

Fundamentos de Teoría de la Señal
Máster Universitario en Internet de las Cosas:
Tecnologías Aplicadas

Capítulo 5

Modulación y demodulación

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid



1 / 80

Índice de contenidos

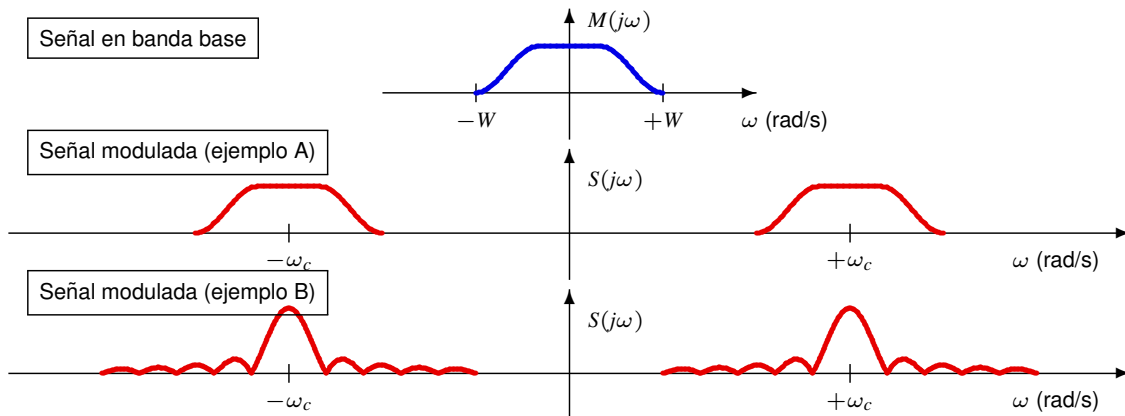
- Introducción al concepto de modulación
 - ▶ Interpretación frecuencial
 - ▶ Propósito
- Modulaciones analógicas
 - ▶ Modulaciones de amplitud
- Modulaciones digitales
 - ▶ Modulaciones PAM (o ASK)
 - ★ Transmisión en banda base
 - ★ Interferencia entre símbolos
- ISI: *Inter-Symbol Interference*
 - ★ Transmisión paso banda
 - ★ Límites en la tasa de transmisión

Sistemas de comunicaciones analógicos

- Señal de información (moduladora): $m(t)$
 - ▶ Señal analógica: la información está en la forma de onda



- Modos de transmisión en sistemas analógicos
 - ▶ Transmisión en banda base (sin modular)
 - ▶ Transmisión de la señal modulada
 - Se traslada el espectro de la señal (frecuencia central o de portadora ω_c)
 - Se puede modificar o no la forma o ancho de banda del espectro de la señal



Introducción al concepto de modulación

- Modulación analógica: se imprime la señal analógica en la amplitud, frecuencia o fase de una portadora sinusoidal

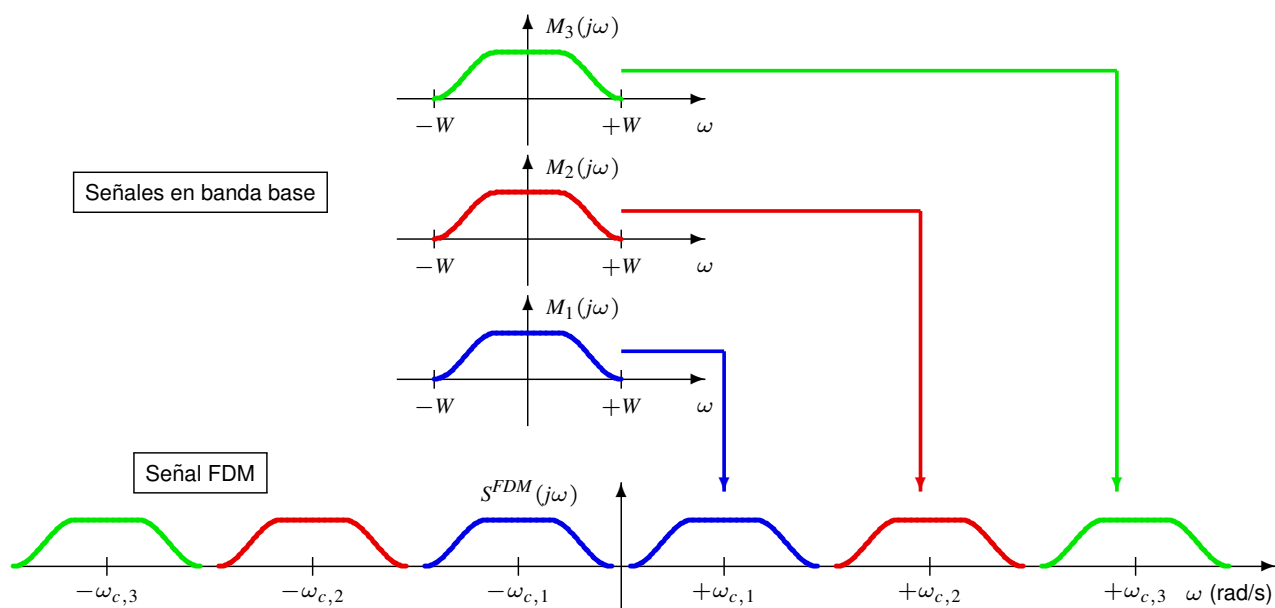
$$c(t) = A_c \cos(\underbrace{2\pi f_c t}_{\omega_c} + \phi_c)$$

Parámetros de la portadora: A_c, f_c (o equivalentemente ω_c) y ϕ_c

- Propósito de la modulación de una señal analógica
 - 1 Adecuar la señal a las características del canal cambiando el rango de frecuencias
 - 2 Multiplexar: acomodar la transmisión simultánea de distintas señales en un mismo medio
 - ★ Multiplexación por división en frecuencia (FDM)
 - 3 Expandir el ancho de banda para aumentar la inmunidad al ruido de la señal modulada durante la transmisión

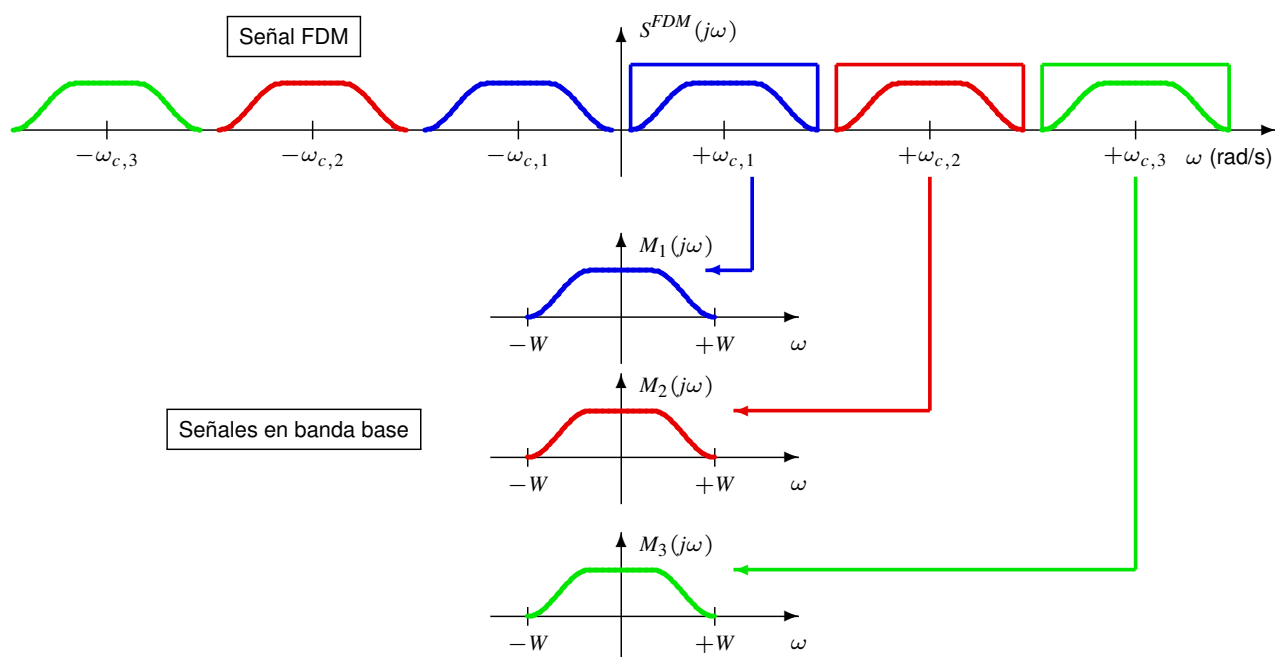
Multiplexación por división en frecuencia (FDM)

- Se traslada el espectro de distintas señales a distintas bandas de frecuencia de forma que no se solapen (en frecuencia)



Multiplexación por división en frecuencia (FDM)

- En el receptor, se filtra el espectro de cada señal y se devuelve a banda base, lo que permite recuperar cada señal



Modulaciones analógicas

Tipos de modulaciones analógicas

- Modulación de amplitud (AM)

AM: *Amplitude Modulation*

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Modulaciones angulares

Mejor comportamiento frente al ruido que las modulaciones de amplitud

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)

FM: *Frequency Modulation*

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora

- ▶ Modulación de fase (PM)

PM: *Phase Modulation*

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

Señal analógica a transmitir: señal moduladora $m(t)$

- Caso determinista: características de la señal
 - ▶ Señal paso bajo de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s)
 - ★ Transformada de Fourier $M(j\omega)$ con $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$
 - ▶ Es una señal de potencia. Su potencia es

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |m(t)|^2 dt$$

- Caso aleatorio: análisis estadístico (señal “promedio”)
 - ▶ Modelo para la señal: proceso aleatorio $M(t)$
 - ▶ Proceso aleatorio estacionario en sentido amplio (WSS)
 - ▶ Media nula
 - ▶ Función de autocorrelación $R_M(\tau)$
 - ▶ Densidad espectral de potencia $S_M(j\omega)$
 - ▶ Proceso limitado en banda: $S_M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$
 - ▶ Potencia: P_M

$$P_M = R_M(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(j\omega) d\omega$$

Modulaciones de amplitud (AM)

- La señal moduladora (o mensaje) $m(t)$ se imprime en la amplitud de la señal portadora $c(t)$, es decir, en A_c

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Existen distintas variantes de modulación AM
 - ▶ AM: Modulación AM convencional (con portadora)
 - ▶ DBL: Doble Banda Lateral (sin portadora)*
 - ★ DSB: *Doble Sided Band*
 - ▶ BLU: Banda Lateral Única*
 - ★ SSB: *Single Sided Band*
 - ▶ BLV: Banda Lateral Vestigial
 - ★ VSB: *Vestigial Sided Band*

Modulación de doble banda lateral (DBL) sin portadora

- Producto por una portadora

$$s(t) = m(t) \times c(t) = m(t) \times A_c \cos(\omega t + \phi_c)$$

- Respuesta en frecuencia

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{TF}\{m(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega t + \phi_c)\} \\ &= \frac{A_c}{2} [M(j\omega - j\omega_c) e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) e^{-j\phi_c}] \end{aligned}$$

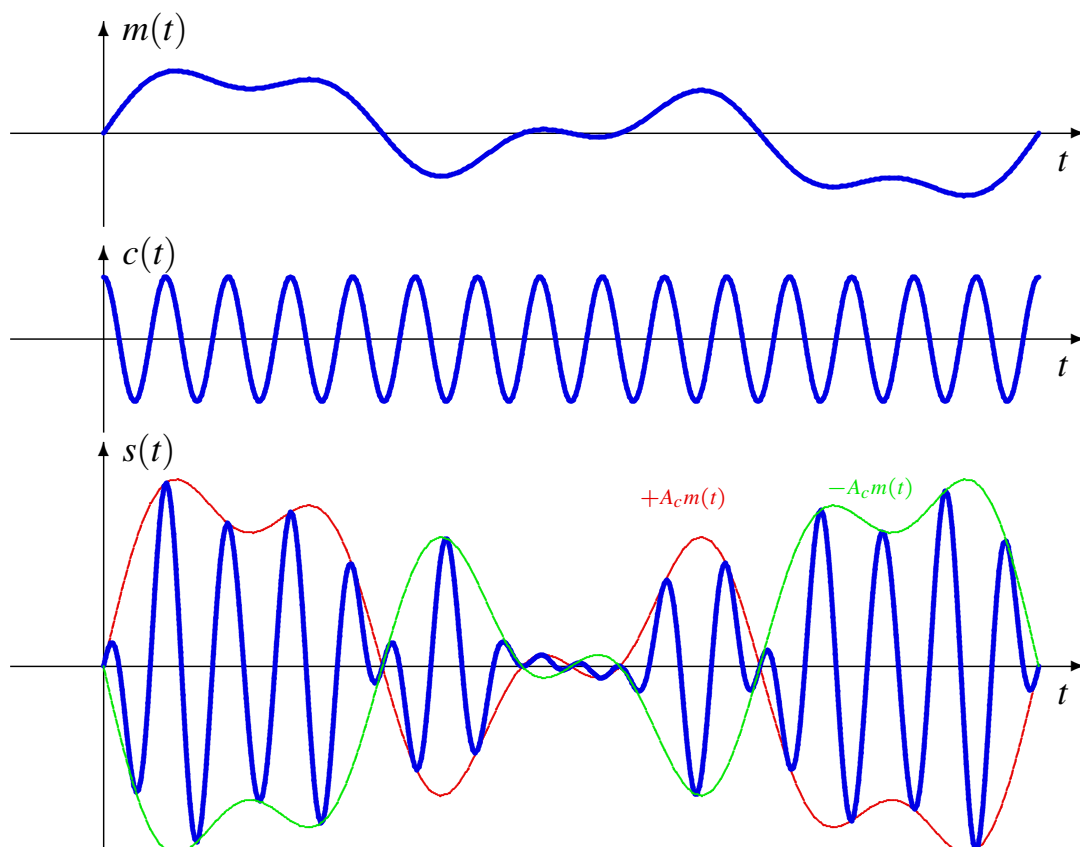
- ▶ Réplicas de $M(j\omega)$ en $\pm\omega_c$
 - ★ Cambia el escalado de las réplicas (al no haber normalización)
 - ★ Nombre: dos bandas laterales, inferior ($|\omega| < \omega_c$) y superior ($|\omega| > \omega_c$)

- Ancho de banda

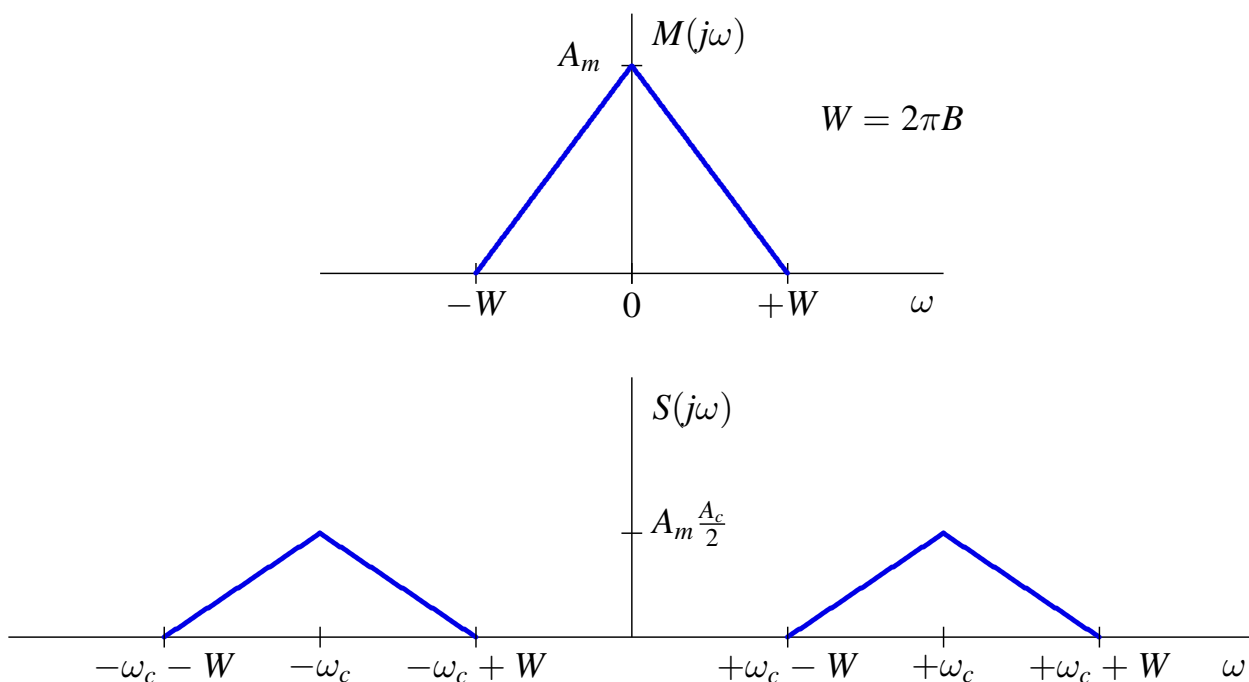
$$BW_{DBL} = 2 B \text{ Hz}$$

Doble que el de la señal moduladora que se transmite

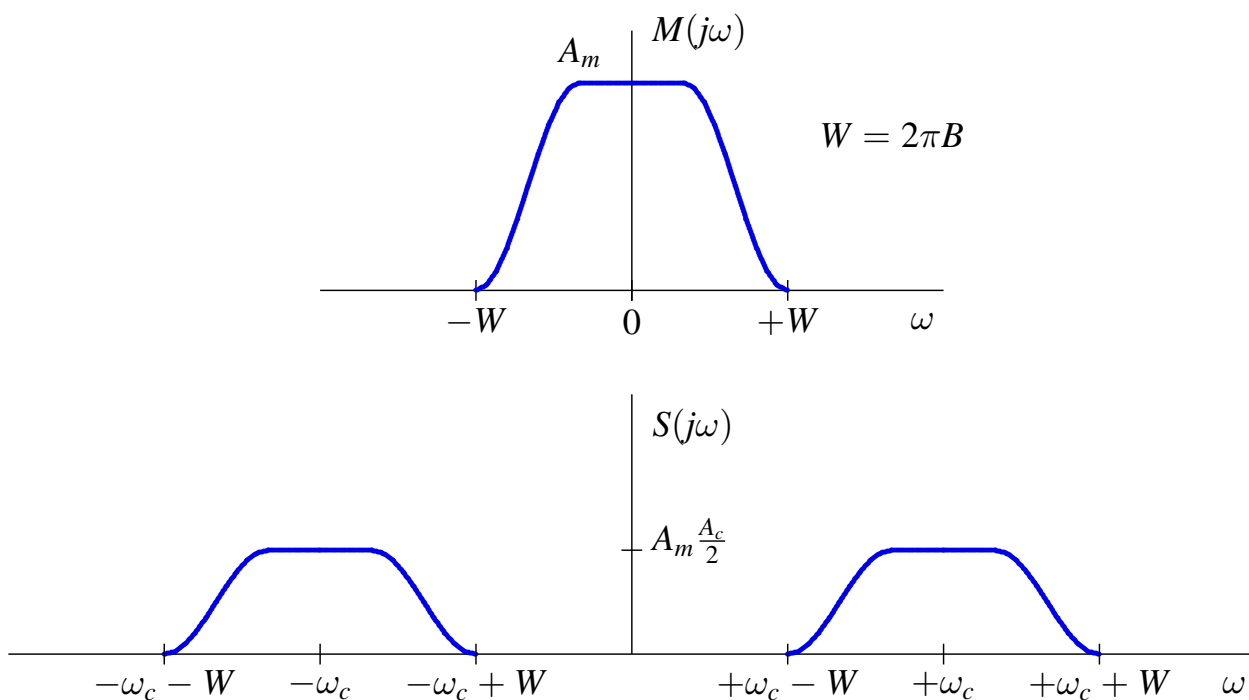
Forma de onda de una modulación AM DBL



Espectro de la señal AM DBL



Espectro de la señal AM DBL (otro ejemplo)



Análisis estadístico de la modulación DBL (II)

- Densidad espectral de potencia

$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{4} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

- Ancho de banda de la modulación DBL

$$BW_{AM} = 2 B \text{ Hz}$$

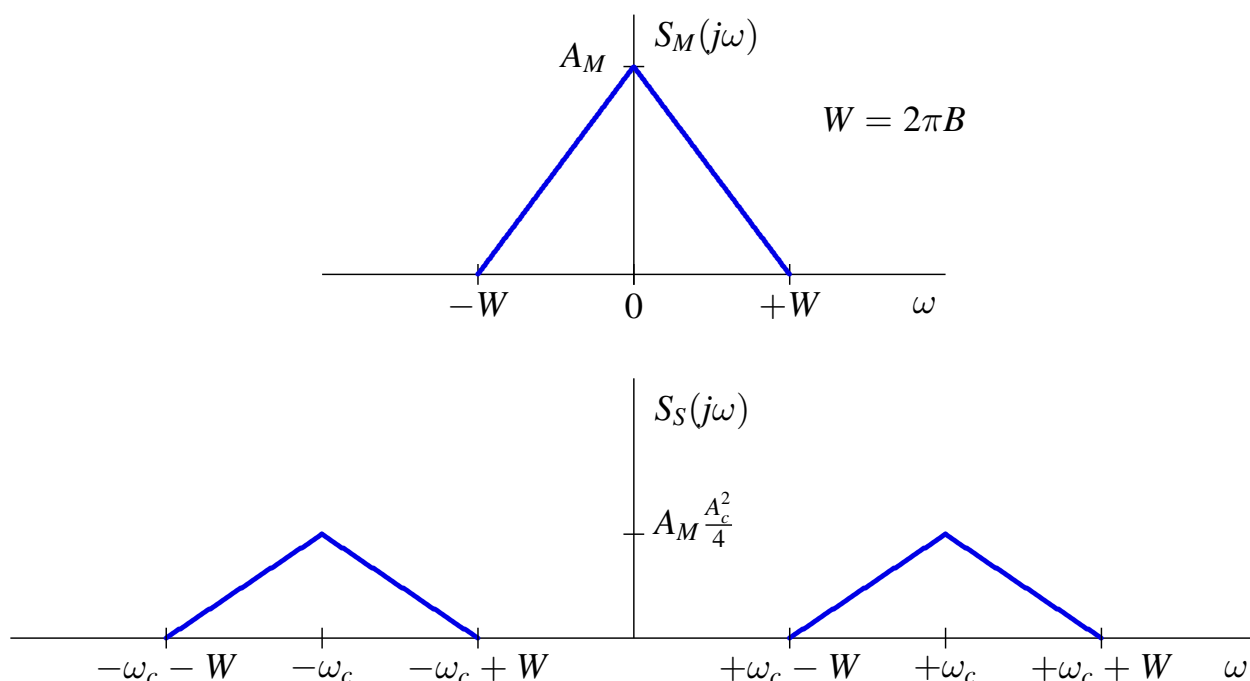
Doble que el de la señal moduladora que se transmite

- Potencia de la señal DBL

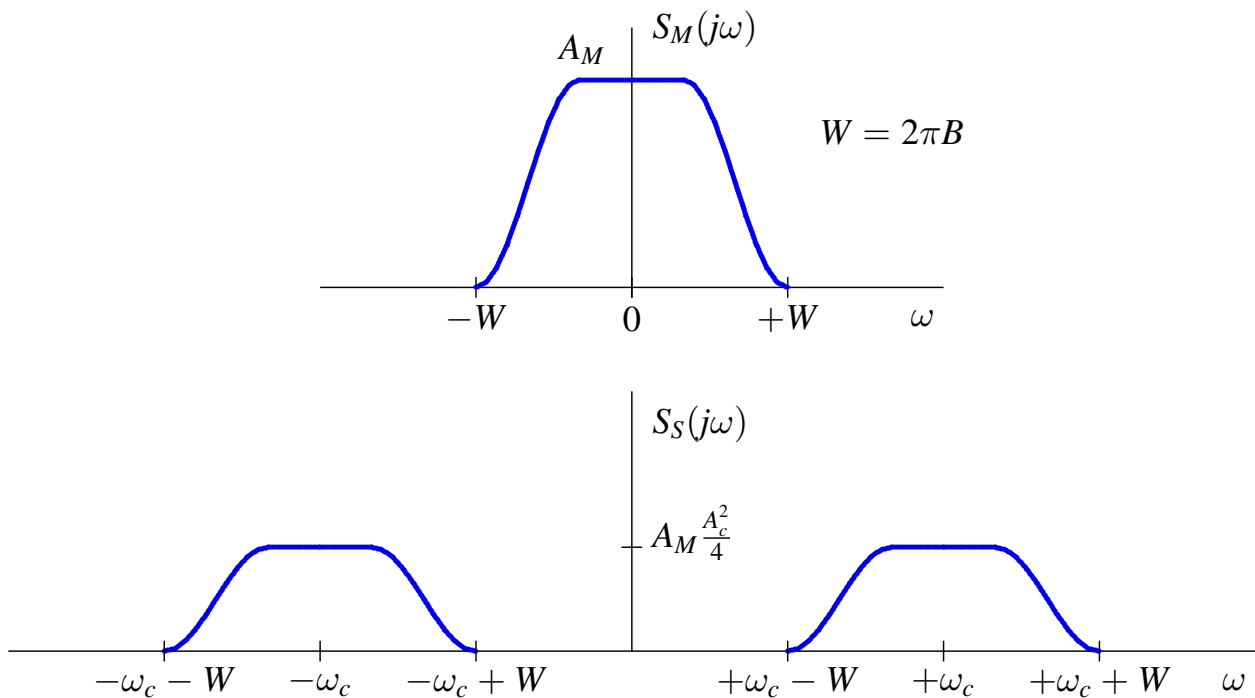
$$P_S = \frac{A_c^2}{2} P_M$$

Es eficiente en potencia (no se “malgasta” potencia en términos que no contienen información)

DEP de la señal AM DBL

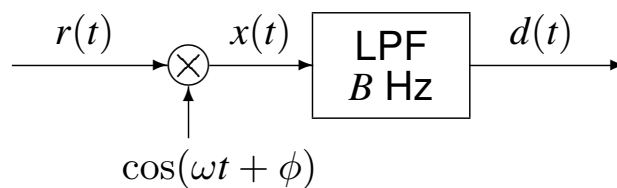


DEP de la señal AM DBL (otro ejemplo)



Demodulación señales DBL : Receptor síncrono o coherente

- Receptor para señales moduladas con DBL



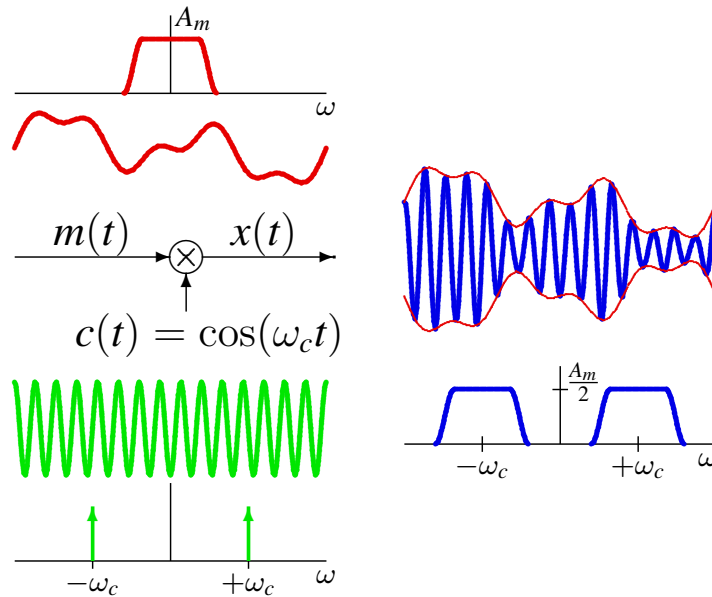
LPF: filtro paso bajo (ancho de banda de B Hz)

- ▶ Demodulador (multiplicar por la portadora $\cos(\omega_c t + \phi)$)
 - ▶ Filtro paso bajo (ancho de banda dado por la señal, B Hz)
- Rendimiento óptimo con un receptor síncrono o coherente
 - ▶ Receptor con la misma fase en la portadora del receptor que en la del transmisor $\phi = \phi_c$
- Efecto de un receptor no síncrono ($\phi \neq \phi_c$)
 - ▶ Atenuación del término relacionado con la señal $m(t)$
 - ▶ Pérdida de relación señal a ruido (prestaciones)
 - ★ El valor de la fase ϕ no varía la potencia debida al término de ruido

Revisión - Efecto de multiplicar por una senoide

- Multiplicar por una senoide de frecuencia ω_c genera, espectralmente, dos réplicas de la forma del espectro de la señal modulada, desplazadas $\pm\omega_c$

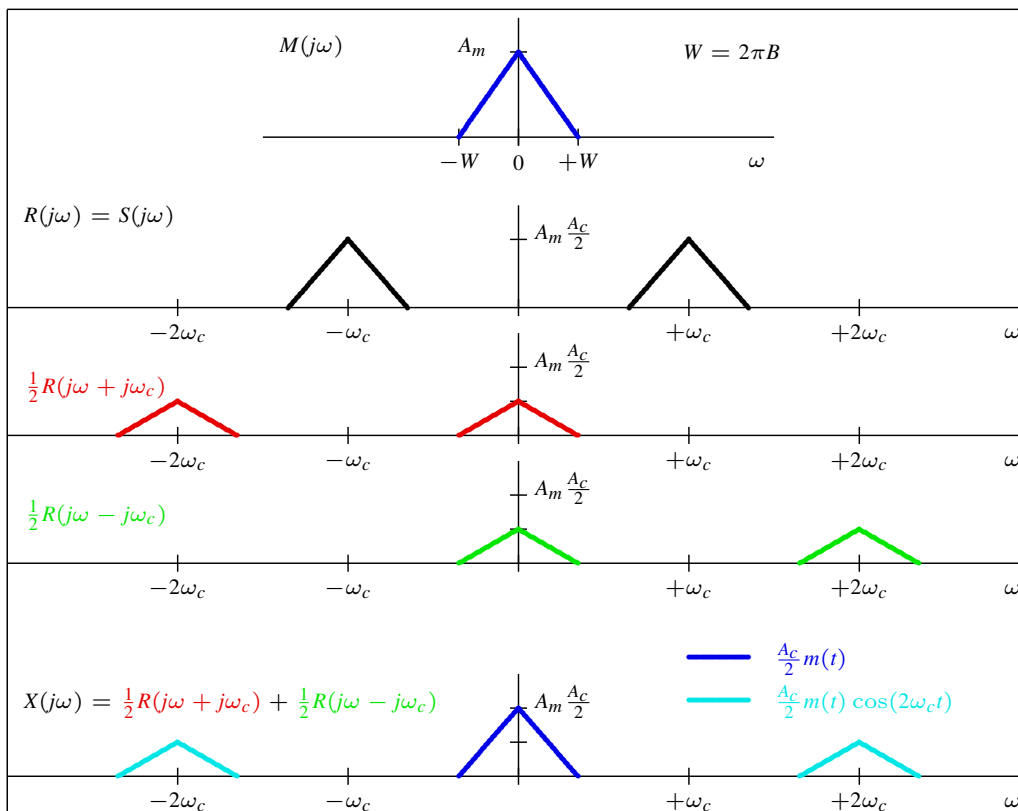
$$x(t) = m(t) \times \cos(\omega_c t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}M(j\omega + j\omega_c)$$



Densidad espectral de potencia: $S_X(j\omega) = \frac{1}{4}S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_M(j\omega + j\omega_c)$

Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

- Por simplicidad, se asume que $\phi = \phi_c = 0$

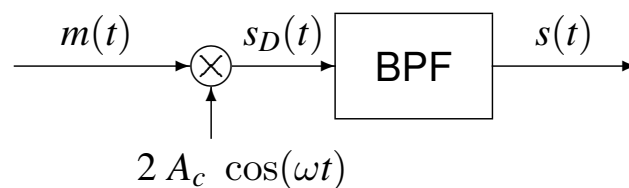


Receptor coherente - Posibles opciones

- El receptor debe identificar la fase de la portadora con que se moduló la señal $\phi = \phi_c$
- Opciones más frecuentes
 - ▶ Transmisión de un piloto (portadora de amplitud reducida)
 - ★ Ineficiencia en potencia
 - ▶ Utilización de un lazo enganchado en fase (PLL: *Phase Locked Loop*)
 - ★ Incrementa el coste del receptor

Modulación de banda lateral única (BLU)

- Eficiencia espectral: Se elimina una banda lateral $BW_{BLU} = B$ Hz.



- ▶ Por simplicidad en la notación se ha asumido $\phi_c = 0$

- Generación de la señal
 - ▶ Se genera una señal de doble banda lateral (con amplitud doble)
 - ▶ Se elimina una de las dos bandas laterales mediante filtrado
 - ★ BLU de banda lateral superior: se eliminan las frecuencias $|\omega| < \omega_c$
 - ★ BLU de banda lateral inferior: se eliminan las frecuencias $|\omega| > \omega_c$

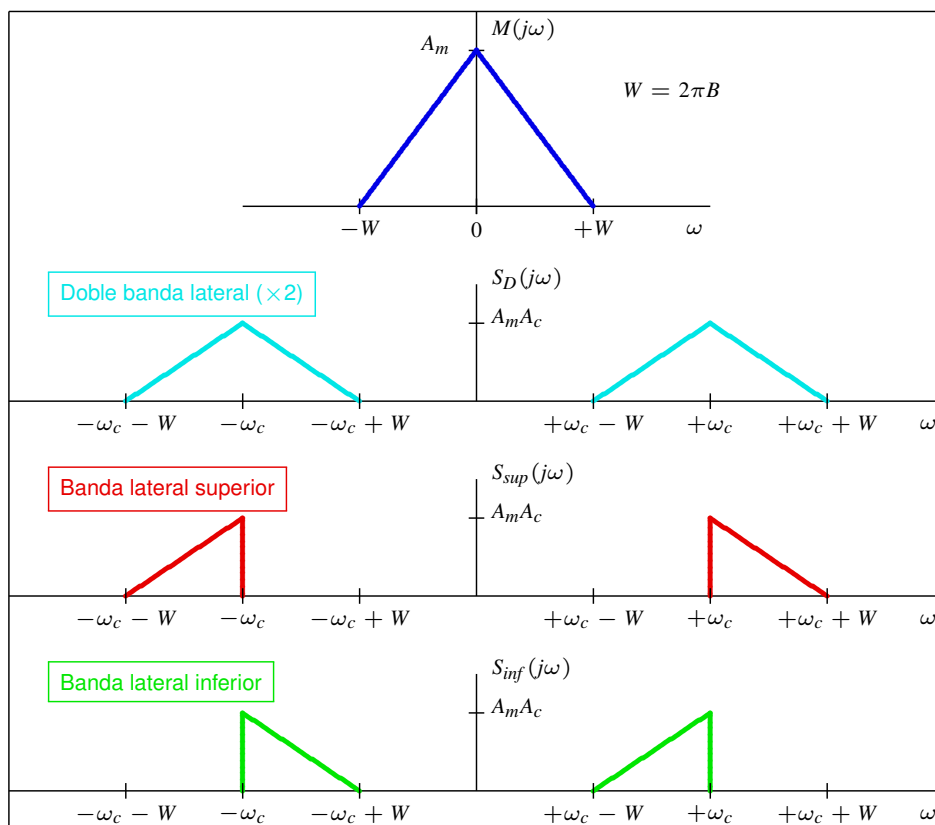
- Expresión analítica de la señal BLU resultante

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega t)$$

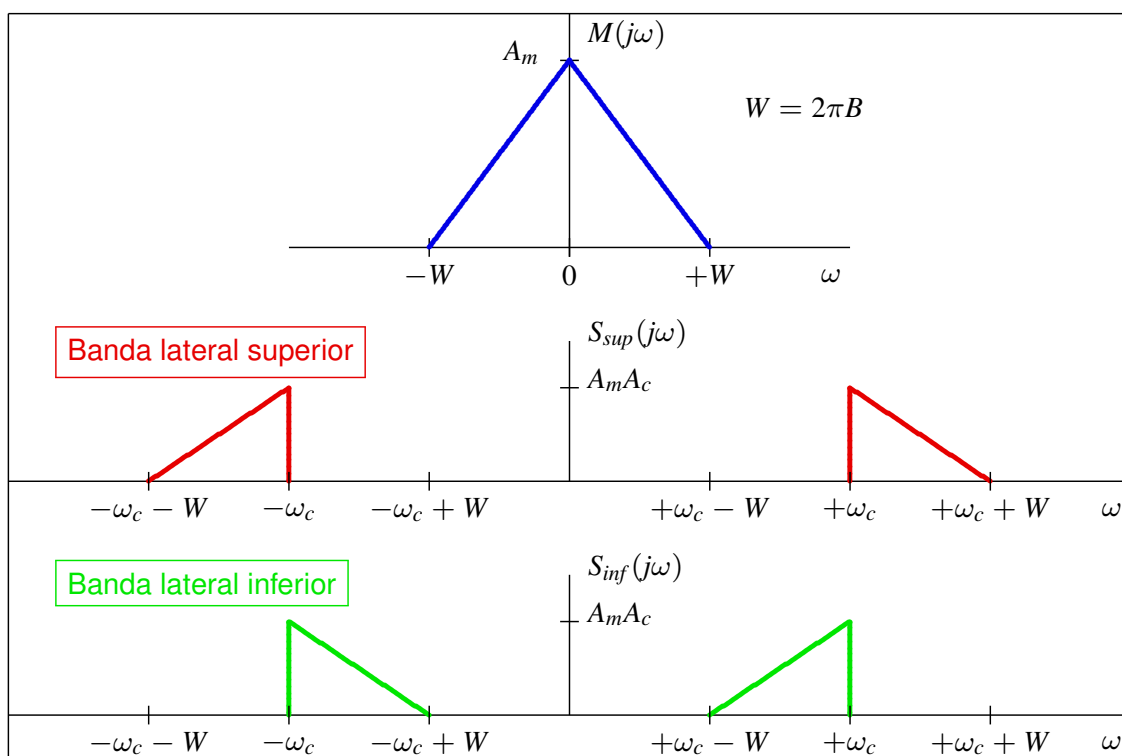
$\hat{m}(t)$: transformada de Hilbert de la señal moduladora $m(t)$

- ▶ Banda lateral superior (BLS): signo $-$
- ▶ Banda lateral inferior (BLI): signo $+$

Espectro de la señal AM de BLU



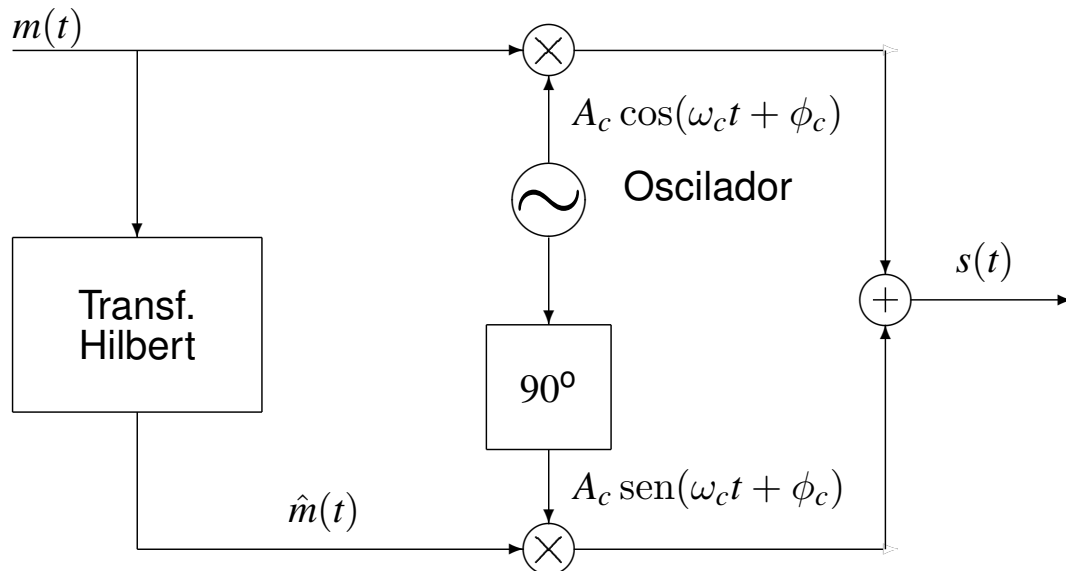
Espectro de la señal AM de BLU



Generación alternativa de BLU - Modulador de Hartley

- Implementación basada en la expresión analítica a partir de la transformada de Hilbert

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega t)$$



Ancho de banda y potencia de una BLU

- Densidad espectral de potencia
 - ▶ Banda lateral superior

$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| > \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- ▶ Banda lateral inferior

$$S_{S_{inf}}(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_c \\ A_c^2 [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- Ancho de banda

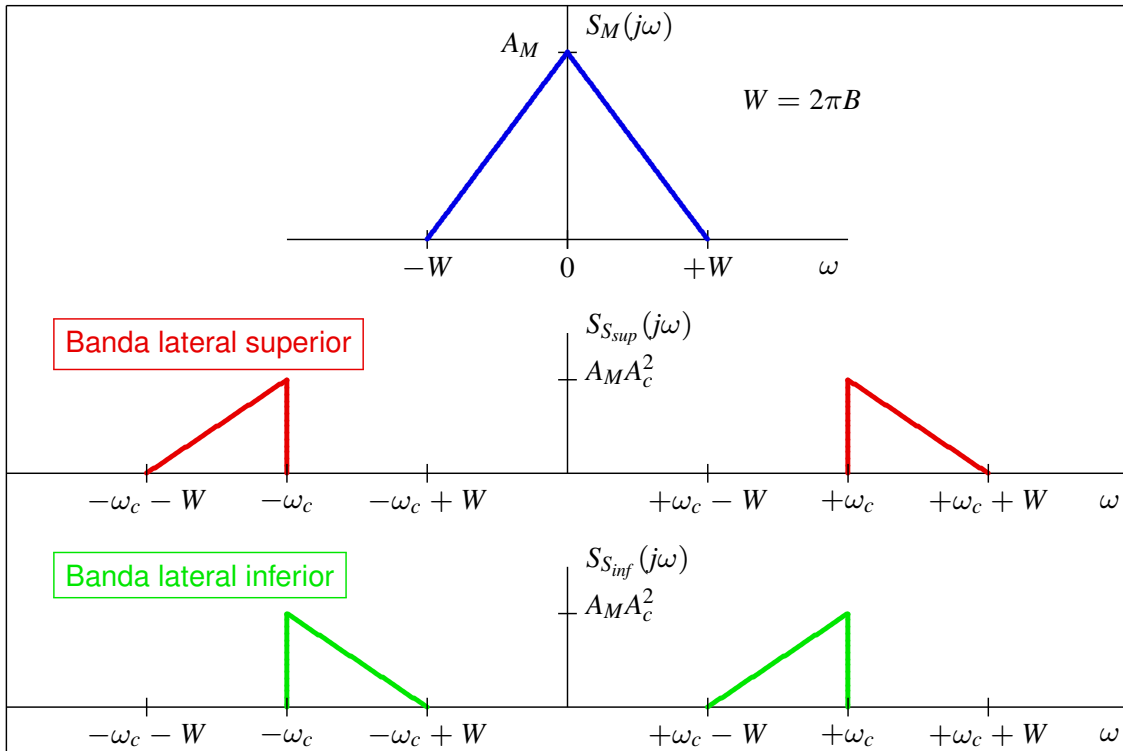
$$BW_{BLU} = B \text{ Hz}$$

Mismo ancho de banda que el de la señal moduladora transmitida

- Potencia de la señal

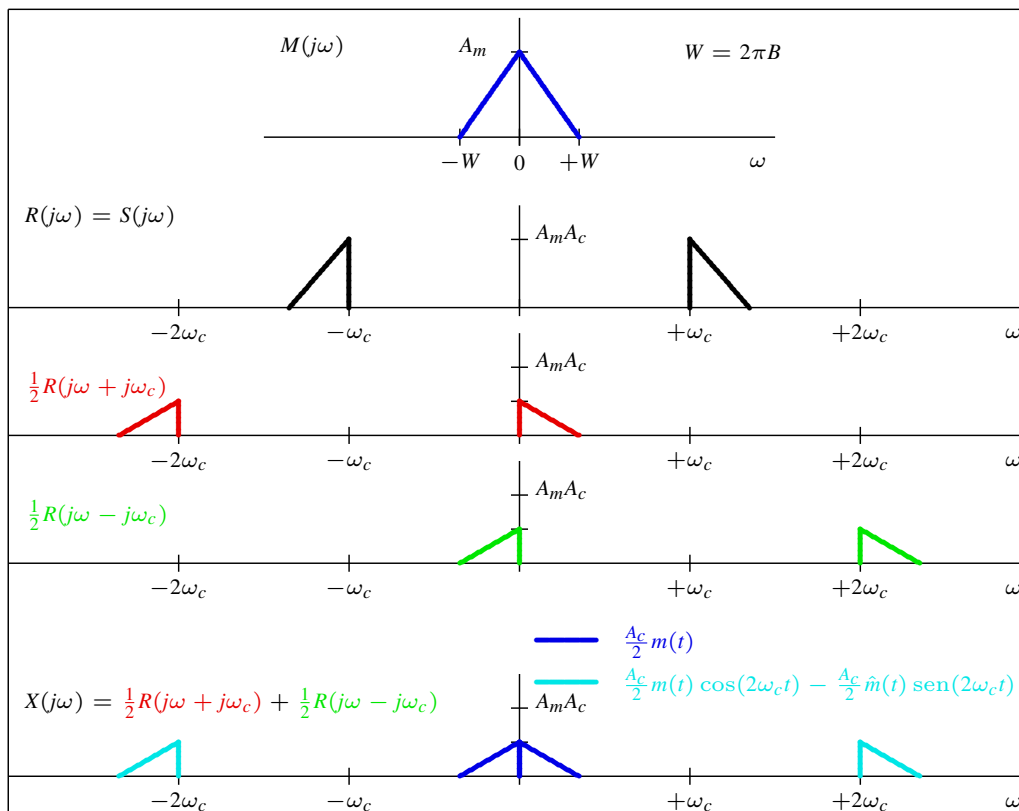
$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega = A_c^2 P_M$$

Densidad espectral de potencia de la señal AM de BLU



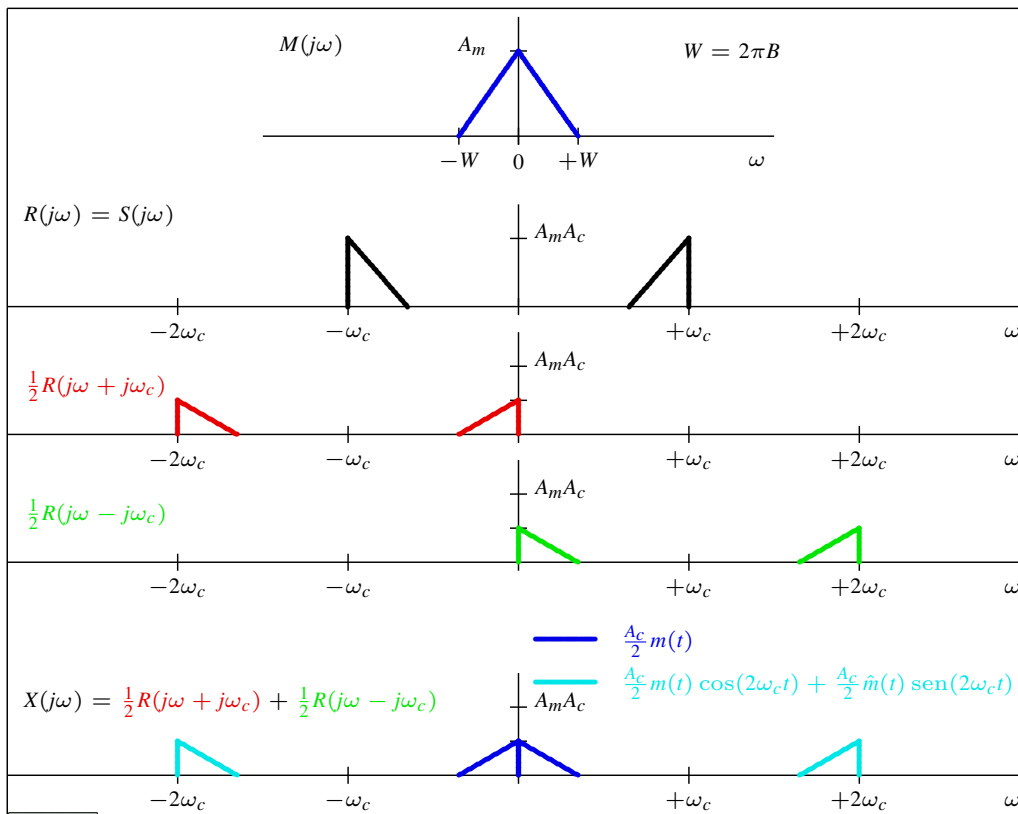
Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

- Ejemplo banda lateral superior



Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

● Ejemplo banda lateral inferior



Modulaciones Digitales

Modulación PAM en banda base

- Modulación unidimensional: $N = 1$

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT)$$

PAM (*Pulse Amplitude Modulation*), ASK (*Amplitude Shift Keying*)

- La secuencia $A[n]$ es la secuencia de símbolos
 - ▶ El alfabeto se denomina constelación (representación 1-D)
 - ▶ Conversión de bits a símbolos: codificador
 - ★ Constelaciones M -árias (M -PAM)

$$m = \log_2 M \text{ bits/símbolo}$$

- ★ Asignación binaria: codificación de Gray
- ★ Niveles normalizados:

$$A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}, \quad E_s = E[|A[n]|^2] = \frac{M^2 - 1}{3}$$

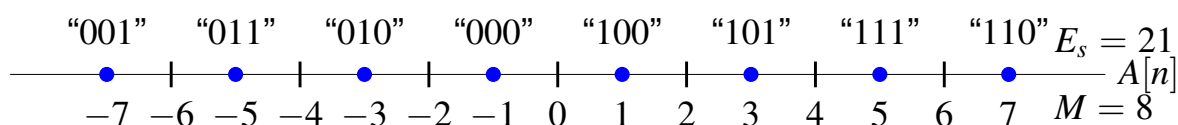
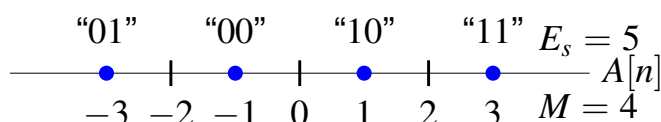
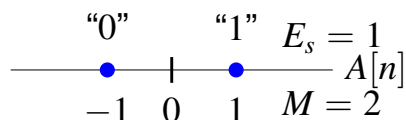
- Señal $g(t)$ (base ortonormal de dimensión 1)

- ▶ Recibe habitualmente dos nombres:
 - ★ Filtro transmisor
 - ★ Pulso conformador (aunque no sea necesariamente un pulso)

- ▶ Normalización: energía unidad ($\mathcal{E}\{g(t)\} = 1$)

Ejemplos de constelaciones M -PAM

- Niveles normalizados: $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$
- Asignación binaria con codificación de Gray
- Ejemplos: 2-PAM, 4-PAM, 8-PAM



Codificador: Tasa de símbolo vs. tasa binaria

- Duración de símbolo (o período de símbolo): T
 - ▶ Se transmite un símbolo de la secuencia $A[n]$ cada T segundos
- Constelaciones M -árias transmiten $m = \log_2 M$ bits por símbolo
 - ▶ Asignación binaria: codificación de Gray
- Hay dos tasas de transmisión (velocidades) en un sistema digital
 - ▶ Tasa de símbolo (para la secuencia de símbolos $A[n]$)

$$R_s = \frac{1}{T} \text{ baudios (símbolos/s)}$$

- ▶ Tasa binaria (para la secuencia de bits $B_b[\ell]$)

$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s}$$

- Relaciones entre ambas tasas de transmisión

$$R_b = m \times R_s \quad R_s = \frac{R_b}{m}$$

$$T = m \times T_b \quad T_b = \frac{T}{m}$$

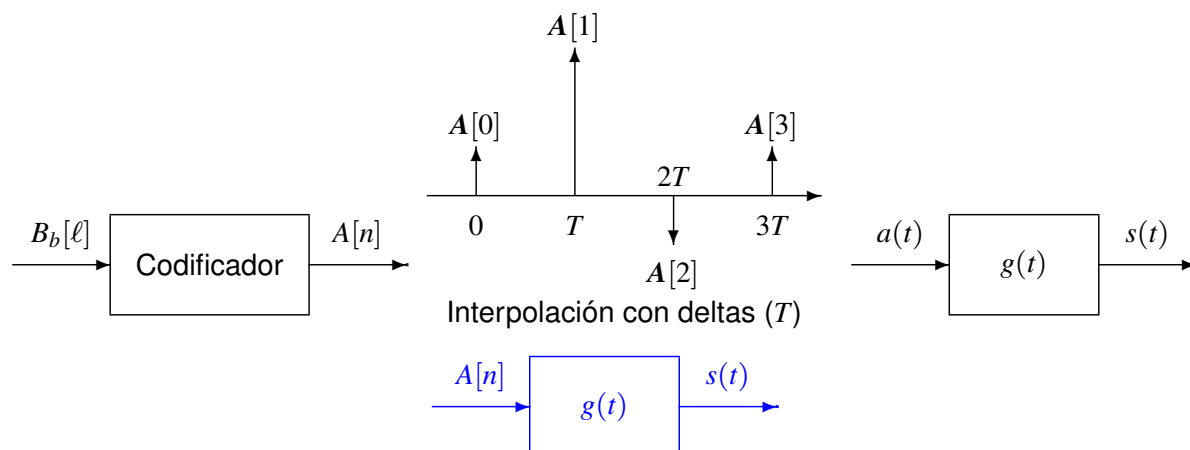
Modulación PAM como un proceso de filtrado

- Señal de símbolos: impulsos con amplitudes $A[n]$

$$a(t) = \sum_n A[n] \delta(t - nT)$$

- Generación de la señal PAM

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) = a(t) * g(t)$$



Representación simplificada equivalente

Selección de las formas de onda para $g(t)$

- Selección para identificar la secuencia $A[n]$ muestreando $s(t)$
 - (a) Pulsos con duración limitada al período de símbolo T
 - ★ No hay solapamiento entre pulsos desplazados nT segundos

$$\text{Ejemplo : } g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

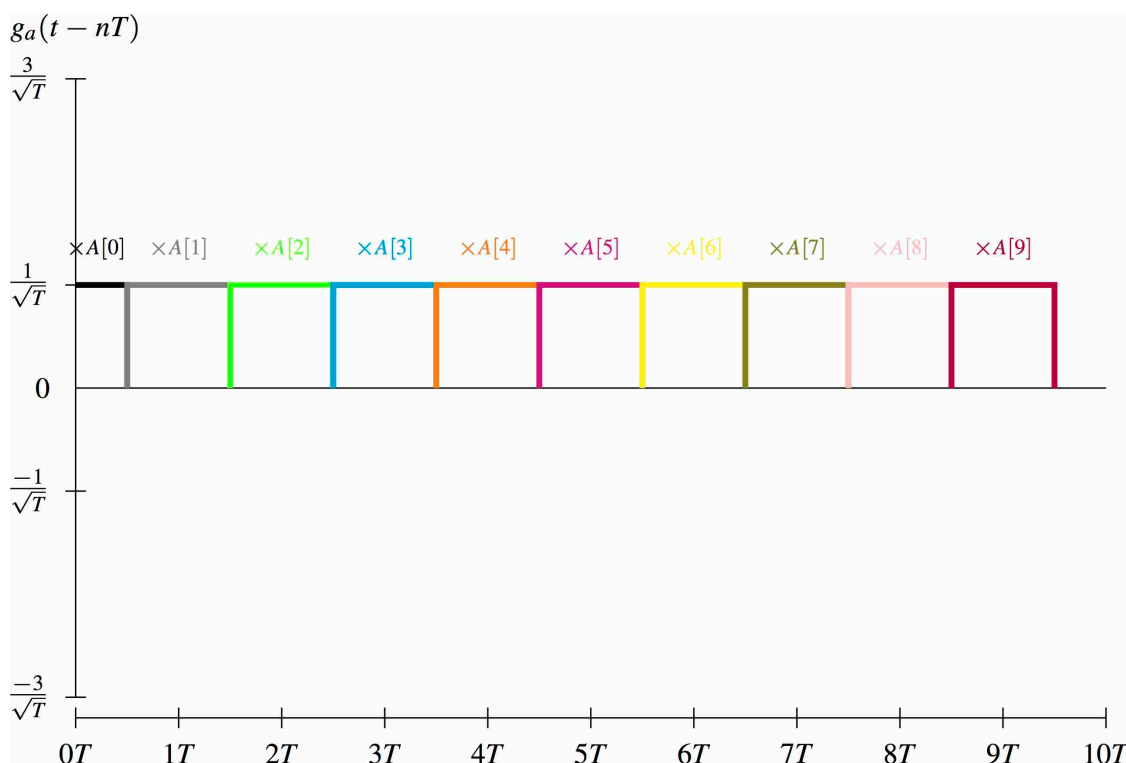
- ★ El símbolo $A[n]$ determina la amplitud de la señal en su intervalo de símbolo asociado
- ★ Problema: ancho de banda infinito
- (b) Pulsos con una duración infinita: ancho de banda finito
 - ★ Solapamiento: interferencia no destructiva en algún punto cada T segundos

$$g(nT) = 0, \forall n \neq 0; \text{ Ejemplo : } g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- ★ El símbolo $A[n]$ determina la amplitud de la señal en el punto no destructivos asociado en su intervalo

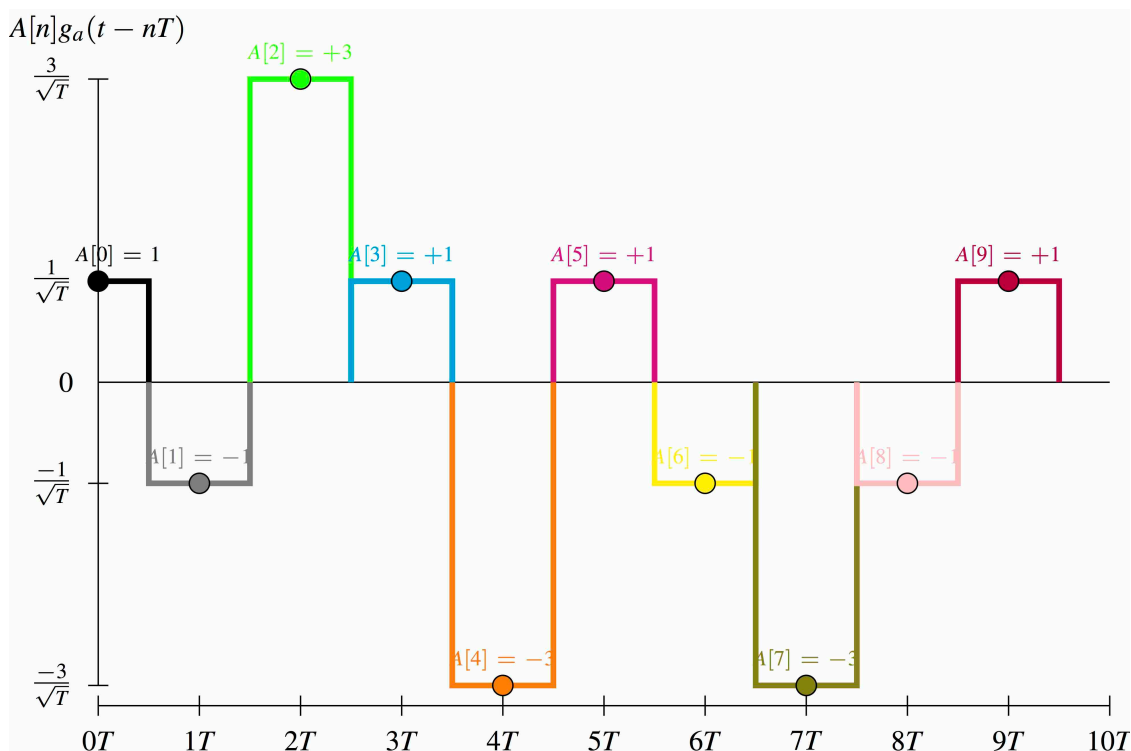
Pulso rectangular : pulsos retardados nT ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $A[n]$ | +1 | -1 | +3 | +1 | -3 | +1 | -1 | -3 | -1 | +1 |



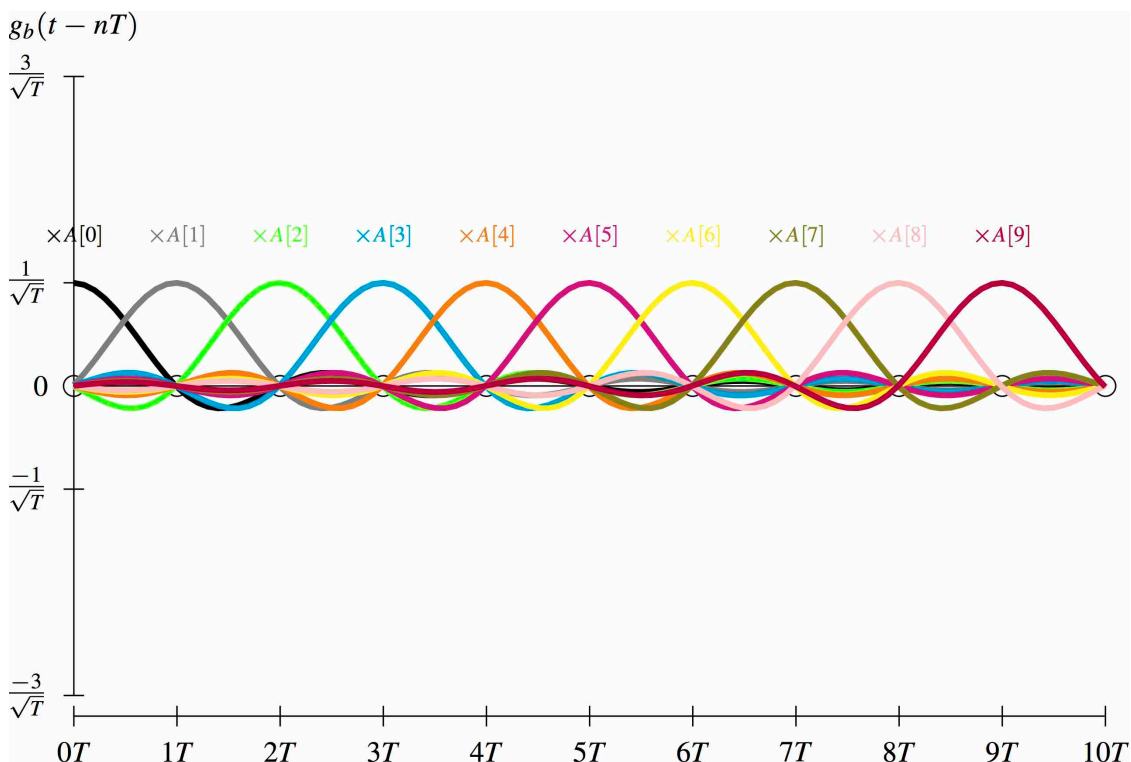
Pulso rectangular : Contribución de cada símbolo

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $A[n]$ | +1 | -1 | +3 | +1 | -3 | +1 | -1 | -3 | -1 | +1 |



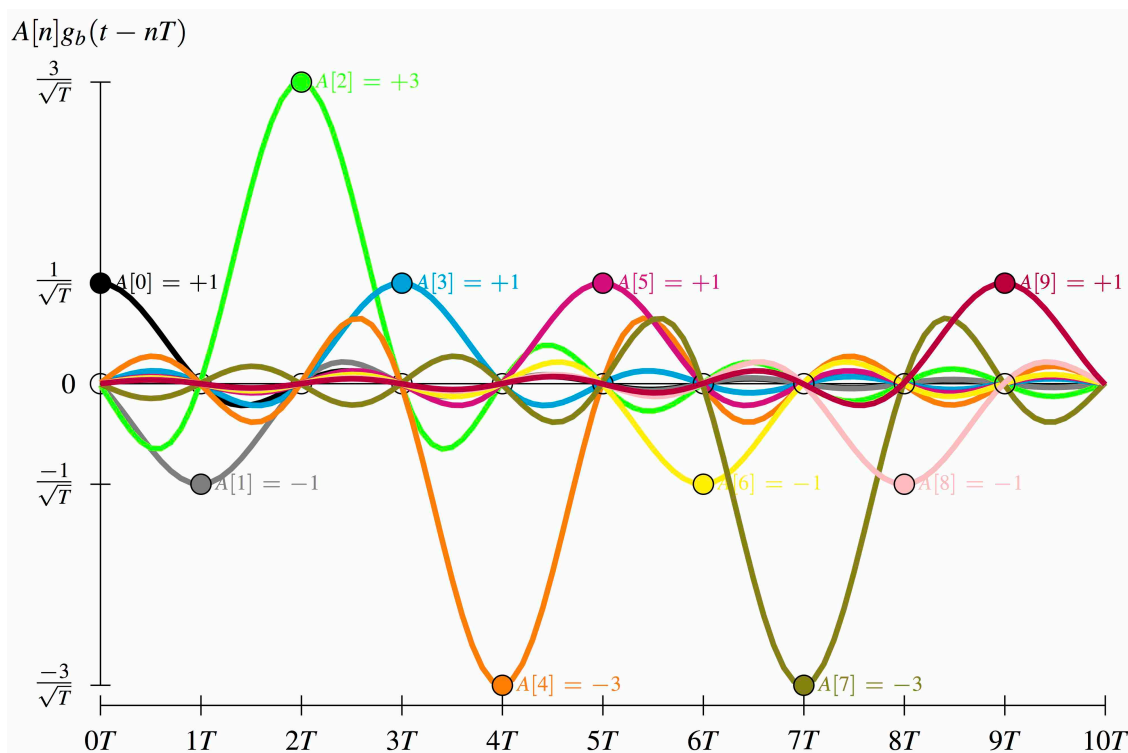
Pulso sinc : pulsos retardados nT ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $A[n]$ | +1 | -1 | +3 | +1 | -3 | +1 | -1 | -3 | -1 | +1 |



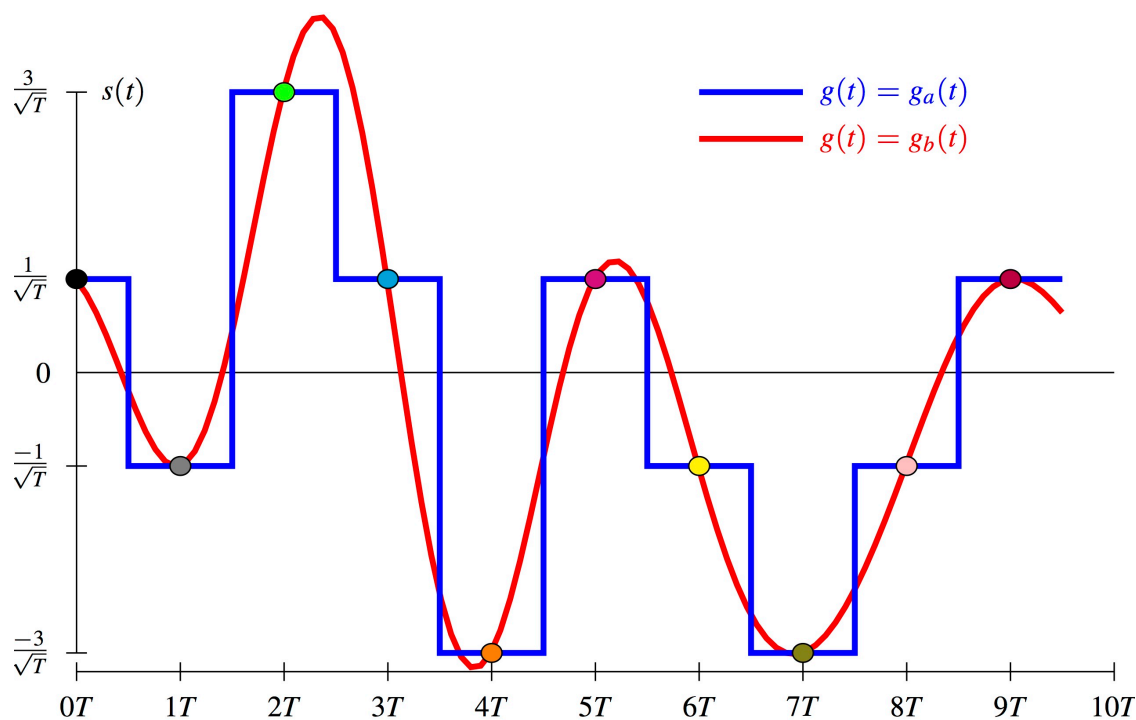
Pulso sinc : Contribución de cada símbolo

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $A[n]$ | +1 | -1 | +3 | +1 | -3 | +1 | -1 | -3 | -1 | +1 |



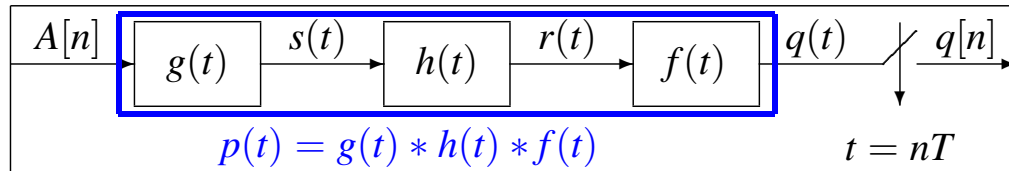
Señal modulada PAM $s(t)$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $A[n]$ | +1 | -1 | +3 | +1 | -3 | +1 | -1 | -3 | -1 | +1 |



Recuperación de $A[n]$ transmitiendo por un canal (sin ruido)

- Recuperación de $A[n]$ transmitiendo por un canal
 - ▶ Por simplicidad, se asume que no hay ruido
 - ▶ A la salida del canal se aplica un filtro receptor $f(t)$
 - ★ Opción habitual: $f(t) = g(-t)$ (filtro adaptado al transmisor)



$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) \quad q(t) = \sum_n A[n] p(t - nT)$$

- Ahora las condiciones deben evaluarse sobre $p(t)$
 - ▶ Duración limitada a T segundos
 - ▶ Pasos cíclicos por cero cada T segundos
- Diseño para cumplir las condiciones
 - ▶ Transmisor $g(t)$ y receptor $f(t)$ pueden diseñarse
 - ▶ El canal $h(t)$ viene dado, no es un parámetro de diseño

Densidad espectral de potencia - Análisis

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2$$

- Tres contribuciones:
 - ▶ Factor de escala constante dado por la tasa de símbolo: $\frac{1}{T} = R_s$ baudios
 - ▶ Componente determinista dada por $g(t)$: $|G(j\omega)|^2$
 - ▶ Componente estadística (estocástica) dada por $A[n]$: $S_A(e^{j\omega})$
 - ★ Evaluada en ωT , i.e. $S_A(e^{j\omega T})$
- Para secuencias $A[n]$ blancas (caso más frecuente)

$$R_A[n] = E_s \delta[n] \quad \xleftrightarrow{TF} \quad S_A(e^{j\omega}) = E_s = E[|A[n]|^2]$$

$$S_s(j\omega) = \frac{E_s}{T} |G(j\omega)|^2$$

- ▶ $g(t)$: Pulso conformador (determina la forma del espectro)

Potencia de una modulación PAM en banda base

- La potencia puede obtenerse integrando $S_s(j\omega)$

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega$$

- Para secuencias de símbolo $A[n]$ blancas

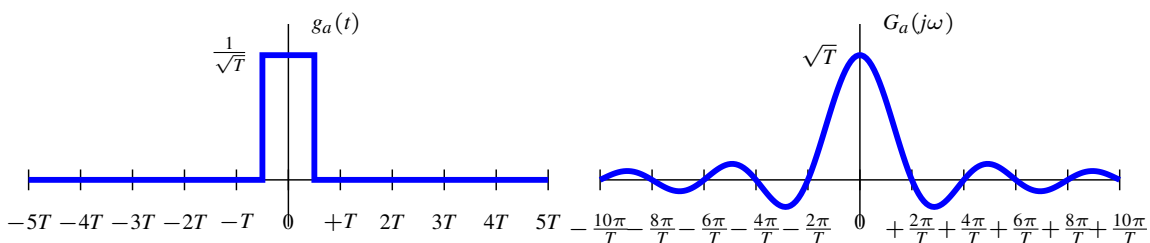
$$P_S = \frac{E_s}{T} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}_{\mathcal{E}\{g(t)\}}$$

- Si $g(t)$ está normalizada, aplicando la relación de Parseval

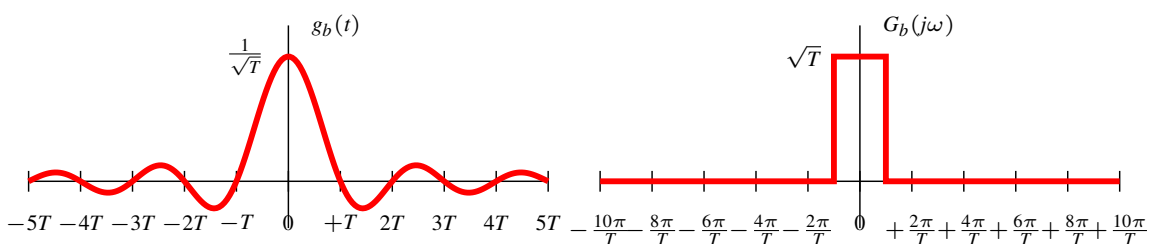
$$P_S = \frac{E_s}{T} = E_s \times R_s \text{ Watts}$$

Ejemplo de pulsos

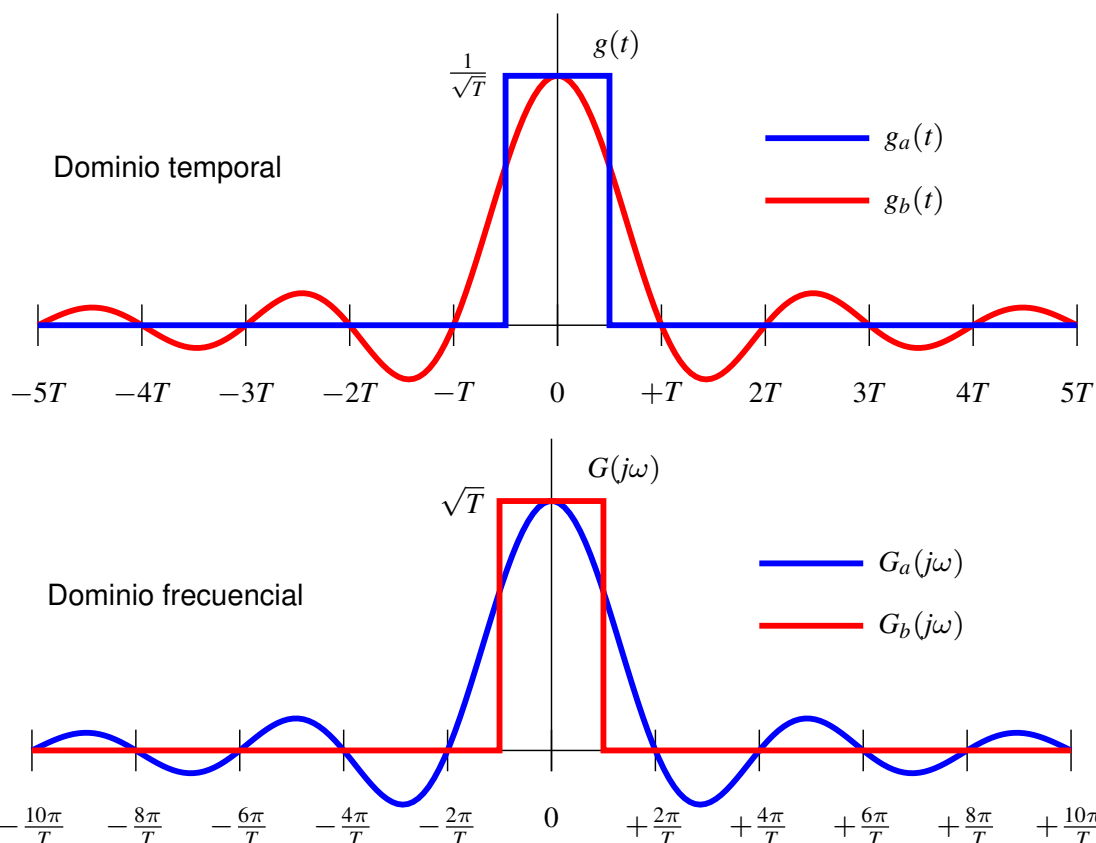
$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} \quad G_a(j\omega) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



$$g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow}} \quad G_b(j\omega) = \sqrt{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

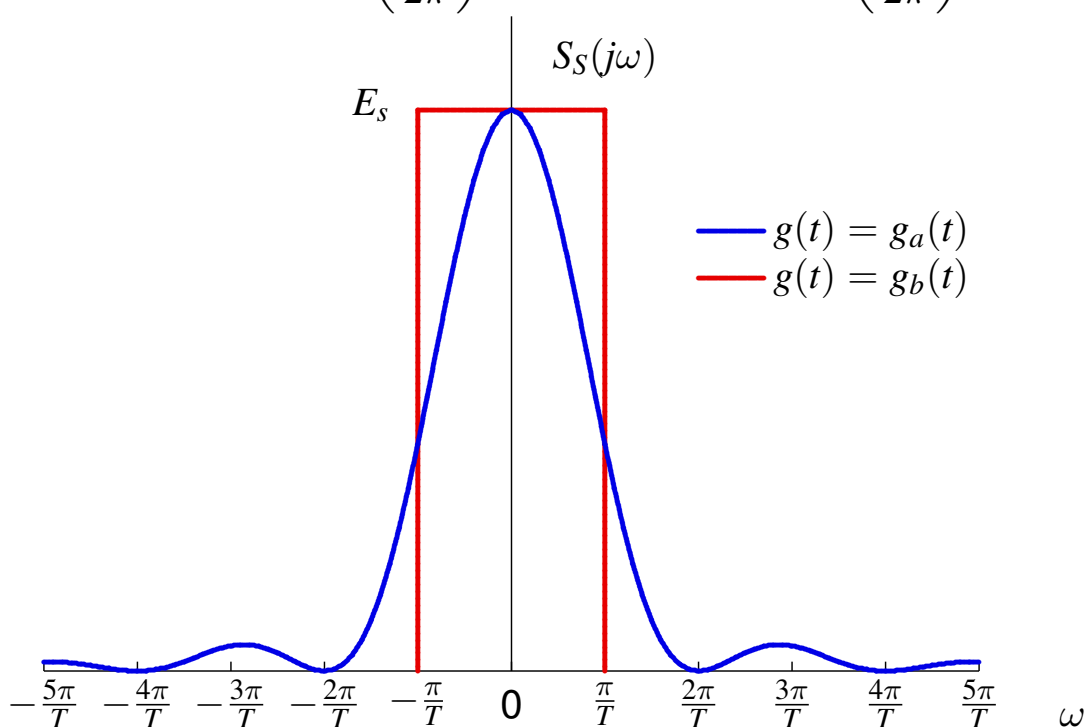


Ejemplo de pulsos (II)

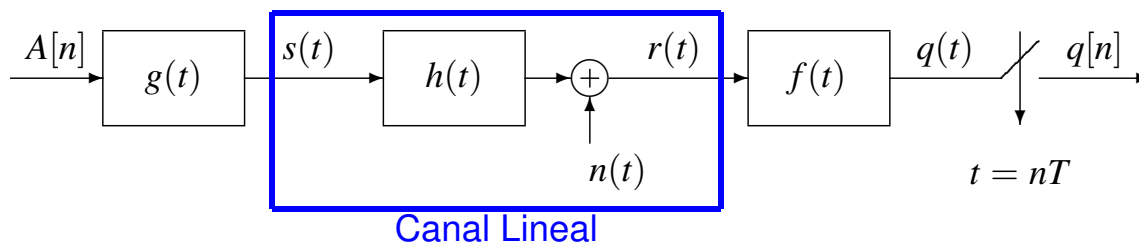


Ejemplos de $S_S(j\omega)$: secuencia $A[n]$ blanca

$$G_a(j\omega) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad G_b(j\omega) = \sqrt{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$



Transmisión de señales PAM a través de canales lineales



● Modelo de canal lineal

- ▶ La señal PAM $s(t)$ sufre distorsión lineal durante la transmisión
- ▶ También se añade ruido blanco y gaussiano

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

$h(t)$: respuesta al impulso del sistema que modela la distorsión lineal

$n(t)$: proceso estacionario, blanco, gaussiano, con media nula y $S_n(j\omega) = N_0/2$

● Filtro receptor $f(t)$

- ▶ Configuración habitual: filtro adaptado $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$

● Señal filtrada a la entrada del muestreador

$$q(t) = r(t) * f(t) = s(t) * h(t) * f(t) + n(t) * f(t)$$

Canal discreto equivalente para canal lineal

● Señal antes del muestreo

$$\begin{aligned} q(t) &= \left(\sum_k A[k] g(t - kT) \right) * h(t) * f(t) + n(t) * f(t) \\ &= \sum_k A[k] \left(g(t - kT) * h(t) * f(t) \right) + n(t) * f(t) \\ &= \sum_k A[k] p(t - kT) + z(t) \end{aligned}$$

● $p(t) = g(t) * h(t) * f(t)$: respuesta conjunta transmisor-canal-receptor

- ▶ Si se usa un filtro adaptado en el receptor

$$p(t) = g(t) * h(t) * g^*(-t) = r_g(t) * h(t)$$

● Observación discreta a la salida del demodulador

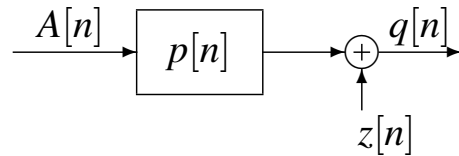
$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = q(nT) = \sum_k A[k] p((n - k)T) + z(nT)$$

Canal discreto equivalente para canal lineal (II)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)|_{t=nT}$$

$$q[n] = \sum_k A[k] p[n-k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$



- Mismo modelo que para canal gaussiano pero con una nueva definición para la respuesta conjunta $p(t)$

- Ahora la definición incluye el efecto de $h(t)$

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad P(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega) F(j\omega)$$

- Utilizando filtros adaptados: $f(t) = g(-t) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad F(j\omega) = G^*(j\omega)$

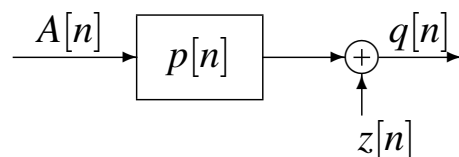
$$p(t) = r_g(t) * h(t) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2 H(j\omega)$$

Interferencia intersimbólica (ISI)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} \quad q[n] = o[n] + z[n]$$

$$\text{Salida sin ruido } o[n] = \sum_k A[k] p[n-k] = A[n] * p[n]$$



- Ideal

$$p[n] = \delta[n] \rightarrow o[n] = A[n]$$

- Real: Interferencia entre símbolos (ISI)

$$o[n] = A[n] * p[n] = \sum_k A[k] p[n-k] = \underbrace{A[n]}_{\text{Ideal}} \underbrace{p[0]}_{\text{escalado}} + \underbrace{\sum_{k \neq n} A[k] p[n-k]}_{\text{ISI}}$$

Interferencia intersimbólica - Análisis

- Interferencia entre símbolos para el canal discreto $p[n]$

$$o[n] = \underbrace{A[n] p[0]}_{\substack{\text{Ideal} \\ \text{deseado}}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n-k]}_{\text{interferencia (ISI) escalado}}$$

- ▶ Efecto de la interferencia entre símbolos

$$\text{ISI} = \sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n-k]$$

Contribución en el instante discreto n de símbolos anteriores y posteriores

$$o[n] = \underbrace{\dots + A[n-2] p[2] + A[n-1] p[1]}_{\text{ISI precursora}} + \underbrace{A[n] p[0]}_{\text{cursor}} + \underbrace{A[n+1] p[-1] + A[n+2] p[-2] + \dots}_{\text{ISI postcursora}}$$

ISI - Efecto : Constelación extendida

- ISI produce una constelación extendida en el receptor

Valores de la salida discreta sin ruido $o[n] = A[n] * p[n]$

- Ejemplo: modulación 2-PAM ($A[n] \in \{\pm 1\}$)

Canal A

$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{4} \delta[n-1]$$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{4} A[n-1]$$

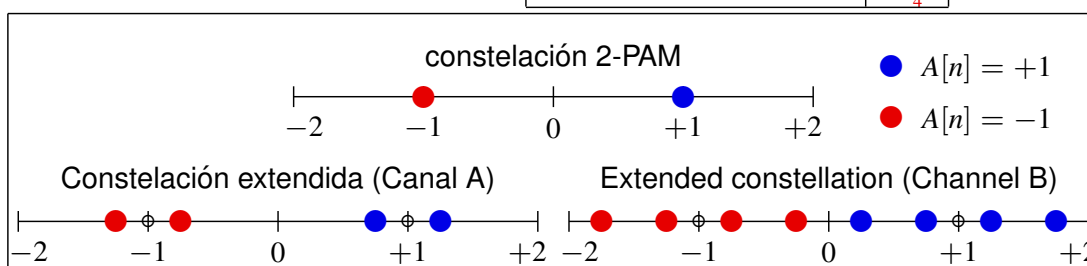
Canal B

$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] + \frac{1}{4} \delta[n-2]$$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2} A[n-1] + \frac{1}{4} A[n-2]$$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|--------|
| +1 | +1 | +1.25 |
| +1 | -1 | +0.75 |
| -1 | +1 | -0.75 |
| -1 | -1 | -1.25 |

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|--------|
| +1 | +1 | +1 | +1.625 |
| +1 | +1 | -1 | +1.125 |
| +1 | -1 | +1 | +0.625 |
| +1 | -1 | -1 | +0.125 |
| -1 | +1 | +1 | -0.625 |
| -1 | +1 | -1 | -1.125 |
| -1 | -1 | +1 | -1.625 |
| -1 | -1 | -1 | -2.125 |



Criterio de Nyquist para la ausencia de ISI

- Condición para evitar la ISI expresada en tiempo discreto

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT} = \delta[n] \quad (\times C)$$

escala/ganancia

- Condición equivalente en el dominio frecuencial

$$P(e^{j\omega}) = 1 \quad (\times C)$$

- Condiciones equivalentes expresadas en tiempo continuo

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta(t) \quad (\times C)$$

$$P(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1 \quad (\times C)$$

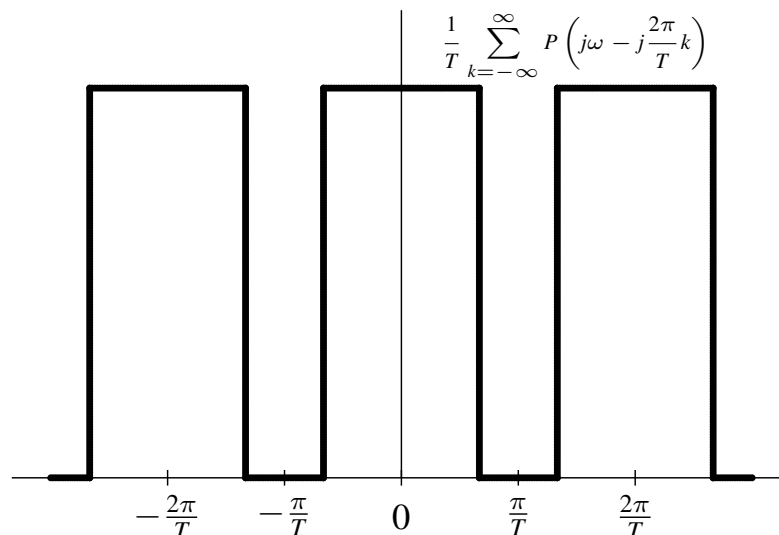
$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = 1 \quad (\times C)$$

Réplicas de $P(j\omega)$ desplazadas múltiplos de $\frac{2\pi}{T}$ suman una constante

Aplicación: pulsos limitados en banda

- Ejemplo utilizando un ancho de banda $W < \frac{\pi}{T}$ rad/s (o $B < \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2}$ Hz)
 - ▶ Elección más simple para $P(j\omega)$: pulso rectangular

$$P(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W = 2\pi B \\ 0 & |\omega| > W = 2\pi B \end{cases}$$



- ▶ Imposible satisfacer el criterio de Nyquist para $W < \frac{\pi}{T}$ rad/s

Aplicación: pulsos limitados en banda (II)

- Criterio de Nyquist para ISI usando estos pulsos:

$$W = n \times \frac{\pi}{T} = n \times \pi R_s \text{ rad/s} \quad \left(B = n \times \frac{R_s}{2} \text{ Hz} \right)$$

- En el dominio temporal los pulsos son

$$p(t) = \text{sinc} \left(n \times \frac{t}{T} \right)$$

- Compromiso ancho de banda / tasa de transmisión: $p(t)$ óptimo

- ▶ Mínimo ancho de banda sin ISI a tasa $R_s = \frac{1}{T}$ baudios

$$W_{min} = \frac{\pi}{T} = \pi R_s \text{ rad/s} \quad \left(B_{min} = \frac{R_s}{2} \text{ Hz} \right)$$

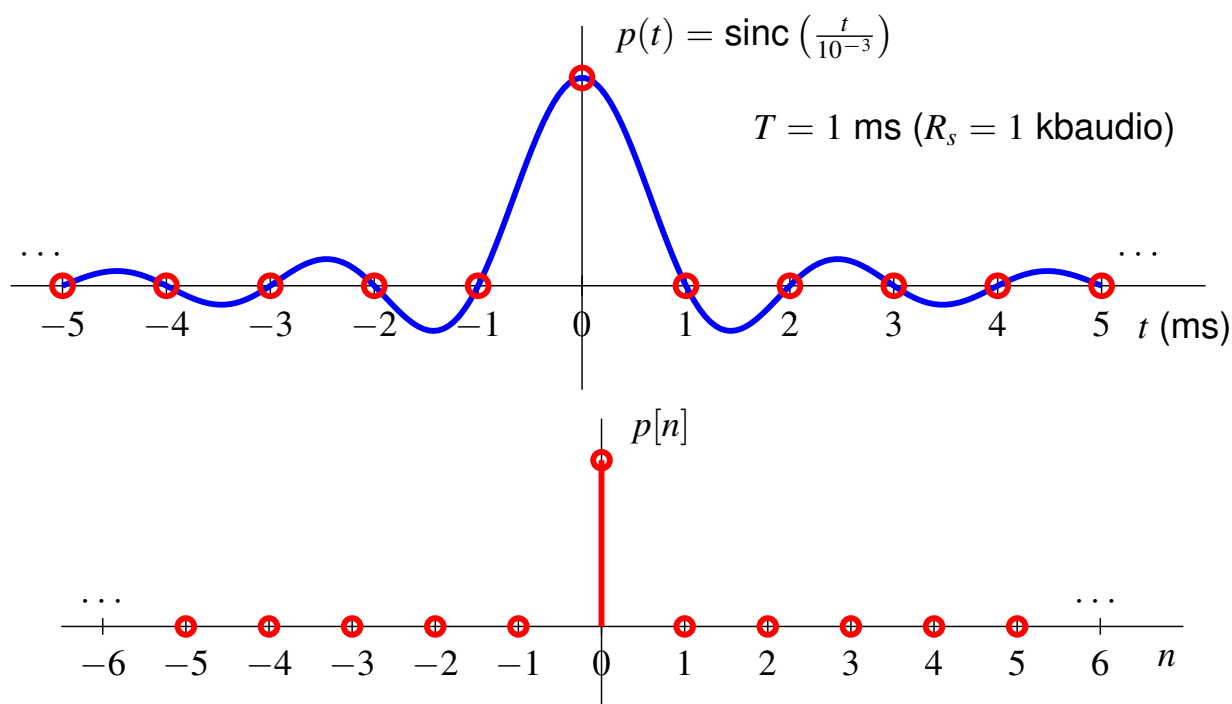
- ▶ Máxima tasa sin ISI sobre un ancho de banda W rad/s (B Hz)

$$R_s|_{max} = \frac{W}{\pi} = 2 \times B \text{ baudios (símbolos/s)}$$

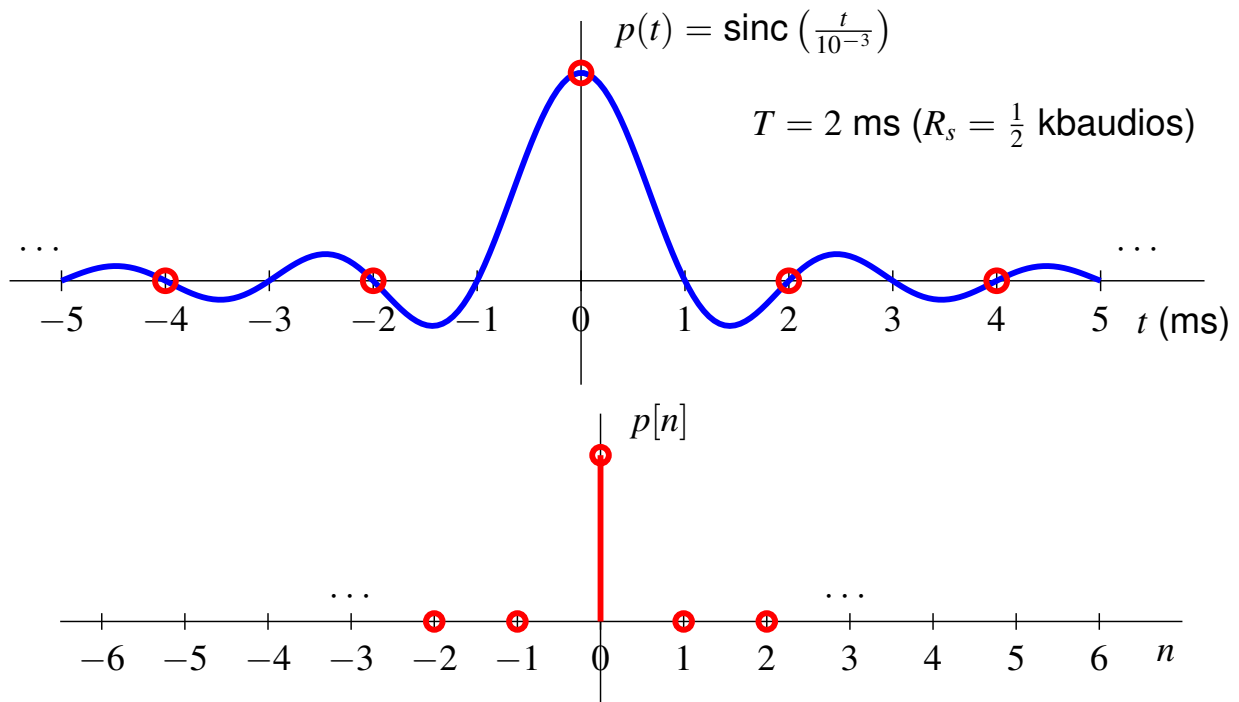
- ▶ Respuesta conjunta óptima

$$p(t) = \text{sinc} \left(\frac{t}{T} \right) \quad \overset{TF}{\longleftrightarrow} \quad P(j\omega) = T \Pi \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right)$$

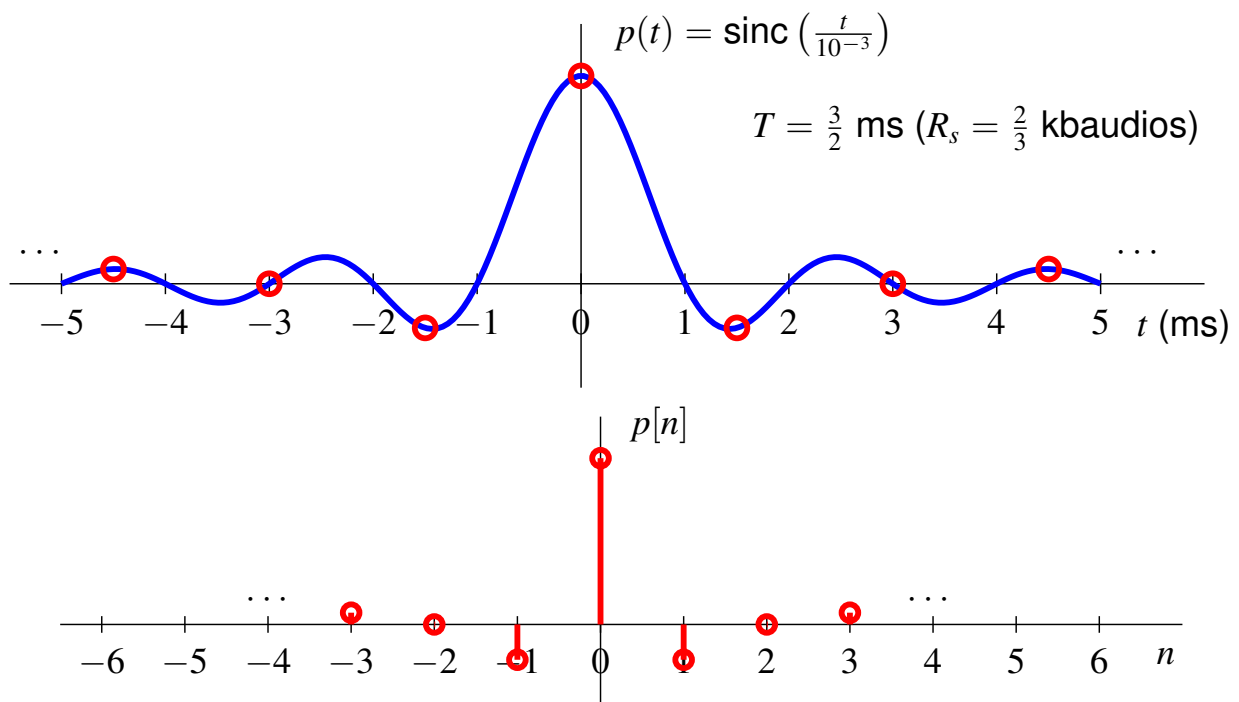
Ejemplo: $p(t)$



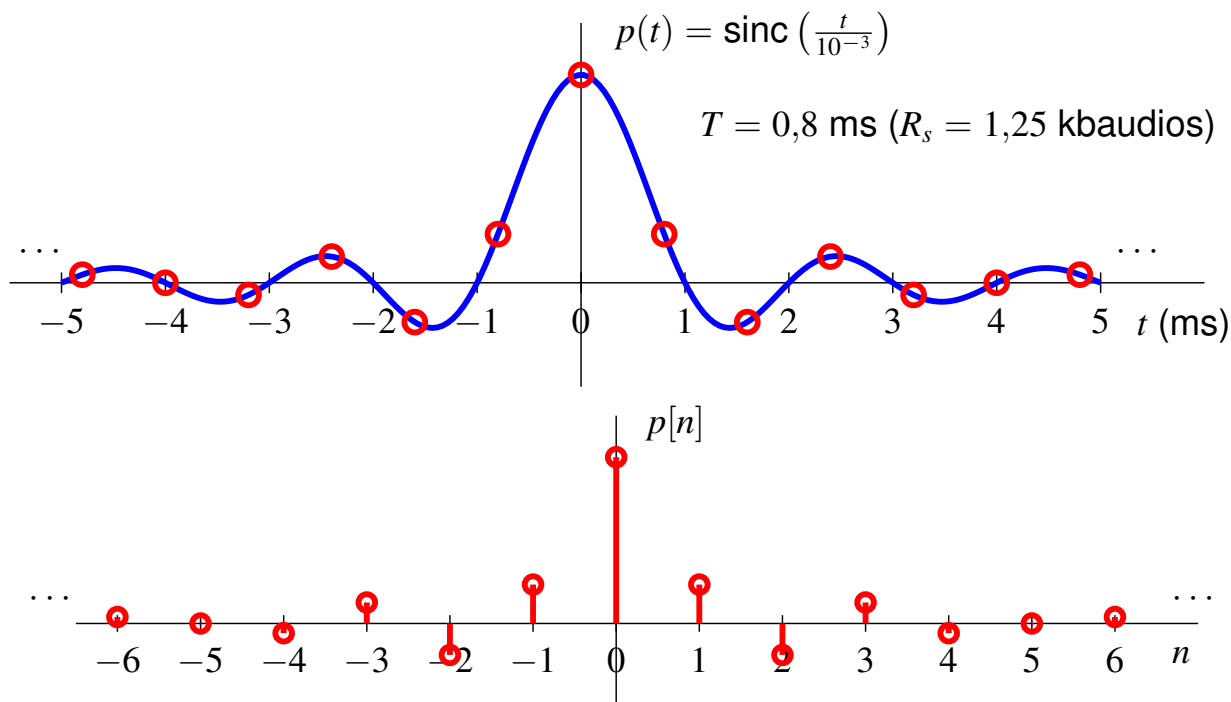
Ejemplo: $p(t)$



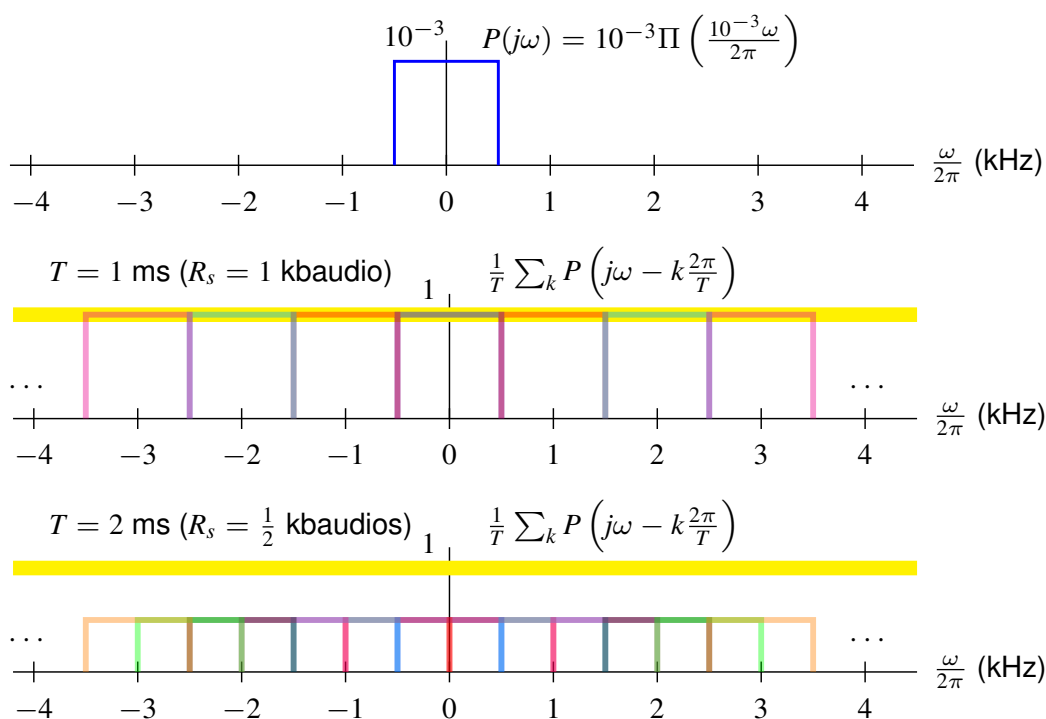
Ejemplo: $p(t)$



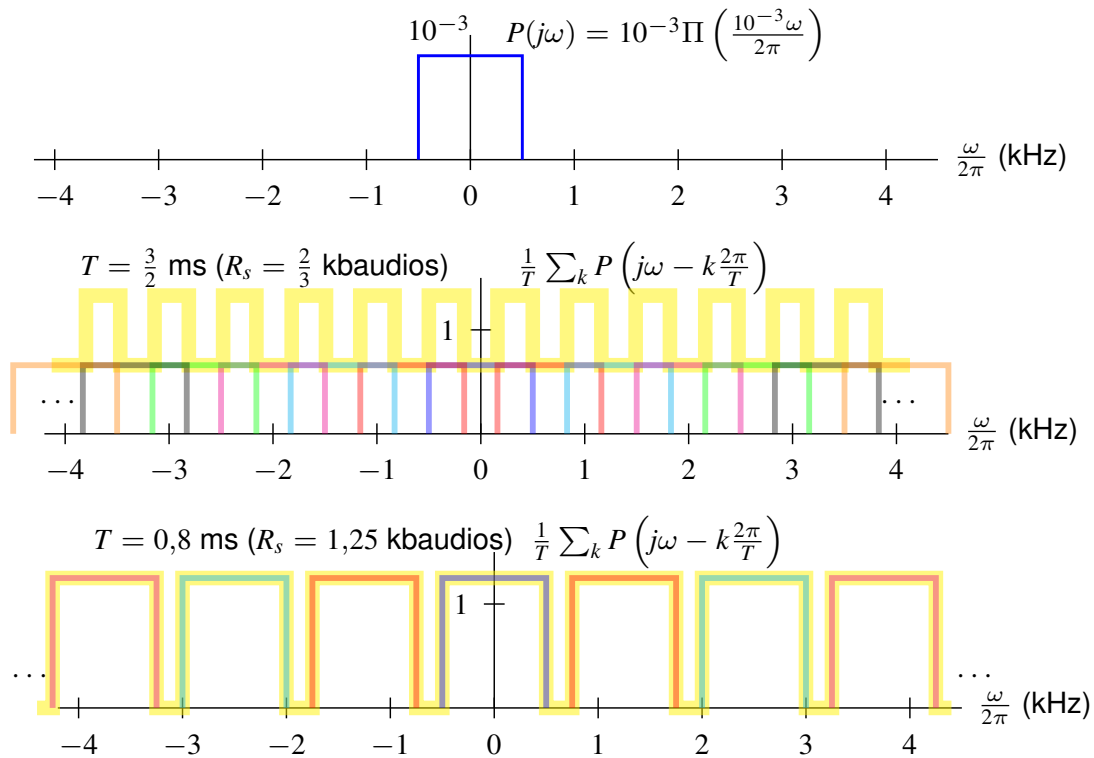
Ejemplo: $p(t)$



Ejemplo: $P(j\omega)$



Ejemplo: $P(j\omega)$



Pulsos en coseno alzado

- Familia de pulsos con un parámetro: factor de caída (*roll-off*) α
 - ▶ Rango de valores del factor de caída: $\alpha \in [0, 1]$
 - ▶ Caso particular: un coseno alzado con $\alpha = 0$ es una función sinc

- Expresión del pulso

$$h_{RC}^{\alpha, T}(t) = \left(\frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T} \right) \left(\frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} \right)$$

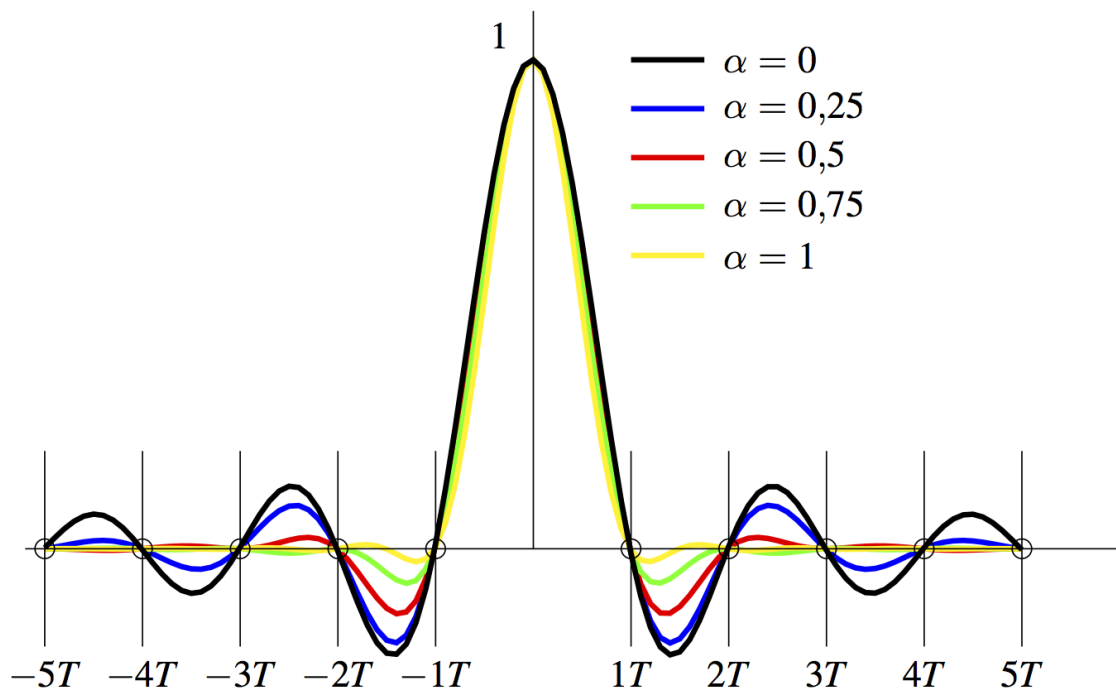
- Transformada de Fourier

$$H_{RC}^{\alpha, T}(j\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| < (1 - \alpha) \frac{\pi}{T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \text{sen} \left(\frac{T}{2\alpha} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T} \right) \right) \right] & (1 - \alpha) \frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha) \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha) \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

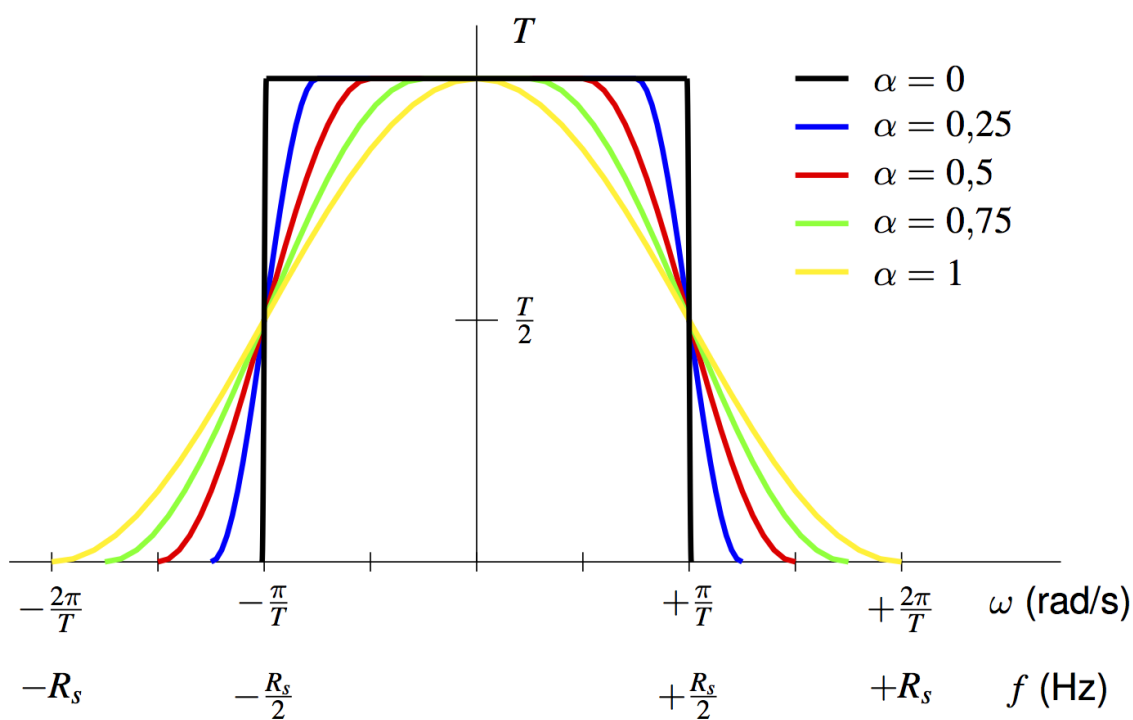
- Ancho de banda: depende del factor de caída

$$W = (1 + \alpha) \times \frac{\pi}{T} \text{ rad/s}, \quad B = (1 + \alpha) \times \frac{R_s}{2} \text{ Hz}$$

Pulsos en coseno alzado $h_{RC}^{\alpha,T}(t)$



Cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$



Pulsos en raíz de coseno alzado

- Pulsos cuya convolución es un coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) * h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t) \quad H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$$

- Procedimiento general para obtener $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$

1 Se parte de la respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$

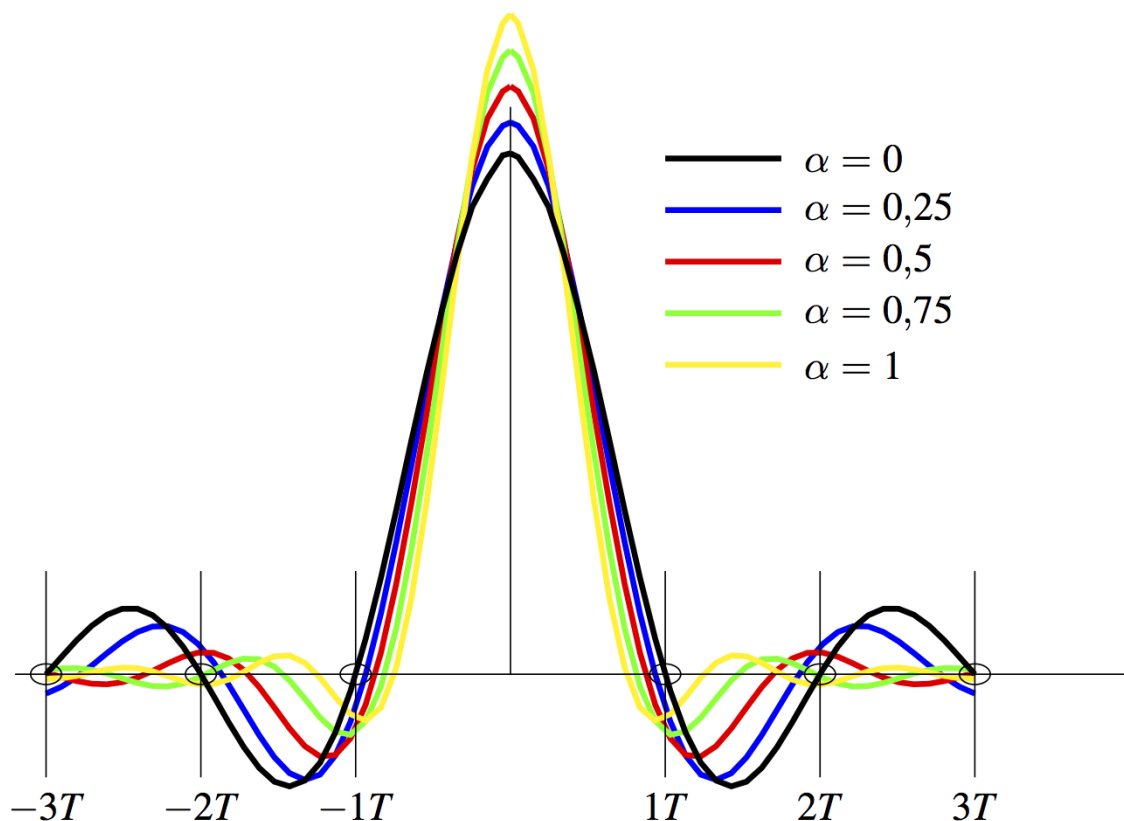
2 Se hace $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = \sqrt{H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)}$

3 $h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \mathcal{TF}^{-1} \left\{ H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) \right\}$

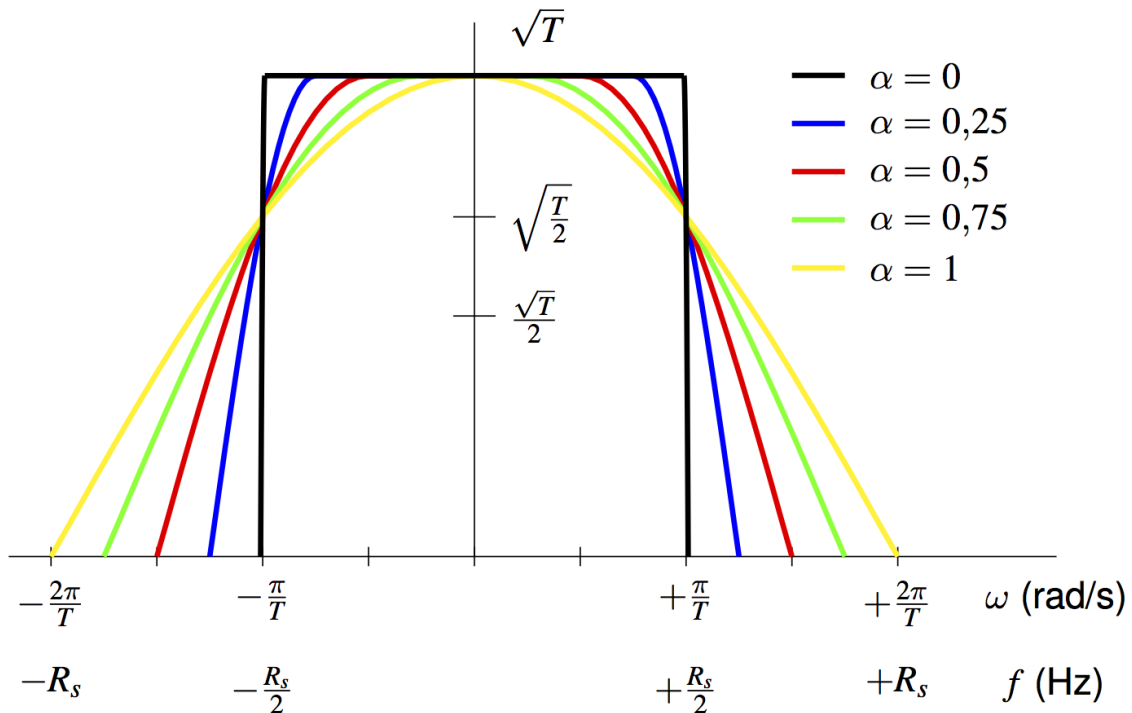
- Pulsos en raíz de coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left((1+\alpha)\frac{\pi t}{T}\right) + T \frac{\sin\left((1-\alpha)\frac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2}$$

Pulsos en raíz cuadrada de coseno alzado $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$



Raíz de cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$



PAM paso banda - Generación con modulación AM

- Se genera una PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT)$$

- Esta señal PAM se modula con una modulación de amplitud. Hay distintas variantes
 - ▶ Modulación AM convencional (doble banda lateral con portadora)
 - ▶ Doble banda lateral (sin portadora)
 - ▶ Banda lateral única
 - ★ Banda lateral inferior
 - ★ Banda lateral superior
 - ▶ Banda lateral vestigial
 - ★ Banda lateral inferior
 - ★ Banda lateral superior

Inconvenientes de una modulación AM

- AM convencional y doble banda lateral
 - ▶ Eficiencia espectral se reduce a la mitad (doble ancho de banda)
- Modulación de banda lateral única
 - ▶ Requiere filtros ideales en el transmisor
 - ★ Filtros reales introducen distorsión

Modulación utilizando dos portadoras en cuadratura

- Dos secuencias de símbolos (no necesariamente independientes) se transmiten simultáneamente (tasa $R_s = \frac{1}{T}$ para ambas)

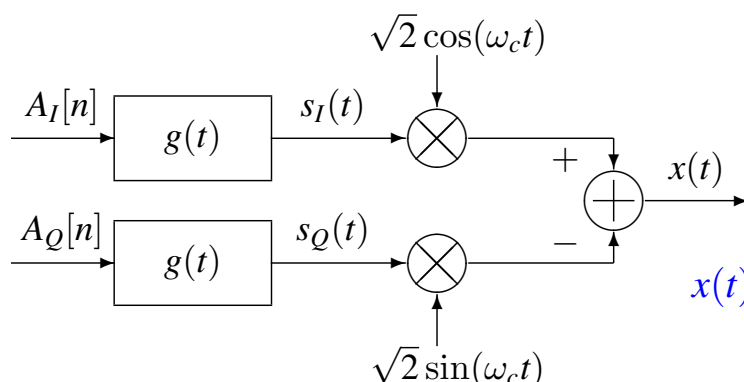
$$A_I[n] \text{ y } A_Q[n]$$

- Dos señales PAM banda base se generan usando $g(t)$

$$s_I(t) = \sum_n A_I[n] g(t - nT) \quad s_Q(t) = \sum_n A_Q[n] g(t - nT)$$

$s_I(t)$: componente en fase, $s_Q(t)$: componente en cuadratura

- Generación de la señal paso banda, $x(t)$, a partir de $s_I(t)$ y $s_Q(t)$



$$x(t) = \sqrt{2} s_I(t) \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} s_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

Ancho de banda y tasa de transmisión

- Transmisión a R_s baudios
 - ▶ Ancho de banda (rad/s):

$$W = \frac{2\pi}{T}(1 + \alpha) = 2\pi R_s(1 + \alpha) \text{ rad/s}$$

- ▶ Ancho de banda (Hz):

$$B = R_s(1 + \alpha) \text{ Hz}$$

- Comparación con transmisión en banda base
 - ▶ Doble ancho de banda para la misma tasa de transmisión
 - ▶ Misma eficiencia espectral (información/Hz)
 - ★ Doble ancho de banda
 - ★ Doble cantidad información: $A_I[n]$ y $A_Q[n]$

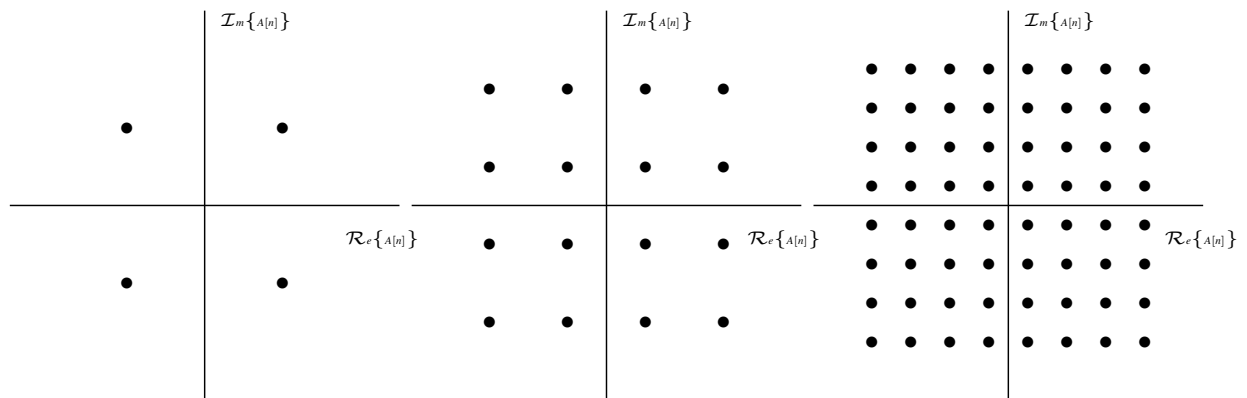
Constelaciones PAM paso banda

- Representación 2D de los posibles valores de $A_I[n]$ vs $A_Q[n]$
- Constelaciones más frecuentes
 - ▶ Constelaciones QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
 - ★ $M = 2^m$ símbolos, con m par
 - ★ Símbolos en una retícula cuadrada ($2^{m/2} \times 2^{m/2}$ niveles)
 - $A_I[n]$ y $A_Q[n]$ usan constelaciones PAM banda base
 - Asignación binaria, codificación, y reglas de decisión independientes en cada componente

$$E_s = \frac{2(M-1)}{3}$$

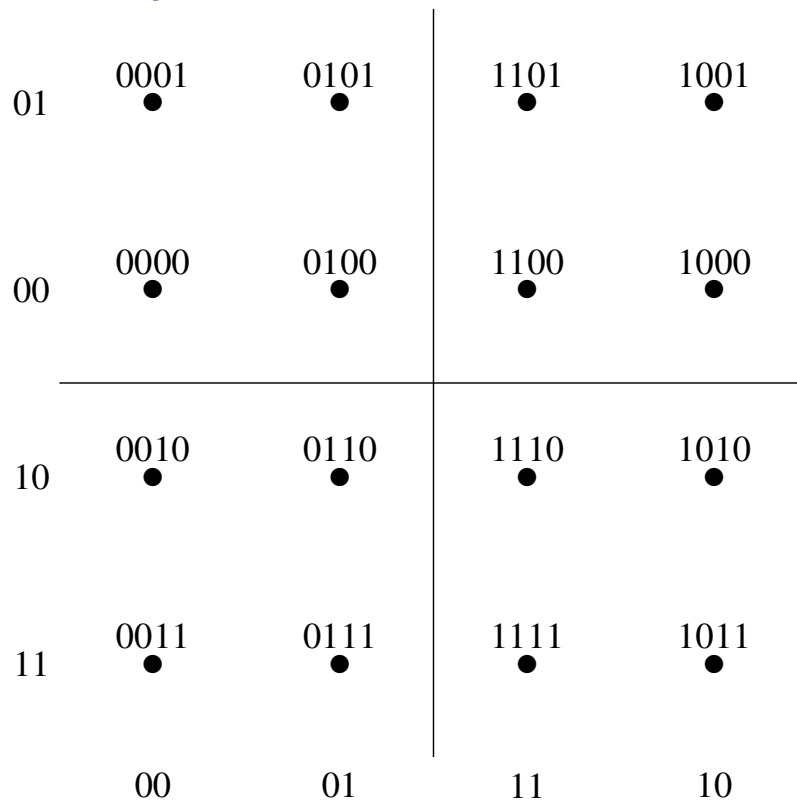
- ▶ Constelaciones PSK (Phase Shift Keying)
 - ★ Símbolos equiespaciados sobre una circunferencia
 - Energía constante para todos los símbolos

Constelaciones QAM



Constelaciones 4-QAM (QPSK), 16-QAM y 64-QAM

Codificación Gray QAM



Constelación PSK (Phase shift keying)

- Constelación PSK

$$A[n] = \sqrt{E_s} e^{j\varphi[n]}$$

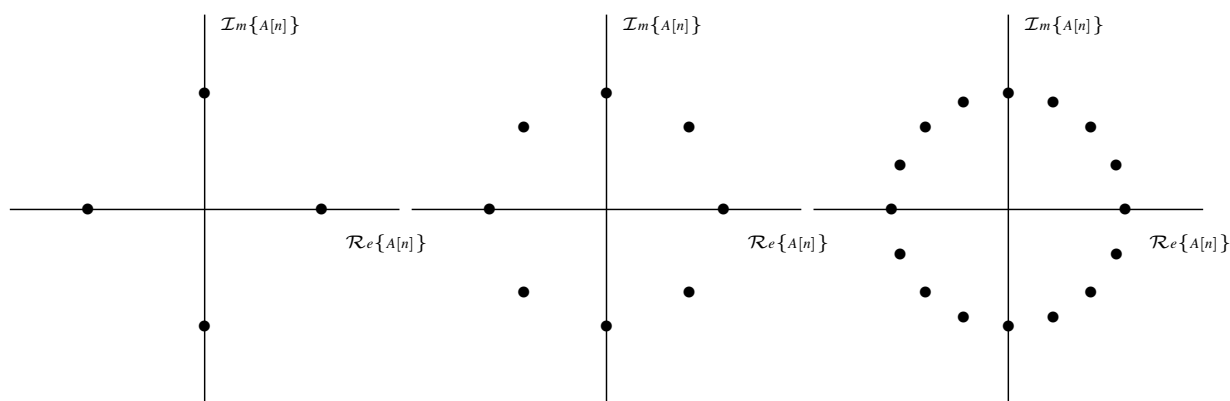
- ▶ Módulo constante
- ▶ La información está en la fase del símbolo

- Forma de onda para modulaciones con constelaciones PSK

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n g(t - nT) e^{j(\omega_c t + \varphi[n])} \right\} \\ &= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT) \cos(\omega_c t + \varphi[n]) \end{aligned}$$

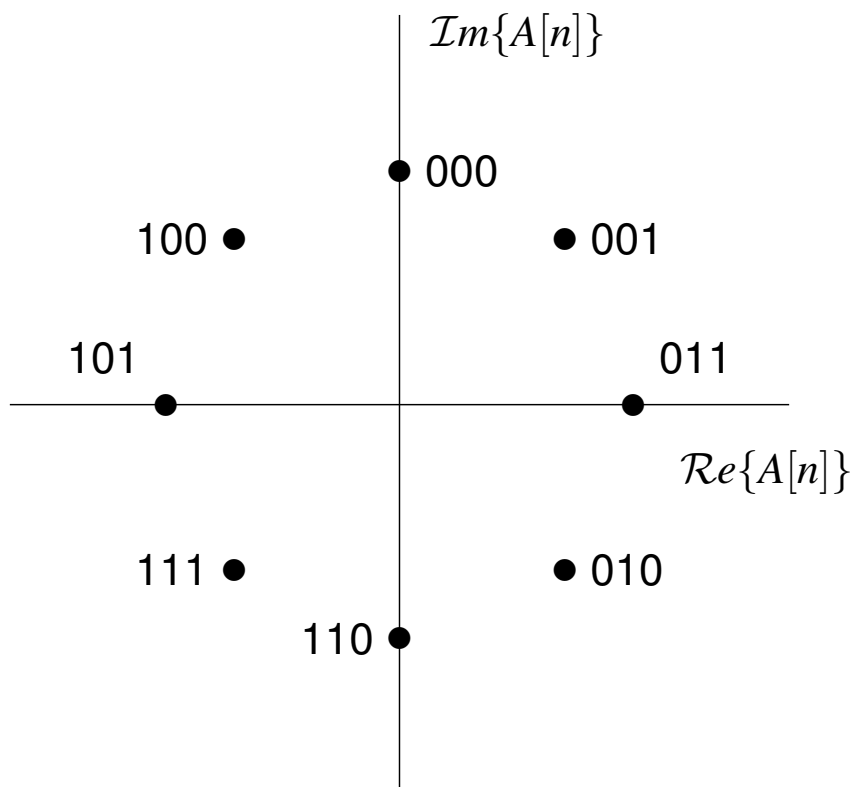
- ▶ Saltos de fase en las transiciones entre símbolos

Constelaciones PSK



Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

Codificación Gray PSK



Tasa de transmisión binaria (R_b bits/s)

- La tasa binaria se obtiene a partir de $R_b = m \times R_s$
 - ▶ Tasa de símbolo (R_s baudios)
 - ▶ Número de bits por símbolo de la constelación (m)

$$m = \log_2(M)$$

M : número de símbolos de la constelación

- Limitación en la máxima tasa binaria alcanzable
 - ▶ Limitación sobre R_s : ancho de banda disponible (B Hz)
Utilizando filtros de la familia coseno alzado

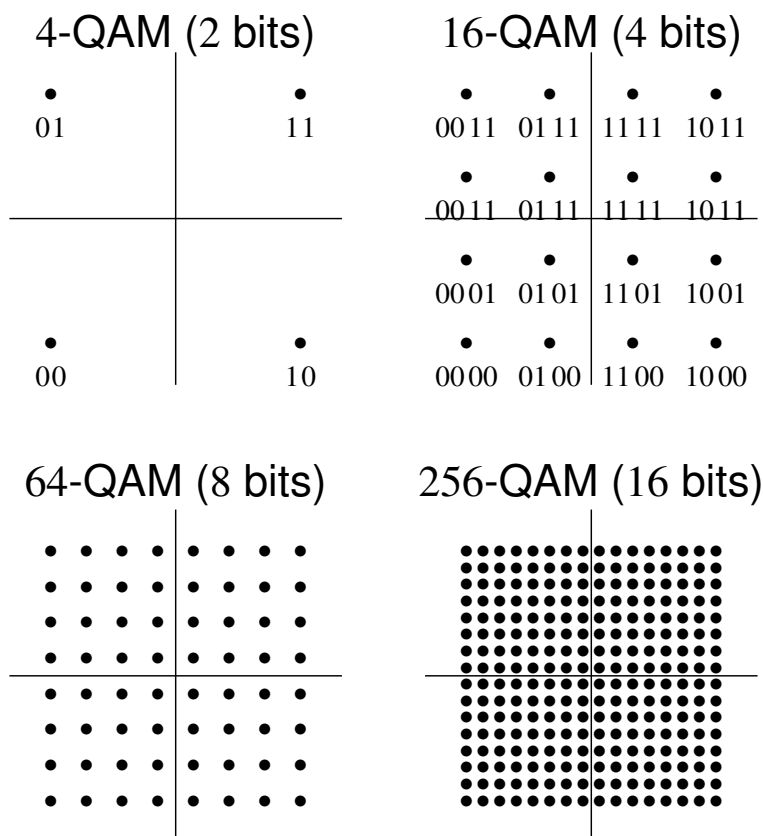
| BANDA BASE | PASO BANDA |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| $R_{s max} = \frac{2B}{1+\alpha}$ | $R_{s max} = \frac{B}{1+\alpha}$ |

- ▶ Limitación en el número de símbolos M (y por tanto en m)
 - ★ Limitación en potencia: limita la energía media por símbolo $E_s = E[|A[n]|^2]$
 - Esto limita el máximo módulo de los puntos de la constelación
 - ★ Las prestaciones requeridas limitan la mínima distancia entre símbolos

$$P_e \approx k Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ★ E_s y P_e determinan una densidad máxima para la constelación

Densidad de las constelaciones - Ejemplo - QAM



Densidad de las constelaciones - Ejemplo - QAM

- Aumento del tamaño de la constelación (M símbolos):
 - ▶ Aumento en la tasa binaria
 - ★ Aumenta el número de bits por símbolo $m = \log_2 M$
 - ▶ Reducción de prestaciones para una E_s dada
 - ★ Reducción de la distancia entre puntos de la constelación

Ejemplo para constelaciones M -QAM

| M (símbolos) | m (bits/símbolo) | E_s con niveles normalizados ($d_{min} = 2$) | d_{min} con $E_s = 2$ |
|----------------|--------------------|--|-------------------------|
| 4 | 2 | 2 | 2 |
| 16 | 4 | 10 | 0,8944 |
| 64 | 8 | 42 | 0,4364 |
| 256 | 16 | 170 | 0,2169 |

