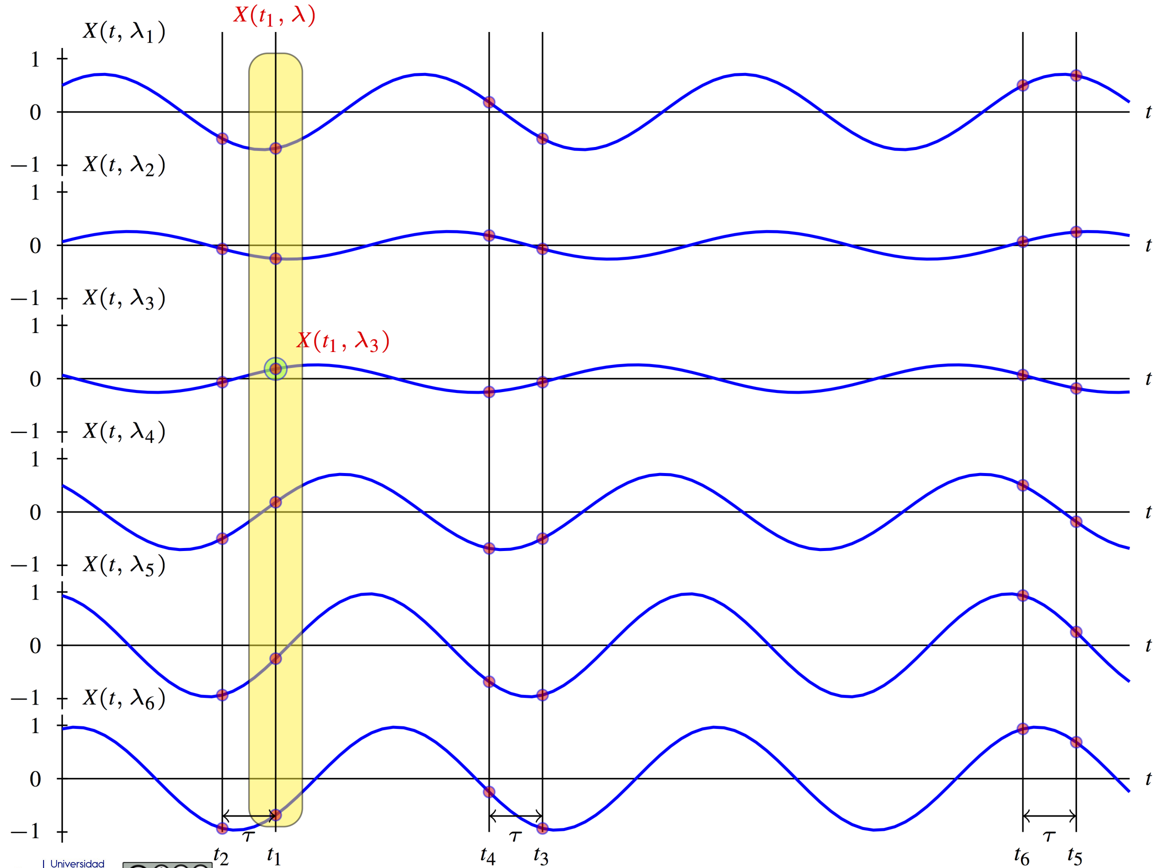
- Proceso aleatorio
  - Una señal para cada posible resultado del experimento

$$X(t, \lambda_i) = \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t - \theta_i) + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)$$

$$\text{con } \theta_i = (i-1)\frac{2\pi}{6}$$

$$\text{para } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Proceso aleatorio $X(t, \lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo II



Esperanzas de los procesos (promedios estadísticos)

- Media de un proceso aleatorio

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X(t)}(x) dx$$

- Función de autocorrelación de un proceso aleatorio

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)\; X(t_2)]$$

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\; x_2\, f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)\; dx_1\; dx_2$$

NOTA: Definición para procesos aleatorios complejos

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)\; X^*(t_2)]$$

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\; x_2^*\, f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)\; dx_1\; dx_2$$

Estacionariedad y cicloestacionariedad

- Estacionariedad en sentido estricto: $\forall\; (t_1,t_2,\ldots,t_n)$, $\forall n$, $\forall \Delta$

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta),\ldots,X(t_n+\Delta)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

  - Estacionariedad de orden M: para $n \leq M$

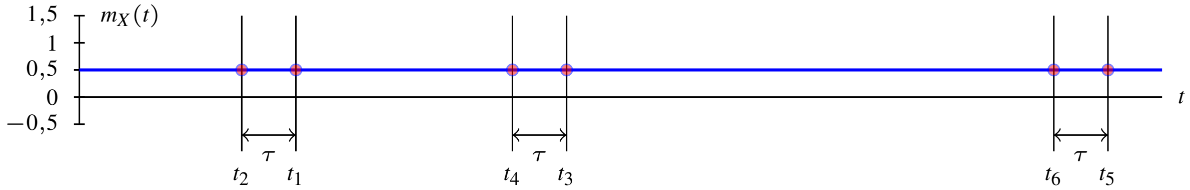
- Estacionariedad en sentido amplio
  1. $m_X(t) = m_X$ (no depende de t)
  2. $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1-t_2) = R_X(\tau)$ (definiendo $\tau = t_1 - t_2$)
     También se suele denotar $R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau)$

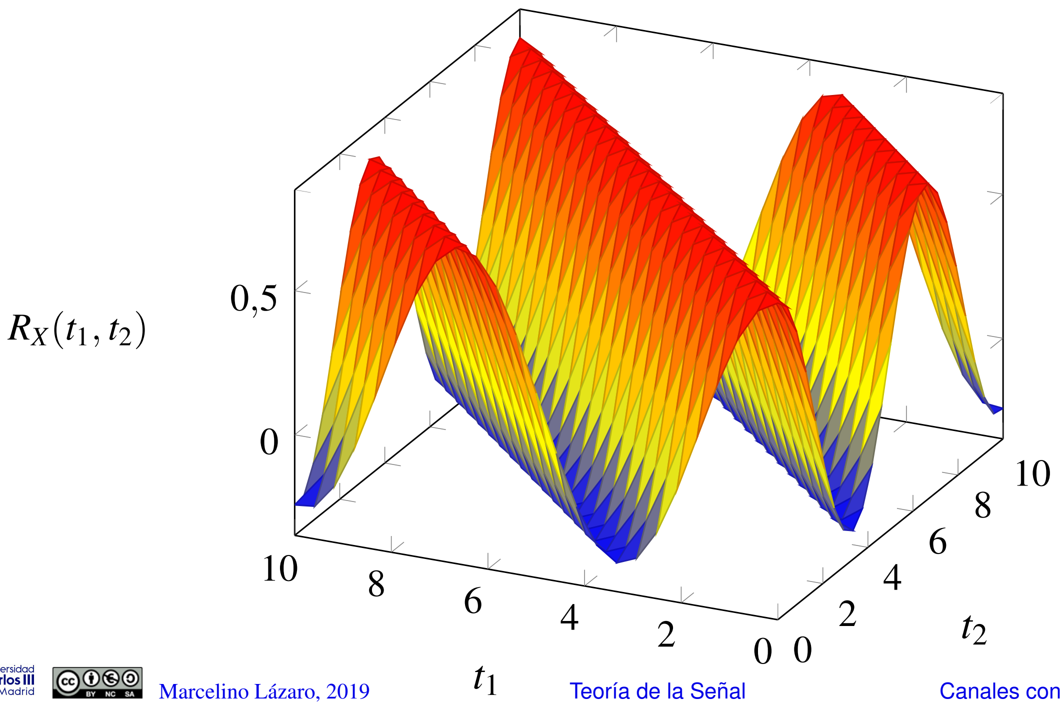
- Cicloestacionariedad
  1. $m_X(t+T_o) = m_X(t)$
  2. $R_X(t+\tau+T_o,t+T_o) = R_X(t+\tau,t)$, para todo t y τ

Ejemplos I y II: media y función de autocorrelación

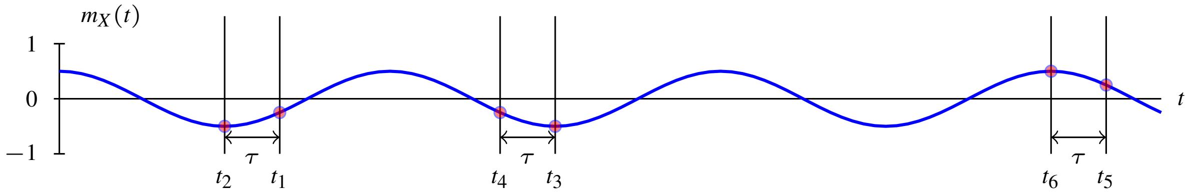
- Ejemplo I
  - Media
$$m_X(t) = \frac{1}{2}$$
  - Función de autocorrelación
$$R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2))$$
$$R_X(t+\tau,t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$$
- Ejemplo II
  - Media
$$m_X(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)$$
  - Función de autocorrelación
$$R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{4}\cos(\omega_0(t_1-t_2)) + \frac{1}{4}\cos(\omega_0(t_1+t_2))$$
$$R_X(t+\tau,t) = \frac{1}{4}\cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{4}\cos(\omega_0(2t+\tau))$$

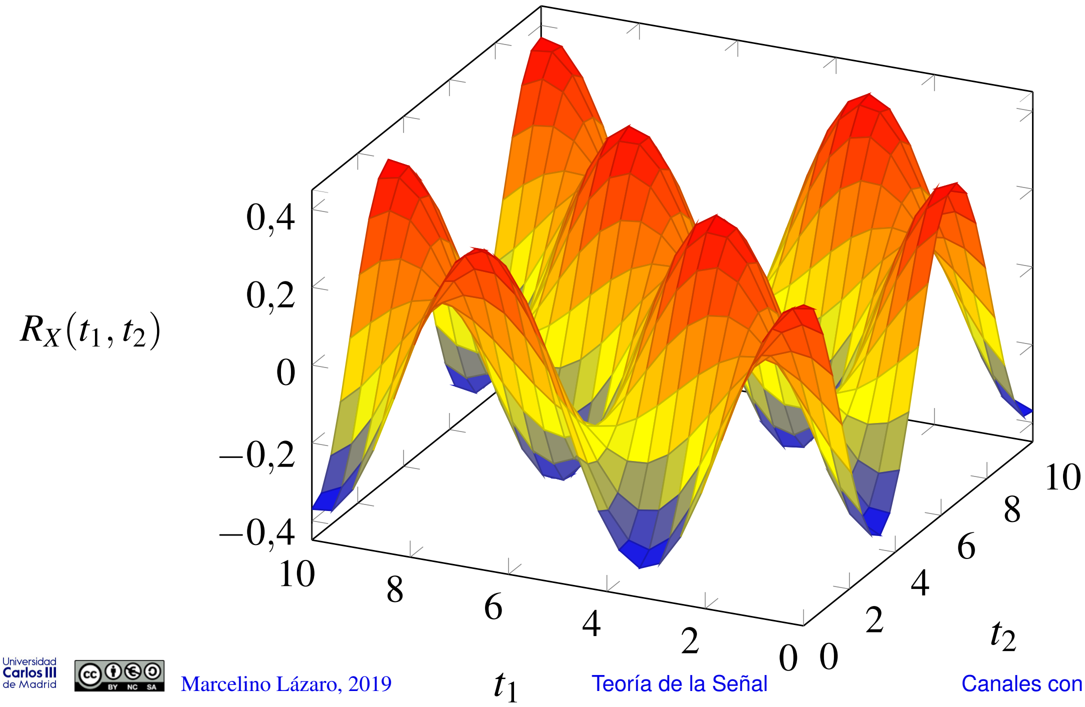
Media y función de autocorrelación: $m_X(t)$, $R_X(t_1,t_2)$ - Ej. I



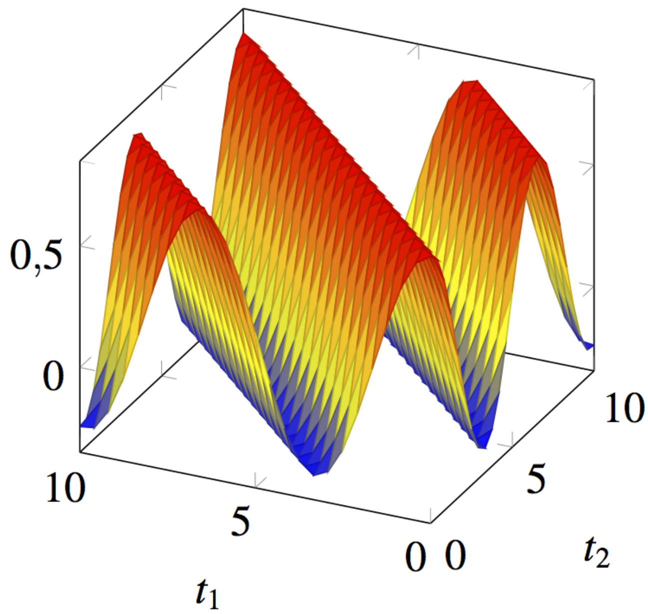


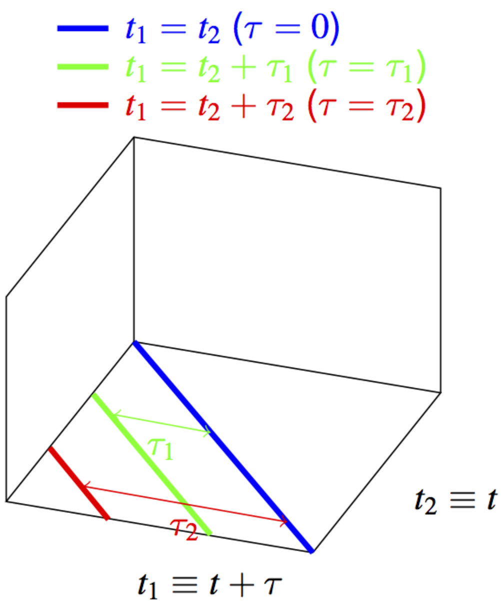
Media y función de autocorrelación: $m_X(t)$, $R_X(t_1, t_2)$ - Ej. II



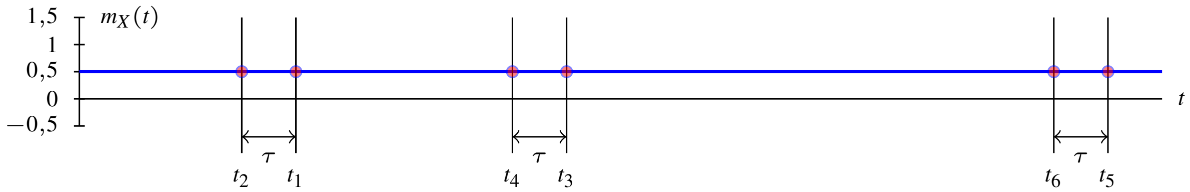


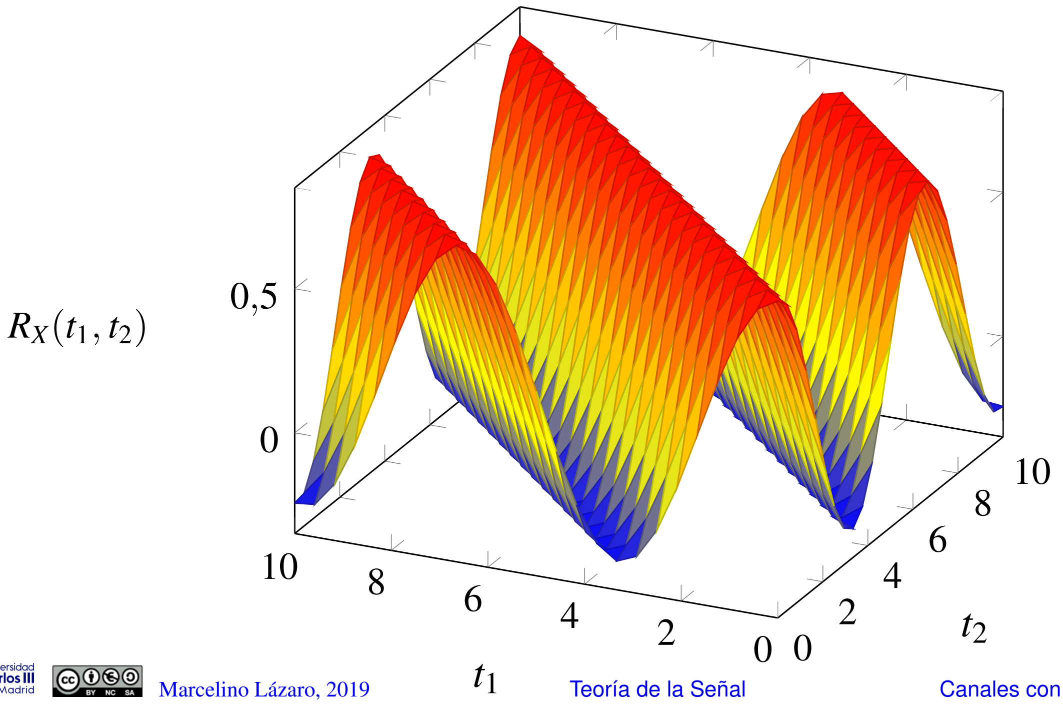
Media y función de autocorrelación: $m_X(t)$, $R_X(t_1, t_2)$ - Ej. I



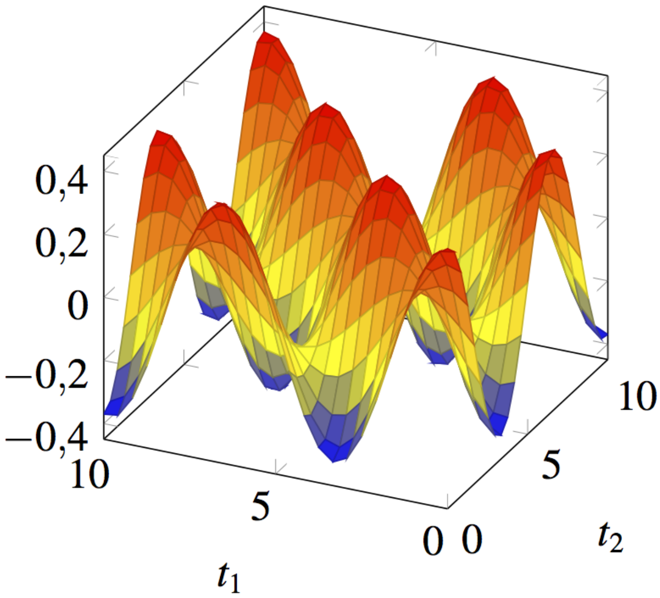


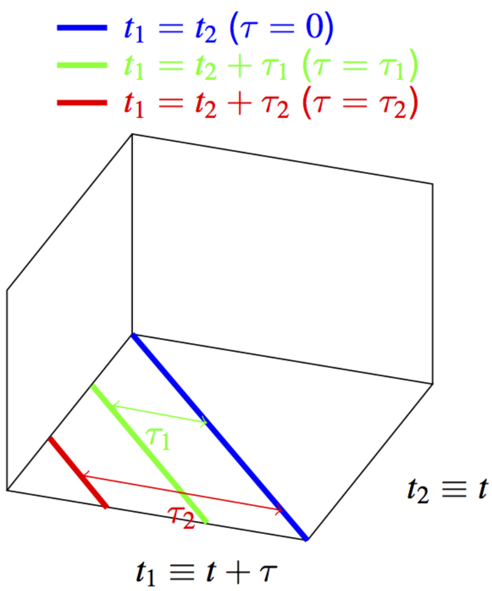
Media y función de autocorrelación: $m_X(t)$, $R_X(t_1, t_2)$ - Ej. II





Función de autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) \equiv R_X(t+\tau, t)$





Proceso aleatorio $X(t, \lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo III

- Experimento aleatorio: lanzamiento de un dado
  - 6 posibles resultados

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

- Proceso aleatorio
  - Una señal para cada posible resultado del experimento

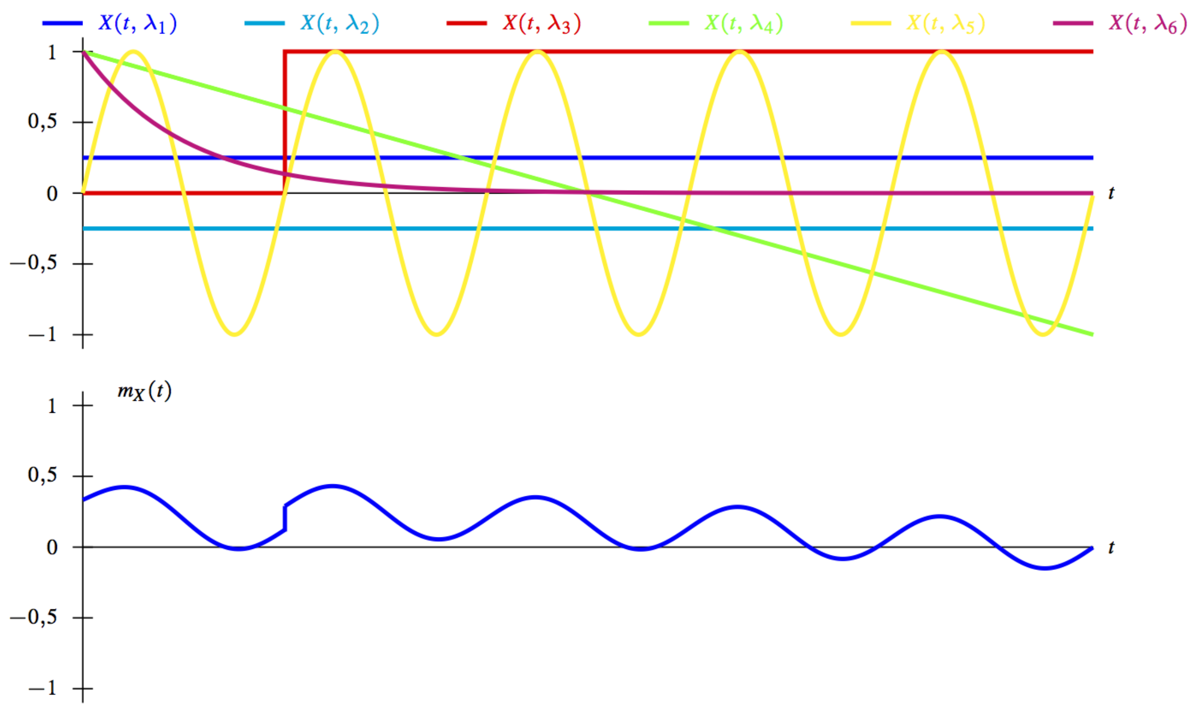
$$X(t, \lambda_1) = \frac{1}{4}, \qquad X(t, \lambda_2) = -\frac{1}{4}$$

$$X(t, \lambda_3) = u(t-2) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 2 \\ 0, & \text{si } t < 2 \end{cases}$$

$$X(t, \lambda_4) = 1 - \frac{t}{5}$$

$$X(t, \lambda_5) = e^{-t}, \qquad X(t, \lambda_6) = \sin(\pi t)$$

Proceso aleatorio $X(t, \lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo III



Procesos aleatorios en el dominio de la frecuencia

- Espectro de una de las señales del proceso aleatorio

$$x_i(t) = X(t, \lambda_i) \rightarrow X_i(j\omega) = \mathcal{TF}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\; e^{-j\omega t}\; dt$$

  - No todas las señales tienen definida una transformada de Fourier
- Definición de señales truncadas de duración T

$$x_i^{[T]}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| < T/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Las señales truncadas sí tienen definida la transformada

$$X_i^{[T]}(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{x_i^{[T]}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^{[T]}(t)\; e^{-j\omega t}\; dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)\; e^{-j\omega t}\; dt$$

Densidad espectral de potencia

- Proceso aleatorio truncado de duración T

  $X^{[T]}(t)$: Proceso cuyas señales son $X^{[T]}(t, \lambda_i) = x_i^{[T]}(t)$ (truncadas)

- Proceso aleatorio truncado en el dominio de la frecuencia

  $X^{[T]}(j\omega)$: Proceso cuyas señales son las TF de $x_i^{[T]}(t)$, i.e., $X_i^{[T]}(j\omega)$

- Densidad espectral de potencia de $X(t)$

$$S_X(j\omega) \stackrel{def}{=} E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X^{[T]}(j\omega)\right|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X^{[T]}(j\omega)\right|^2\right]}{T}$$

Representación del comportamiento medio del módulo al cuadrado de la tranformada de Fourier de todas las señales que componen el proceso aleatorio (con el "*truco*" de truncar para asegurar la existencia de dicha transformada de Fourier para todas las señales, y llevando la longitud de truncado al límite)

  - Implicación: $S_X(j\omega) \geq 0, \quad \forall\omega$

Teorema de Wiener-Khinchin

Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo $\mathcal{A}$, de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau,t)dt \right| < \infty$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\{< R_X(t+\tau,t) >\}$$

siendo el promedio temporal de la función de autocorrelación

$$< R_X(t+\tau,t) > \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau,t)\ dt$$

Teorema de Wiener-Khinchin - Corolarios

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau\ R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{R_X(\tau)\right\}$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_o} R_X(t+\tau,t)\ dt \right| < \infty$$

entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{\widetilde{R}_X(\tau)\right\}$$

donde

$$\widetilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} R_X(t+\tau,t)\ dt$$

y T_o es el período del proceso cicloestacionario

Potencia de un proceso aleatorio

- En el dominio de la frecuencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\ d\omega$$

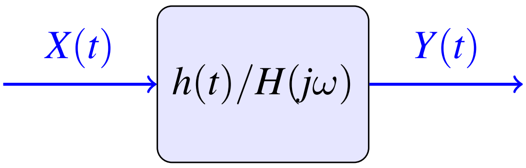
- En el dominio del tiempo
  - Proceso estacionario

$$P_X = R_X(0)$$

  - Proceso cicloestacionario

$$P_X = \tilde{R}_X(0)$$

Procesos aleatorios estacionarios y sistemas lineales



Teorema: $X(t)$ es estacionario, de media m_X, función de autocorrelación $R_X(\tau)$, y densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$. El proceso pasa a través de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)$ y respuesta en frecuencia $H(j\omega)$. En este caso, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios*, siendo

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ dt = m_X H(0)$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * r_h(t)$$

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)\ |H(j\omega)|^2$$

Proceso gausiano

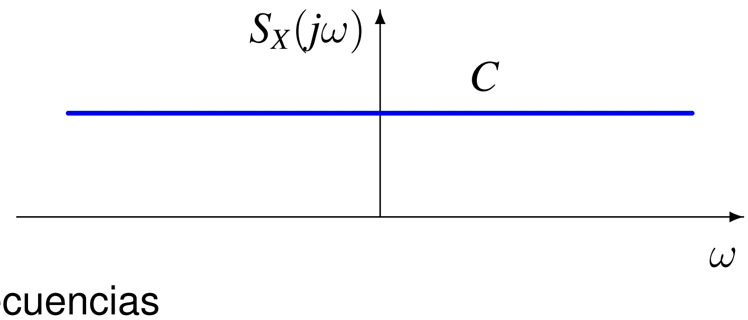
- <u>Definición</u>: $X(t)$ es un *proceso gausiano* si para todo n y todo $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, las variables aleatorias $\{X(t_i)\}_{i=1}^{n}$ tienen una distribución conjuntamente gausiana
- Propiedades de los procesos gausianos
  - $m_X(t)$ y $R_X(t_1, t_2)$, proporcionan una descripción estadística completa del proceso
    - ★ Permiten calcular vector de medias y matriz de covarianzas
      - Para $X(t_i)$, $\Rightarrow \mu_i = m_X(t_i)$
      - $X(t_i), X(t_j)$, $\Rightarrow C_{i,j} =$Cov($X(t_i)$,$X(t_j)$)=$R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i)\, m_X(t_j)$
  - Para procesos gausianos, estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio son equivalentes
  - Si $X(t)$ pasa por un sistema lineal e invariante, el proceso de salida, $Y(t)$ es gausiano
  - Para $X(t)$ gausiano, estacionario y de media nula, una condición suficiente para la ergodicidad de $X(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)|\, d\tau < \infty$$

Proceso blanco

- Un proceso es blanco si su densidad espectral de potencia es constante para todas las frecuencias

$$S_X(j\omega) = C$$



  - Consecuencias
    - ★ Función de autocorrelación de un proceso blanco estacionario

$$R_X(\tau) = \mathcal{TF}^{-1}\{C\} = C\, \delta(\tau)$$

    - ★ La potencia de un proceso blanco es infinita

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C\, d\omega = \infty$$

Filtrado de un proceso blanco

- Proceso $X(t)$ blanco con $S_X(j\omega) = C$ se filtra ($h(t)$ / $H(j\omega)$)
- Densidad espectral de potencia a la salida del filtro ($Y(t)$)

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)\ |H(j\omega)|^2 = C\ |H(j\omega)|^2$$

  - En general el proceso $Y(t)$ no es blanco
- Función de autocorrelación

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * r_h(\tau) = C\ r_h(\tau)$$

- Potencia del proceso

$$P_Y = R_Y(0) = C\ r_h(0)$$

  - Como por definición $r_h(0) = \mathcal{E}\{h(t)\}$

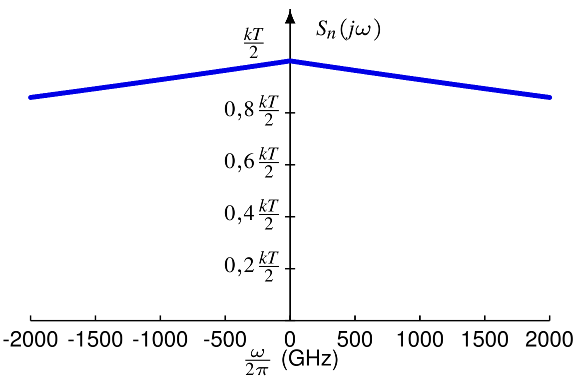
$$P_Y = C\ \mathcal{E}\{h(t)\}$$

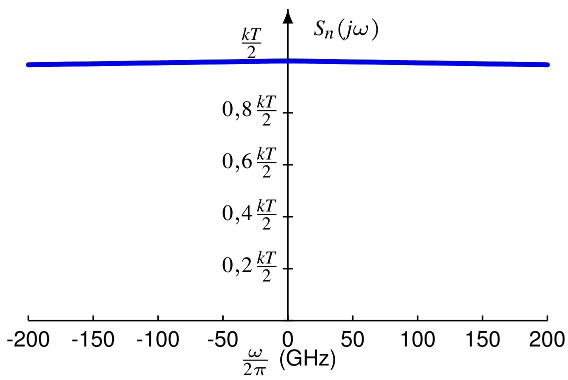
Ruido térmico

- Densidad espectral de potencia del ruido térmico (mecánica cuántica)

$$S_n(j\omega) = \frac{h\omega}{4\pi(e^{\frac{h\omega}{2\pi kT}} - 1)}$$

donde
- h: Constante de Planck (6.6×10^{-34} Julios $\times$ segundo)
- k: Constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} Julios/ºKelvin)
- T: Temperatura en grados Kelvin
- ω: Pulsación (2π veces la frecuencia) en rad/s





- Estadística gausiana

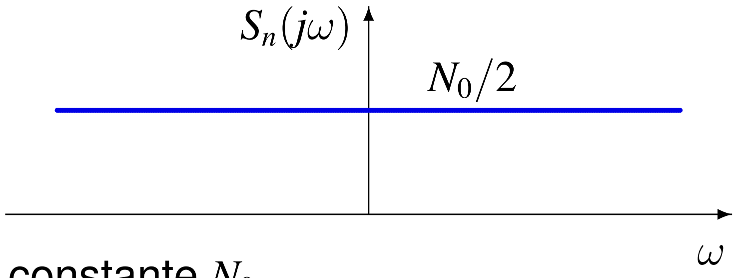
Modelo de ruido térmico

- Proceso aleatorio $n(t)$
  - Blanco, gausiano, estacionario y ergódico
  - Media nula ($m_n = 0$)
  - Función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$

  - Densidad espectral de potencia

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$

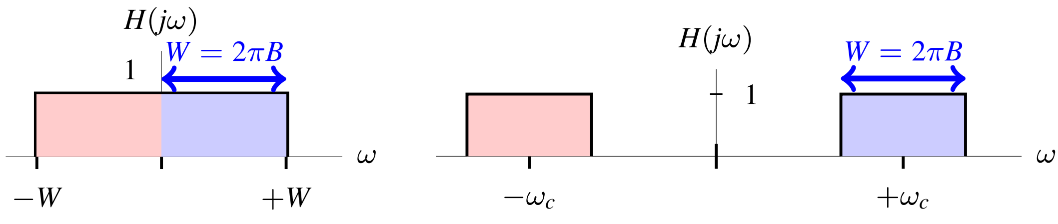


- Valor de la constante N_0

$$N_0 = k\,T^{a} \text{ Watt/Hz}$$

Potencia de ruido térmico a la salida de filtros ideales

- Filtros ideales de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s): filtro paso bajo o filtro paso banda con frecuencia central f_c Hz (o $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s)



- Proceso de salida de los filtros

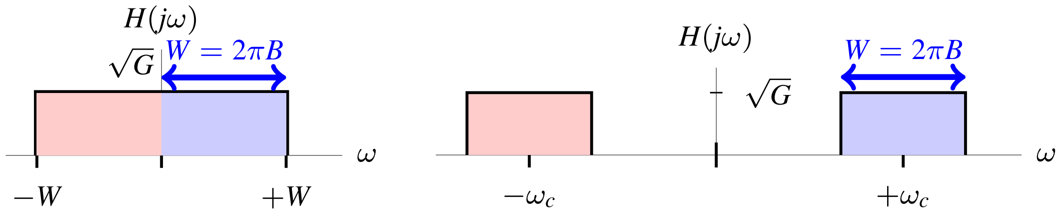
$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2}\,|H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\,d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2B} = N_0\,B$$

Potencia de ruido térmico en filtros ideales con ganancia

- Filtros ideales (paso bajo/paso banda) de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s) y con ganancia en potencia G (ganancia en voltaje $\sqrt{G}$)



Filtro paso bajo — Filtro paso banda (frecuencia central ω_c rad/s)

- Proceso de salida de los filtros

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2}\,|H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\,d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2BG} = N_0\,B\,G$$

Ancho de banda equivalente de ruido

- Salida de un sistema lineal (respuesta $h(t)$, $H(j\omega)$)

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2}\,|H(j\omega)|^2$$

- Potencia de ruido a la salida de un sistema lineal

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\,d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Potencia de ruido en función del ancho de banda equivalente de ruido

$$P_Z = N_0\,B_{eq}\,G_{eq}$$

  - B_{eq}: Ancho de banda equivalente de ruido
  - G_{eq}: Ganancia en potencia equivalente

$$G_{eq} = H_{max}^2, \text{ con } H_{max} = \max_{\omega} |H(j\omega)|$$

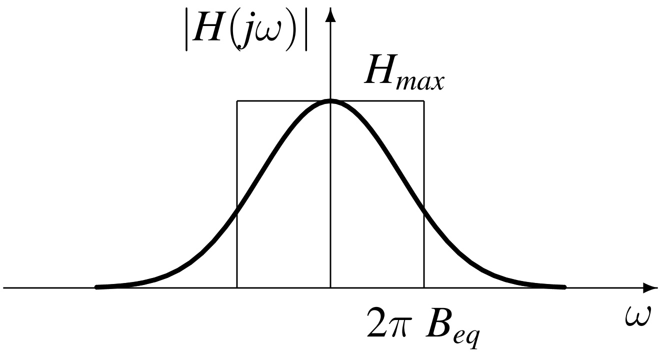
Ancho de banda equivalente de ruido - Identificación

- Identificación del valor de B_{eq}

$$B_{eq} = \frac{\mathcal{E}\{h(t)\}}{2\ G_{eq}}$$

$$\mathcal{E}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\ d\omega$$

- Interpretación: Un sistema lineal ideal, de ancho de banda B_{eq} y amplitud H_{max} ($\sqrt{G_{eq}}$) tiene la misma potencia de ruido a la salida que el filtro $h(t)$



Relación señal a ruido: necesidad de filtrado de ruido

- Planteamiento
  - Señal a la transmitida: proceso $X(t)$, con potencia P_X
  - Ruido aditivo: modelo de ruido térmico $n(t)$
  - Filtro (normalmente en el receptor): respuestas $h(t)$ y $H(j\omega)$
    - ★ Señal a la salida del filtro receptor: proceso $Y(t)$
    - ★ Ruido a la salida del filtro receptor: proceso $Z(t)$

$$X(t) + n(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t) + Z(t)$$

- Relación señal a ruido sin filtrar

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{in} = \frac{P_X}{P_n}, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{in} \text{(dB)} = 10 \log_{10} \frac{P_X}{P_n}$$

- Relación señal a ruido a la salida del filtro

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{out} = \frac{P_Y}{P_Z}, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{out} \text{(dB)} = 10 \log_{10} \frac{P_Y}{P_Z}$$

Relación señal a ruido: necesidad de filtrado de ruido (II)

- Relación señal a ruido antes de filtrar

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{in} = \frac{P_X}{P_n} = \frac{P_X}{\infty} = 0, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{in} (\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_X}{P_n} = -\infty$$

Es necesario filtrar para limitar la potencia del ruido térmico!!

- Relación señal a ruido a la salida del filtro

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{out} = \frac{P_Y}{P_Z}, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{out} (\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z}$$

  - Pot. señal: $P_Y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\, |H(j\omega)|^2\, d\omega$
  - Potencia ruido: $P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega)\, d\omega = \frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, d\omega$
    - ★ Filtros ideales (sin ganancia | con ganancia)

$$P_Z = N_0\, B \quad \Big| \quad P_Z = N_0\, B\, G$$

    - ★ Filtro con ancho de banda equivalente B_{eq} y ganancia G_{eq}

$$P_Z = N_0\, B_{eq}\, G_{eq}$$

Modelo de canal lineal para sistemas de comunicaciones

- Distorsión lineal
  - Sistema lineal e invariante
    - ★ Respuesta al impulso $h(t)$
    - ★ Respuesta en frecuencia $H(j\omega)$
- Ruido térmico
  - Suma de ruido blanco y gausiano, con $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$