

Estándares y protocolos de comunicación
Máster Universitario en Internet de las Cosas:
Tecnologías Aplicadas

Sesión 8

Modulación, detección y probabilidades de error

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid



1/74

Índice de contenidos

- Revisión del concepto de modulación digital
 - ▶ Detección en canales ideales
 - ▶ Probabilidades de error (de símbolo y de bit)
- La interferencia intersimbólica (ISI)
 - ▶ Detección en sistemas digitales de comunicaciones con ISI
- Modulaciones avanzadas para combatir la ISI
 - ▶ Modulaciones de espectro ensanchado (por secuencia directa, DSSS)
 - ▶ Modulaciones multiportadora (FDM y OFDM)

Materiales disponibles en

www.tsc.uc3m.es/~mlazaro/Docencia/MasterIoT.html

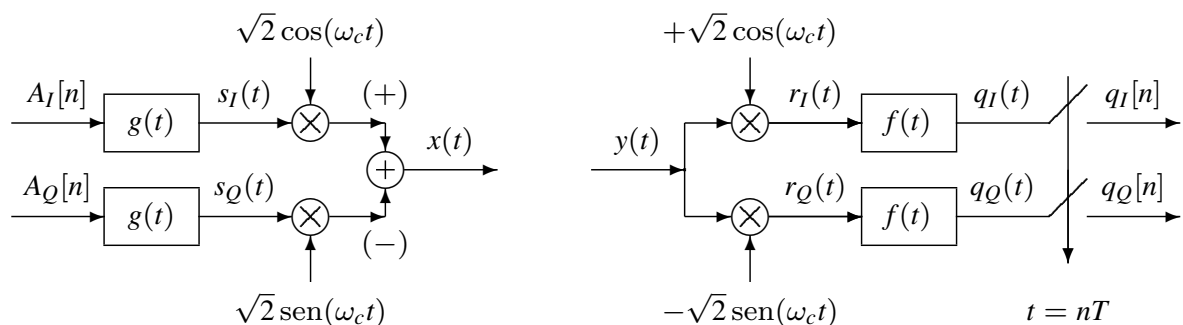
Tasas de transmisión: de símbolo y binaria

- Un sistema de comunicaciones transmite símbolos como vehículo de transporte de bits
- Símbolos $A[n]$
 - ▶ Alfabeto M -ario
 - ▶ Cada símbolo transporta m bits ($m = \log_2 M$, $M = 2^m$)
 - ★ Asignación binaria: codificación de Gray
 - Símbolos a mínima distancia difieren en un único bit en su asignación de m bits
- Tasas de transmisión
 - ▶ Símbolos $A[n]$
 - ★ Tasa de símbolo: transmisión a $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)
 - ▶ Bits $B_b[\ell]$
 - ★ Tasa binaria: transmisión a $R_b = \frac{1}{T_b}$ bits/s
 - ▶ Relación entre tasas de transmisión

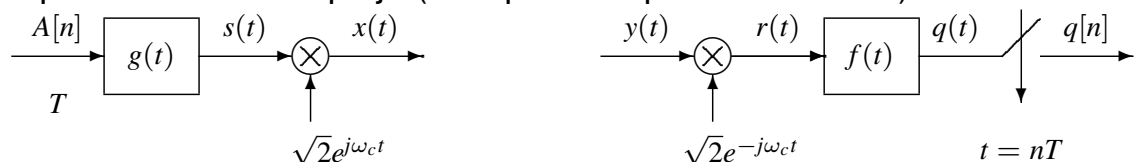
$$R_b \text{ (bits/s)} = R_s \text{ (símbolos/s)} \times m \text{ (bits/símbolo)}$$

Transmisión paso banda

- Representación mediante componentes en fase (I) y cuadratura (Q)



- Representación compleja (sólo para simplificar notación)



$$A[n] = A_I[n] + j A_Q[n] \quad s(t) = s_I(t) + j s_Q(t) \quad e^{j\omega_c t} = \cos(\omega_c t) + j \sin(\omega_c t)$$

- ▶ Filtros transmisor y receptor: filtros en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída α

$$g(t) = f(t) = h_{RRC}^{\alpha, T}(t)$$

Filtros en raíz de coseno alzado

- Filtros cuya convolución es un coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) * h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = h_{RC}^{\alpha,T}(t) \quad H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$$

- Procedimiento general para obtener $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$

1 Se parte de la respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$

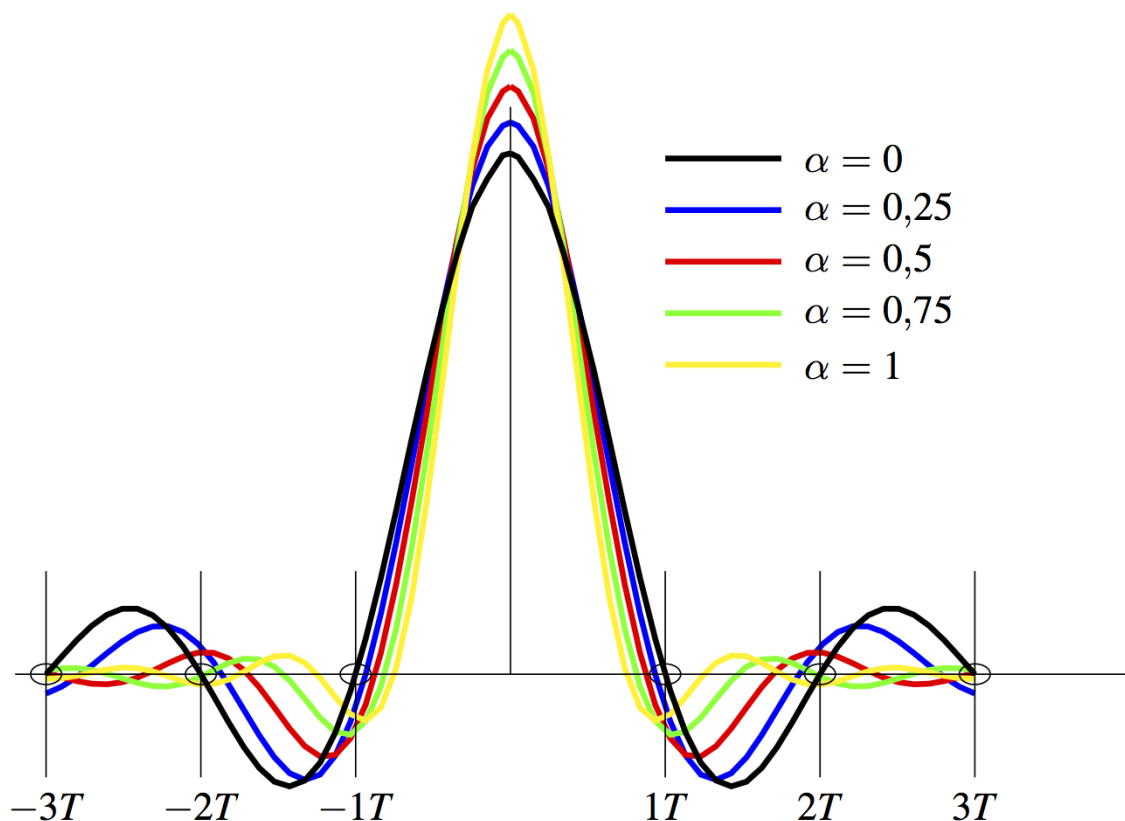
2 Se hace $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) = \sqrt{H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)}$

3 $h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \mathcal{TF}^{-1} \left\{ H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega) \right\}$

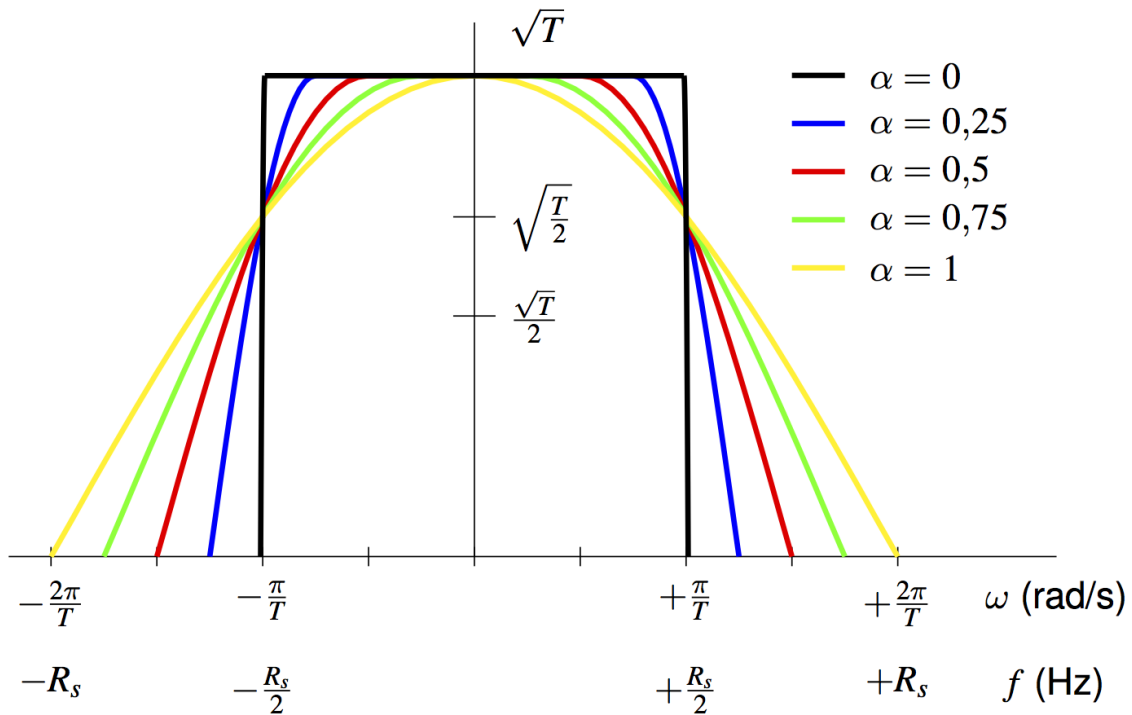
- Filtros en raíz de coseno alzado

$$h_{RRC}^{\alpha,T}(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left((1+\alpha)\frac{\pi t}{T}\right) + T \frac{\sin\left((1-\alpha)\frac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2}$$

Filtros en raíz cuadrada de coseno alzado $h_{RRC}^{\alpha,T}(t)$



Raíz de cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RRC}^{\alpha,T}(j\omega)$



Filtros en coseno alzado

- Familia de filtros con un parámetro: factor de caída (*roll-off*) α
 - ▶ Rango de valores del factor de caída: $\alpha \in [0, 1]$
 - ▶ Caso particular: un coseno alzado con $\alpha = 0$ es una función sinc

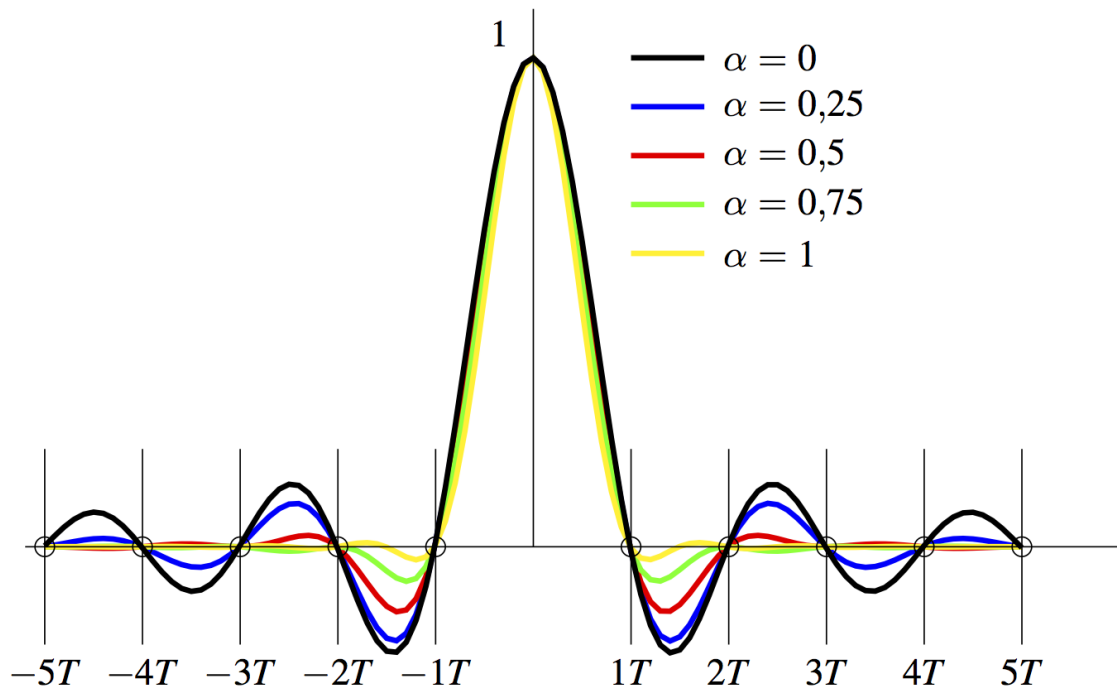
- Expresión del filtro

$$h_{RC}^{\alpha,T}(t) = \left(\frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T} \right) \left(\frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} \right)$$

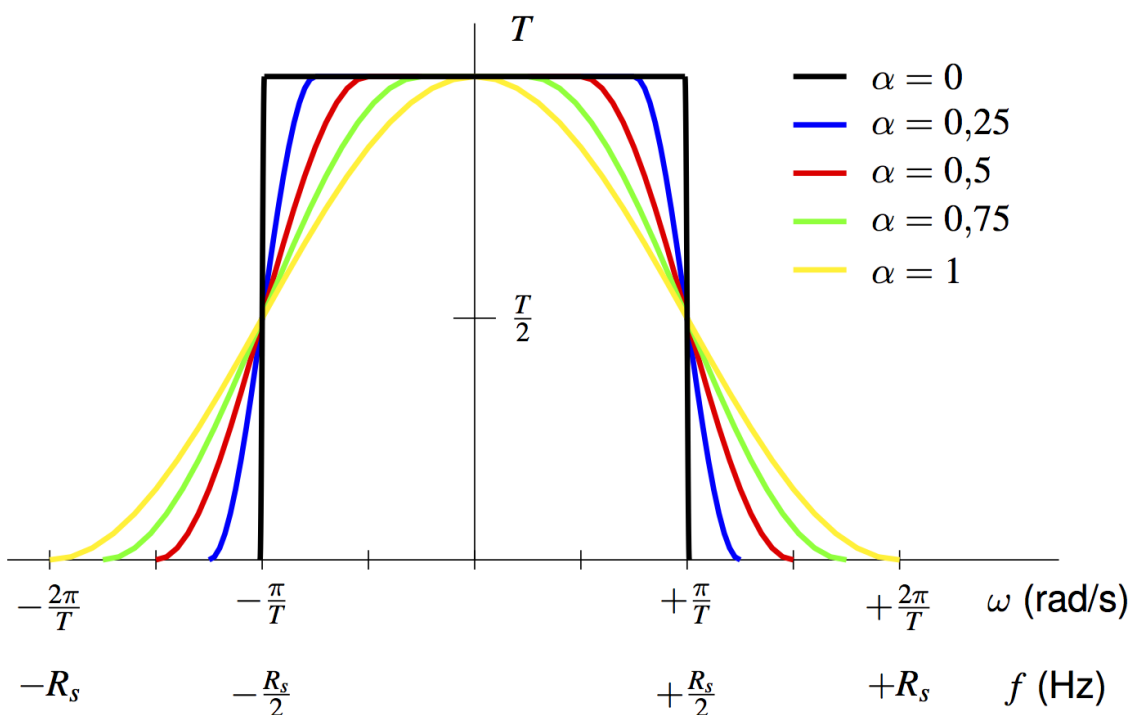
- Transformada de Fourier

$$H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| < (1 - \alpha) \frac{\pi}{T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \text{sen} \left(\frac{T}{2\alpha} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T} \right) \right) \right] & (1 - \alpha) \frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha) \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha) \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Filtros en coseno alzado $h_{RC}^{\alpha,T}(t)$



Cosenos alzados - Respuesta en frecuencia $H_{RC}^{\alpha,T}(j\omega)$



Constelaciones PAM paso banda

- Representación 2D de los posibles valores de $A_I[n]$ vs $A_Q[n]$
- Energía media por símbolo de la constelación E_s
 - ▶ Promedio de la energía de cada símbolo

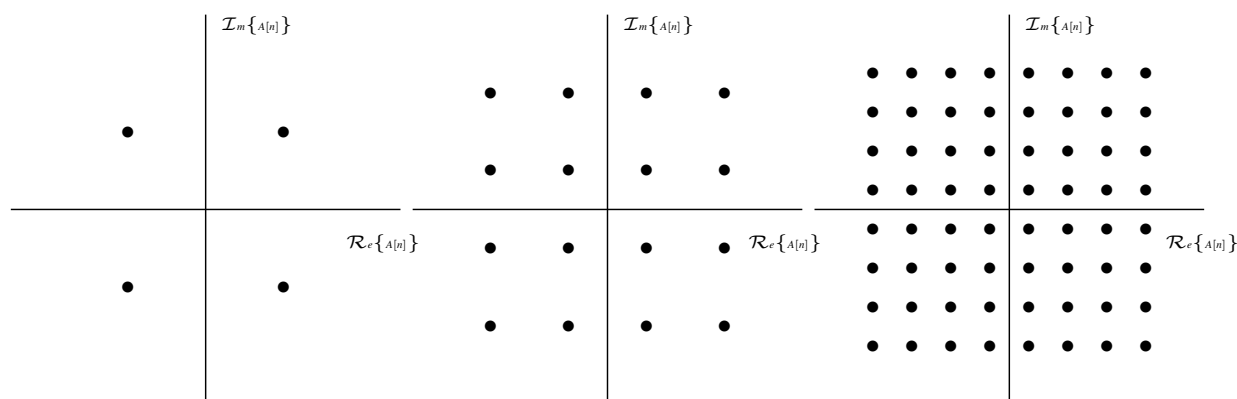
$$E_s = E[|A[n]|^2]$$

- Constelaciones más frecuentes
 - ▶ Constelaciones QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
 - ★ $M = 2^m$ símbolos, con m par
 - ★ Símbolos en una retícula cuadrada ($2^{m/2} \times 2^{m/2}$ niveles)
 - Asignación binaria, codificación, y reglas de decisión independientes en cada componente
 - ★ Niveles normalizados

$$A_I, A_Q \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2^{m/2} - 1)\}, \quad E_s = \frac{2(M - 1)}{3}$$

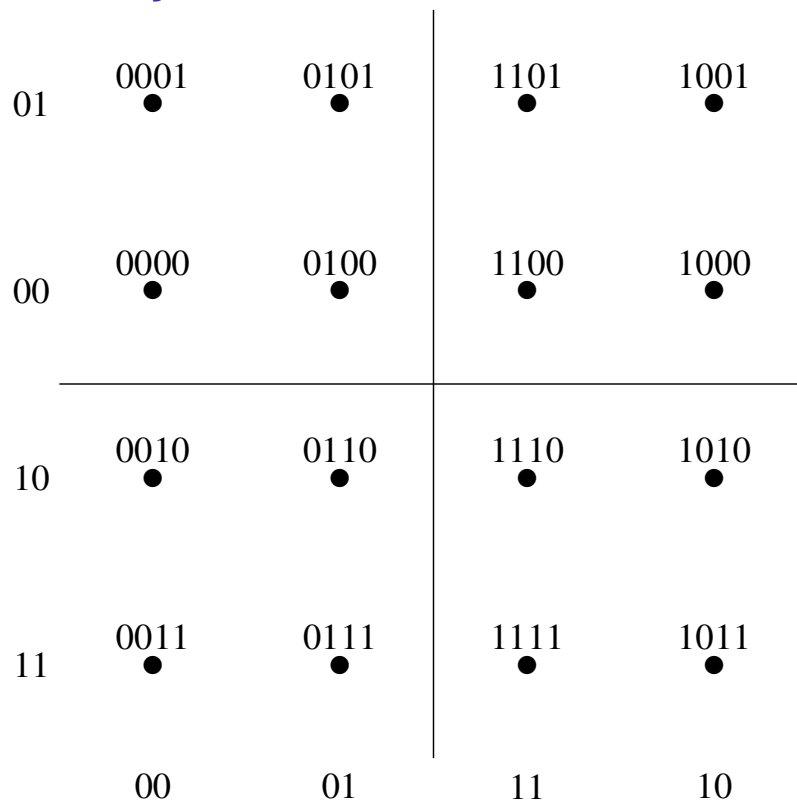
- ▶ Constelaciones PSK (Phase Shift Keying)
 - ★ Símbolos equiespaciados sobre una circunferencia
 - Energía constante para todos los símbolos

Constelaciones QAM

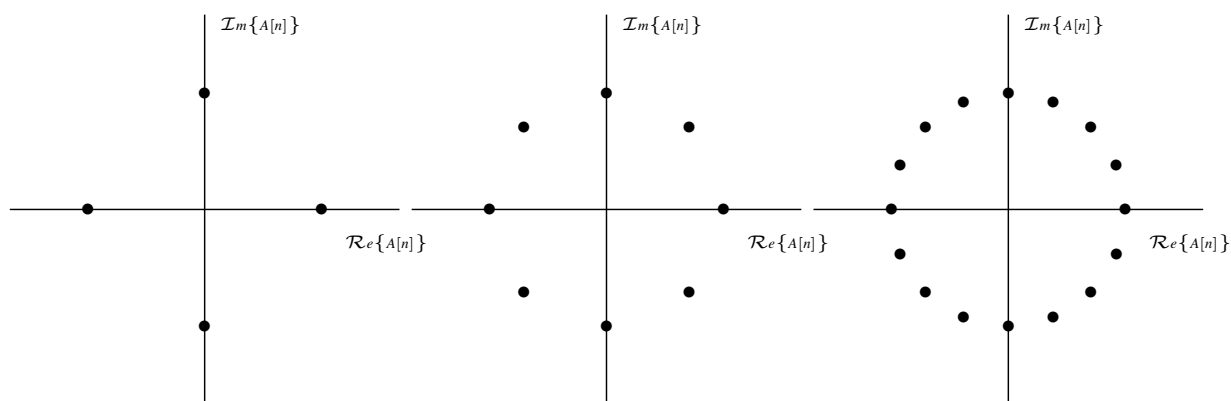


Constelaciones 4-QAM (QPSK), 16-QAM y 64-QAM

Codificación Gray QAM

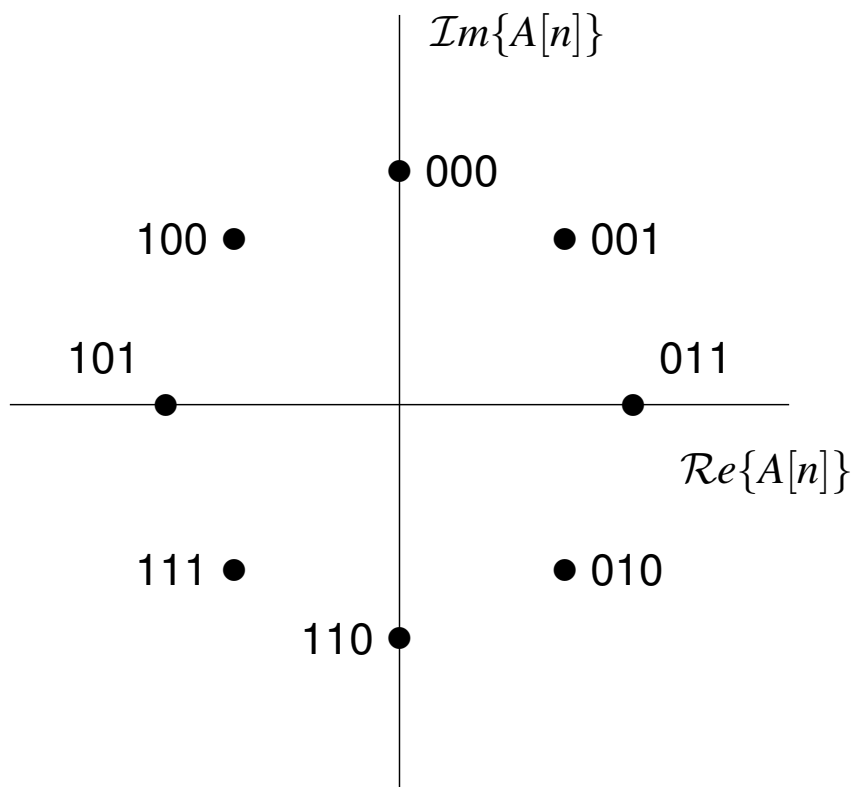


Constelaciones PSK



Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

Codificación Gray PSK

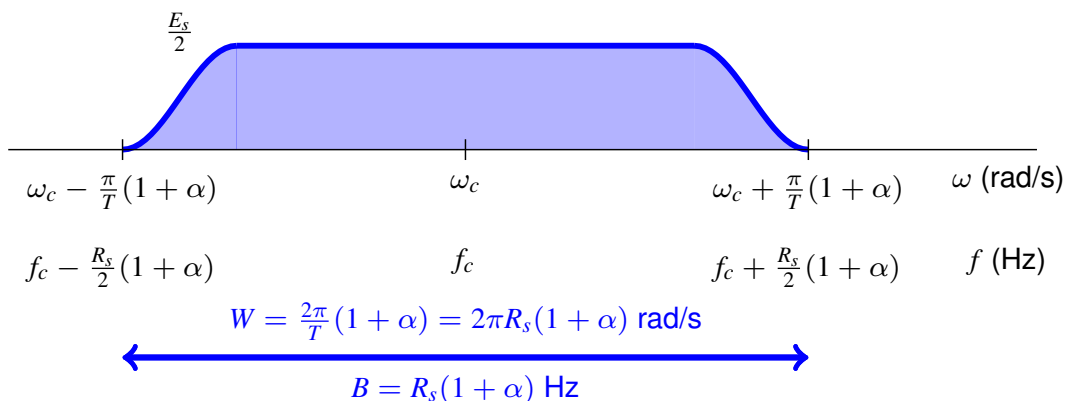


Potencia y espectro (ancho de banda)

- Potencia de la señal modulada

$$P_X = E_s \times R_s \text{ Wattios}$$

- Densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$
 - ▶ Marcada por el filtro transmisor $g(t)$ ($\propto |G(j\omega)|^2$)



- ▶ Ancho de banda de la señal modulada

$$B = R_s(1 + \alpha) \text{ Hz}$$

Detección - Decisión símbolo a símbolo sin memoria

- A partir cada observación $q[n]$ hay que decir el símbolo transmitido en n $\hat{A}[n]$
- Definición de las regiones de decisión para cada símbolo $\{I_0, I_1, \dots, I_{M-1}\}$

$$\hat{A}[n] = a_i \text{ si } q[n] \in I_i$$

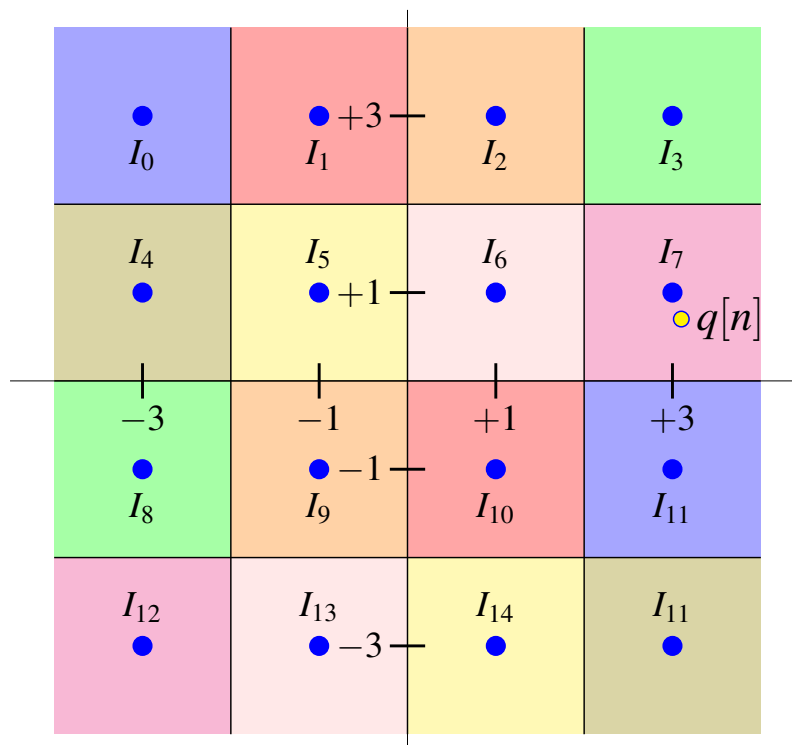
- ▶ Criterio de mínima distancia euclídea

$$I_i = \{q : \|q - a_i\| \leq \|q - a_j\| \forall j \neq i\}$$

- ★ Criterio que minimiza la probabilidad de error de símbolo para símbolos equiprobables y ruido gaussiano transmitiendo sobre un canal ideal

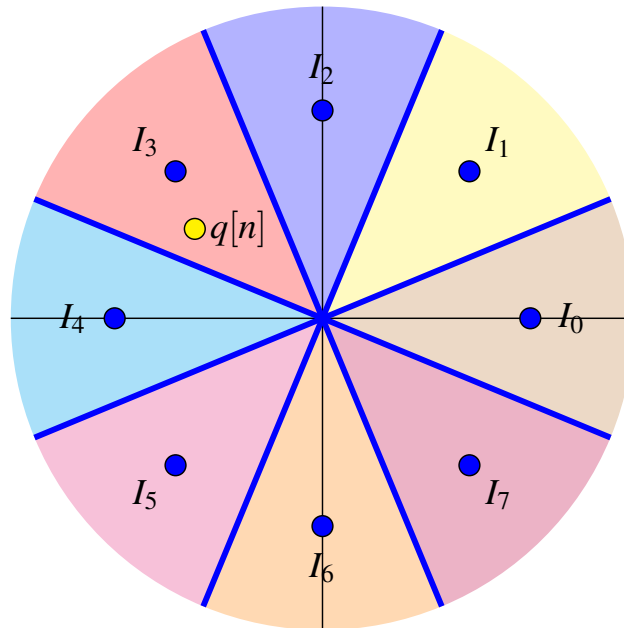
$$q[n] = A[n] + z[n]$$

Ejemplo de regiones de decisión - 16-QAM



$$\hat{A}[n] = a_7 = \begin{bmatrix} +3 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de regiones de decisión - 8-PSK



$$\hat{A}[n] = \mathbf{a}_3 = \sqrt{E_s} e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

Probabilidad de error (canal ideal)

- Probabilidad de que el símbolo transmitido más el ruido (con distribución gaussiana) caiga fuera de la región de decisión del símbolo transmitido
 - ▶ Lo más probable en caso de error, es que la confusión sea con alguno de los símbolos más cercanos

$$P_e = P(\hat{A}[n] \neq A[n]) \approx k Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

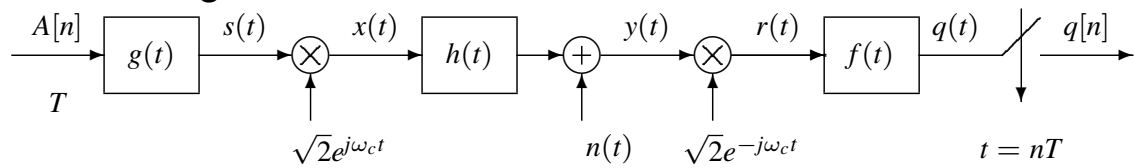
- ★ d_{min} : mínima distancia entre dos símbolos de la constelación
- ★ k : máximo número de símbolos a mínima distancia de otro

$$BER = P(\hat{B}_b[\ell] \neq B_b[\ell]) \approx \frac{1}{m} P_e$$

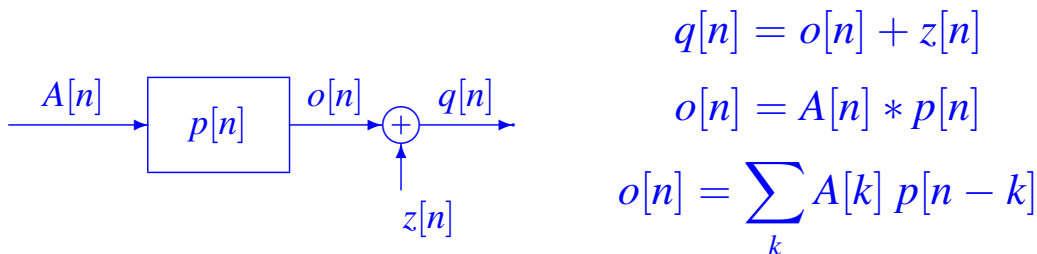
BER: *Bit Error Rate*

Canal discreto equivalente

- Sistema digital de comunicaciones



- Canal discreto equivalente ($p[n]$)



- ▶ Canal discreto equivalente

$$p[n] = p(nT), \text{ con } p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t)$$

$h_{eq}(t) = h(t)e^{-j\omega_c t}$: canal complejo equivalente en banda base

- ▶ Ruido discreto: blanco y gaussiano

$$z[n] = z_I[n] + j z_Q[n] \text{ con } z_i[n], z_Q[n] \sim \mathcal{N}(0, N_0/2) \text{ e indep.}$$

Interferencia intersimbólica (ISI) - Análisis

- Interferencia entre símbolos para el canal discreto $p[n]$

$$o[n] = \underbrace{A[n] p[0]}_{\text{Ideal escalado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n - k]}_{\text{interferencia (ISI)}}$$

deseado

- ▶ Efecto de la interferencia entre símbolos

$$\text{ISI} = \sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n - k]$$

Contribución en el instante discreto n de símbolos anteriores y posteriores

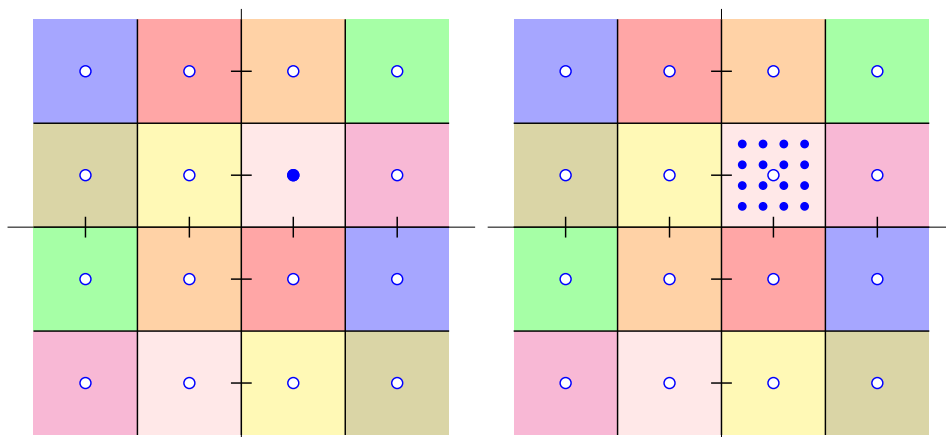
$$o[n] = \underbrace{\dots + A[n - 2] p[2] + A[n - 1] p[1]}_{\text{ISI precursora}} + \underbrace{A[n] p[0]}_{\text{cursor}} + \underbrace{A[n + 1] p[-1] + A[n + 2] p[-2] + \dots}_{\text{ISI postcursora}}$$

- ▶ Transmisión sobre canal ideal

$$h(t) = C \delta(t - t_0) \quad H(j\omega) = C e^{-j\omega t_0}$$

$$p[n] = C \delta[n] \quad o[n] = C A[n]$$

ISI: Constelación extendida

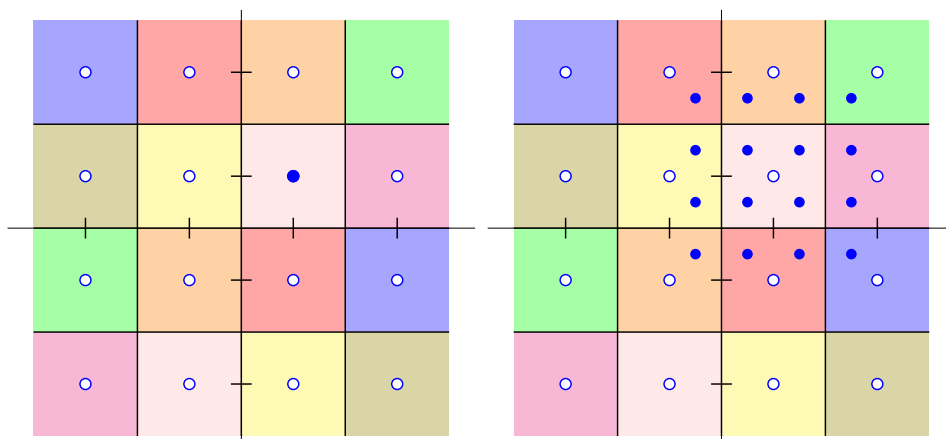


- Ejemplo de ISI (memoria de $p[n]$, $K_p = 1$)

$$p[n] = \delta[n] + a \delta[n - 1], \quad o[n] = A[n] + a A[n - 1]$$

- ▶ Transmisión de un símbolo en $A[n]$
 - ★ En el receptor se observa una constelación extendida alrededor de dicho símbolo (un punto en cada instante que dependerá del valor del símbolo anterior (M posibilidades))
 - ★ Habrá luego que añadir el efecto del ruido

ISI: Constelación extendida (II)



- Ejemplo de ISI (memoria de $p[n]$, $K_p = 1$)

$$p[n] = \delta[n] + a \delta[n - 1], \quad o[n] = A[n] + a A[n - 1]$$

- ▶ Si aumenta a los puntos de la constelación extendida para cada símbolo se separan más de este
- ▶ Si aumenta la memoria de $p[n]$ el tamaño de la constelación aumenta exponencialmente

M^{K_p} posibles valores por cada símbolo

Detección bajo interferencia intersimbólica

- Detector de secuencias de máxima verosimilitud

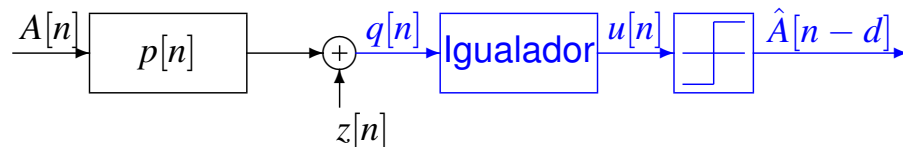
- ▶ Definición de estado del sistema
 - ★ Símbolos del pasado que afectan a $o[n]$

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K_p]]$$

- ▶ Diagrama de rejilla
 - ★ Describe la evolución del estado en función de los posibles símbolos transmitidos
- ▶ Algoritmo de Viterbi
 - ★ Recupera la secuencia más verosímil (camino sobre la rejilla)
- ▶ Solución óptima (mínima P_e), pero con complejidad exponencial

- Solución subóptima: igualadores de canal

- ▶ Un igualador de canal reduce la ISI
- ▶ Decisiones mediante decisor símbolo a símbolo sin memoria



- Probabilidades de error: dependientes de $p[n]$

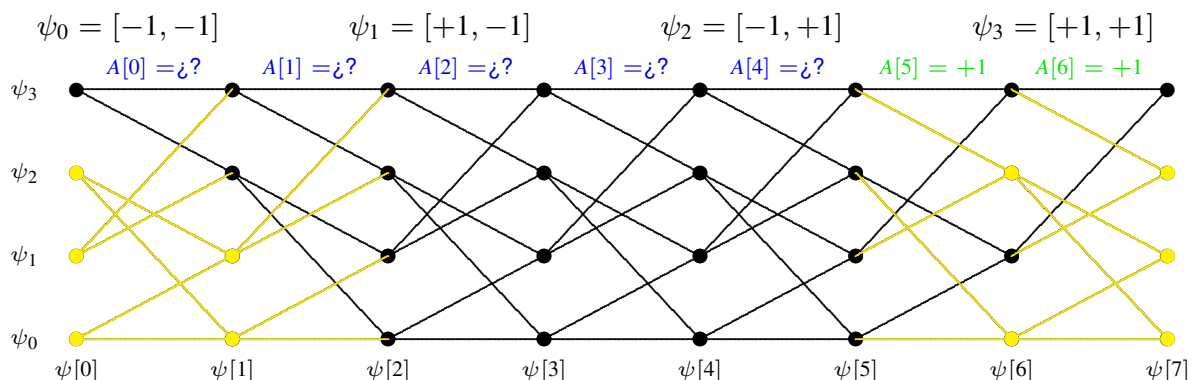
- ▶ Cálculo en sistemas reales: [simulación del sistema](#)

Detección de una secuencia de L símbolos

- Ejemplo para $K_p = 2$, $L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- ▶ Complejidad exponencial
 - ★ Número de estados: M^{K_p}
 - ★ Ramas saliendo/llegando a cada estado: M



Detección de una secuencia de L símbolos

- Ejemplo para $K_p = 3, L = 5$ y 2-PAM $A[n] \in \{\pm 1\}$

Secuencia $A[0], A[1], A[2], A[3], A[4]$

- Cabecera: $[+1, +1, +1]$

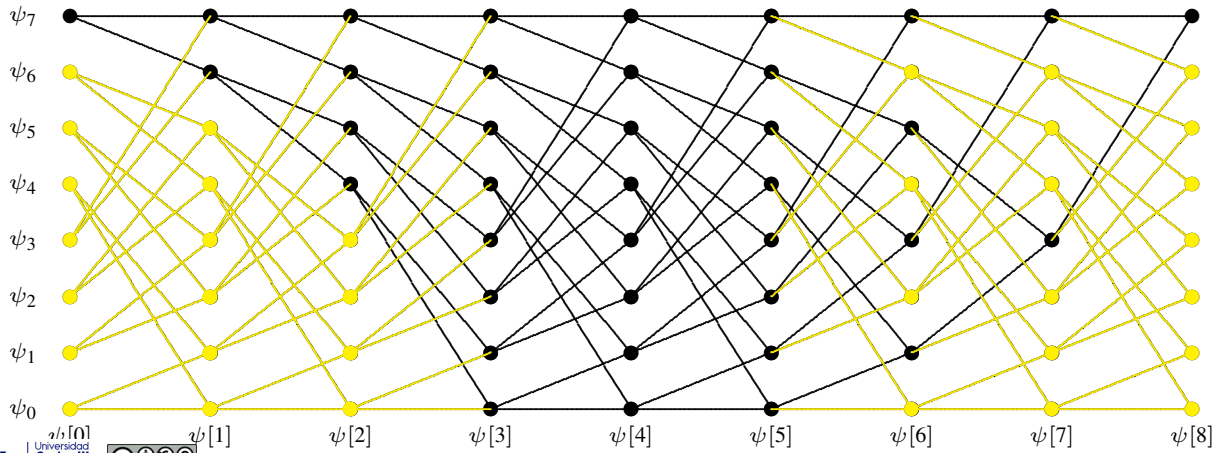
$$A[-3] = A[-2] = A[-1] = A[5] = A[6] = A[7] + 1$$

★ Estado inicial y final: $\psi[0] = \psi[K_p + L] = [+1, +1, +1] \equiv \psi_7$

$$\psi_4 = [-1, -1, +1] \quad \psi_5 = [+1, -1, +1] \quad \psi_6 = [-1, +1, +1] \quad \psi_7 = [+1, +1, +1]$$

$$\psi_0 = [-1, -1, -1] \quad \psi_1 = [+1, -1, -1] \quad \psi_2 = [-1, +1, -1] \quad \psi_3 = [+1, +1, -1]$$

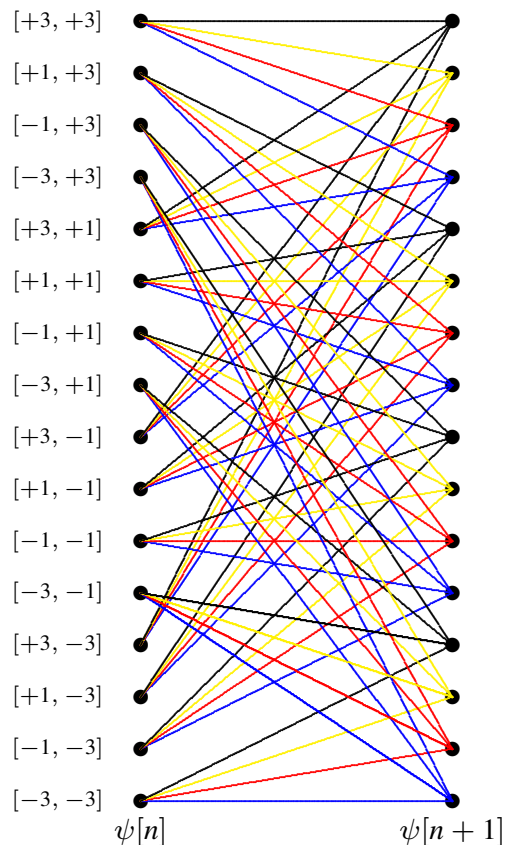
$$A[0] = \varepsilon? \quad A[1] = \varepsilon? \quad A[2] = \varepsilon? \quad A[3] = \varepsilon? \quad A[4] = \varepsilon? \quad A[5] = +1 \quad A[6] = +1 \quad A[7] = +1$$



Rejilla para $M = 4$ en canal con memoria $K_p = 2$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+3	+3	+3	a_0
+1	+3	+3	a_1
-1	+3	+3	a_2
-3	+3	+3	a_3
+3	+1	+3	b_0
+1	+1	+3	b_1
-1	+1	+3	b_2
-3	+1	+3	b_3
+3	-1	+3	c_0
+1	-1	+3	c_1
-1	-1	+3	c_2
-3	-1	+3	c_3
+3	-3	+3	d_0
+1	-3	+3	d_1
-1	-3	+3	d_2
-3	-3	+3	d_3
+3	+3	+1	e_0
+1	+3	+1	e_1
-1	+3	+1	e_2
-3	+3	+1	e_3
+3	+1	+1	f_0
+1	+1	+1	f_1
-1	+1	+1	f_2
-3	+1	+1	f_3
+3	-1	+1	g_0
+1	-1	+1	g_1
-1	-1	+1	g_2
-3	-1	+1	g_3
+3	-3	+1	h_0
+1	-3	+1	h_1
-1	-3	+1	h_2
-3	-3	+1	h_3

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+3	+3	-1	i_0
+1	+3	-1	i_1
-1	+3	-1	i_2
-3	+3	-1	i_3
+3	+1	-1	j_0
+1	+1	-1	j_1
-1	+1	-1	j_2
-3	+1	-1	j_3
+3	-1	-1	k_0
+1	-1	-1	k_1
-1	-1	-1	k_2
-3	-1	-1	k_3
+3	-3	-1	l_0
+1	-3	-1	l_1
-1	-3	-1	l_2
-3	-3	-1	l_3
+3	+3	-3	m_0
+1	+3	-3	m_1
-1	+3	-3	m_2
-3	+3	-3	m_3
+3	+1	-3	n_0
+1	+1	-3	n_1
-1	+1	-3	n_2
-3	+1	-3	n_3
+3	-1	-3	o_0
+1	-1	-3	o_1
-1	-1	-3	o_2
-3	-1	-3	o_3
+3	-3	-3	p_0
+1	-3	-3	p_1
-1	-3	-3	p_2
-3	-3	-3	p_3

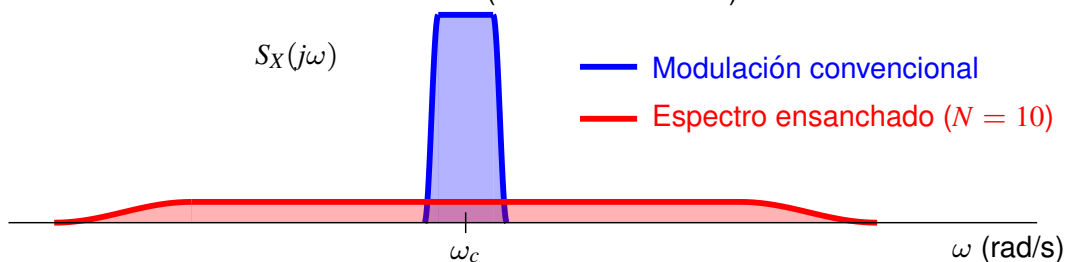


Modulaciones avanzadas para combatir ISI

- Modulaciones de espectro ensanchado
 - ▶ Se incrementa el ancho de banda para reducir la sensibilidad a interferencias
 - ▶ Aplicación en estándares IoT
 - ★ ZigBee (basado en IEEE 802.15.4), 6LoWPAN (IPv6 over low power wireless personal area networks, basado en 802.15.4)
- Modulaciones multiportadora (FDM y OFDM)
 - ▶ La información a transmitir se divide entre múltiples portadoras, cada una de las cuales utiliza una parte del espectro disponible (subcanal)
 - ▶ Aplicación en estándares IoT
 - ★ WiFi (IEEE 802.11), WiMAX (IEEE 802.16)

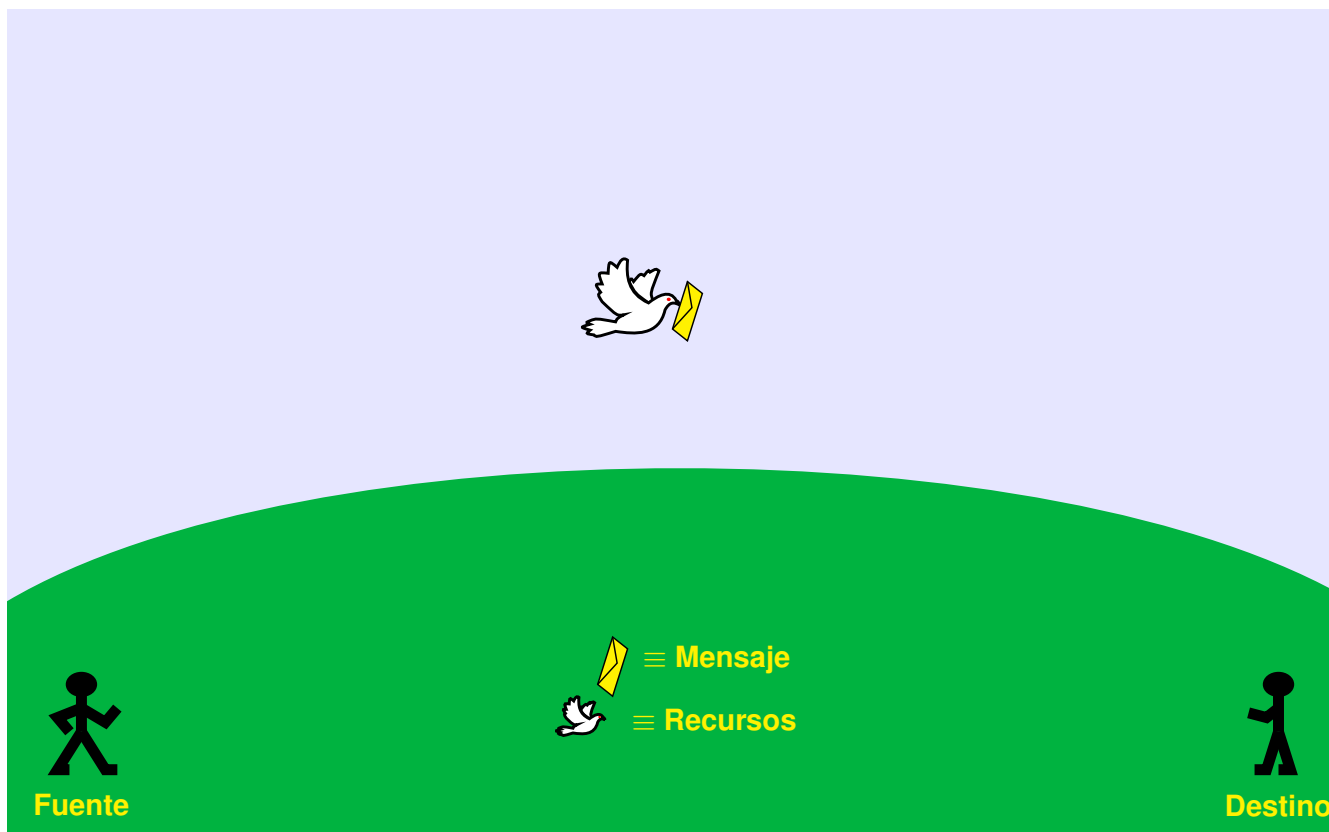
Modulaciones de espectro ensanchado

- Ancho de banda deliberadamente mayor que en modulaciones convencionales
 - ▶ Ancho de banda se incrementa por un factor N
 - ★ Inmunidad a interferencias (desvanecimientos) de banda estrecha

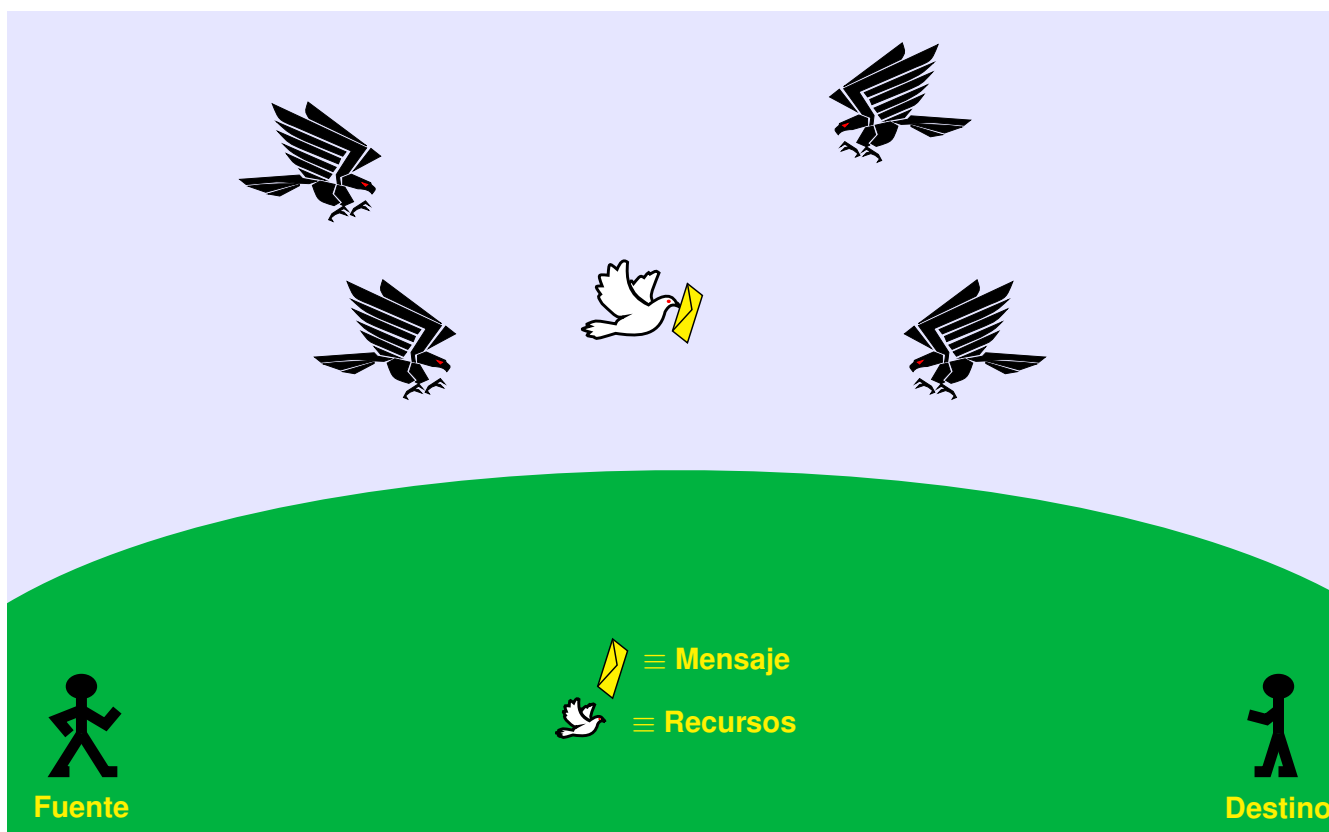


- Mito: espectro ensanchado incrementa la capacidad del sistema
 - ▶ Realidad:
 - ★ Proporciona baja sensibilidad a distorsión del canal (incluido *jamming*)
 - ★ Permite comunicaciones seguras
- Origen militar: combatir interferencias intencionadas (*jamming*)
 - ▶ Aplicaciones actuales
 - ★ Aplicaciones que requieran robustez contra atenuaciones locales
 - ★ Limita la densidad de flujo de potencia en enlaces descendentes de satélites
 - ★ Acceso múltiple o multiplexación
 - CDMA: *Code Division Multiple Access*

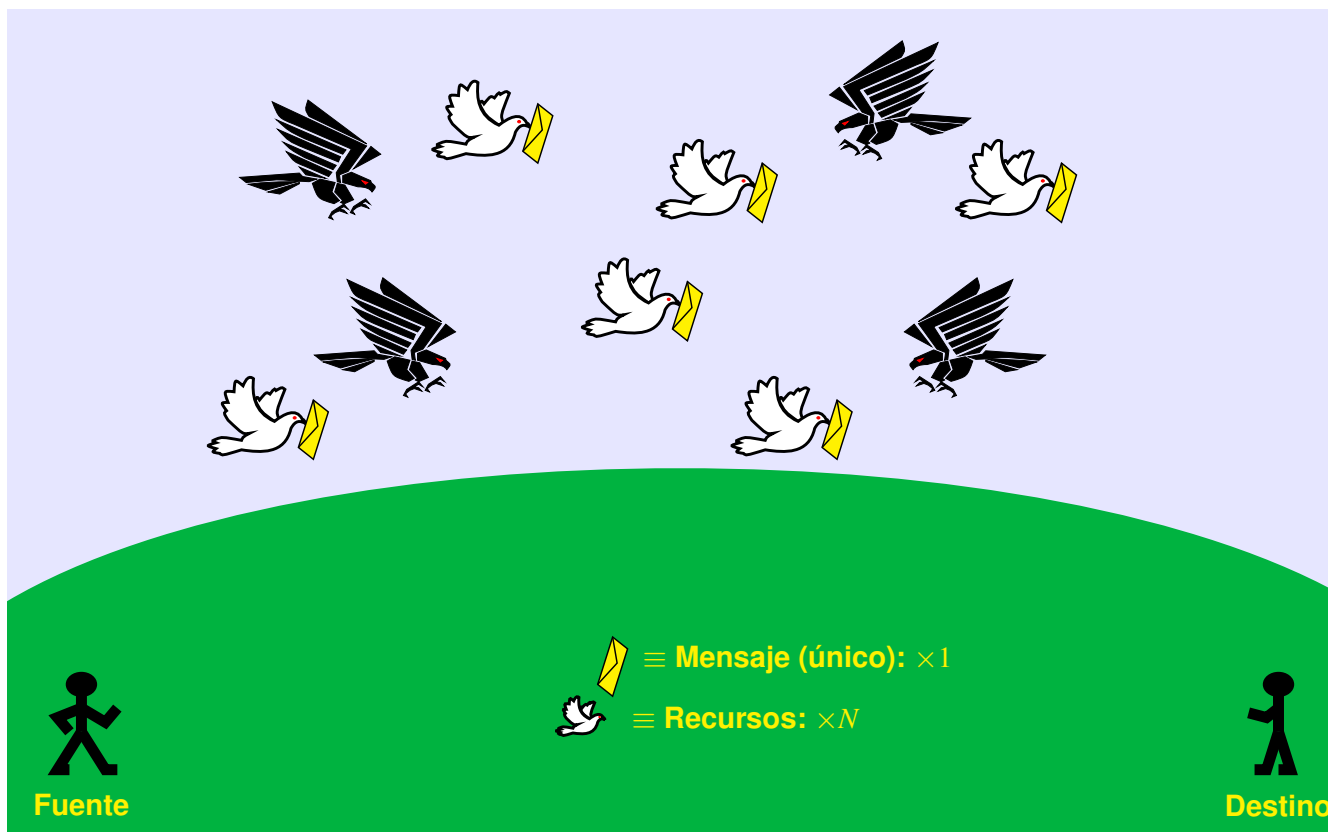
Canal ideal



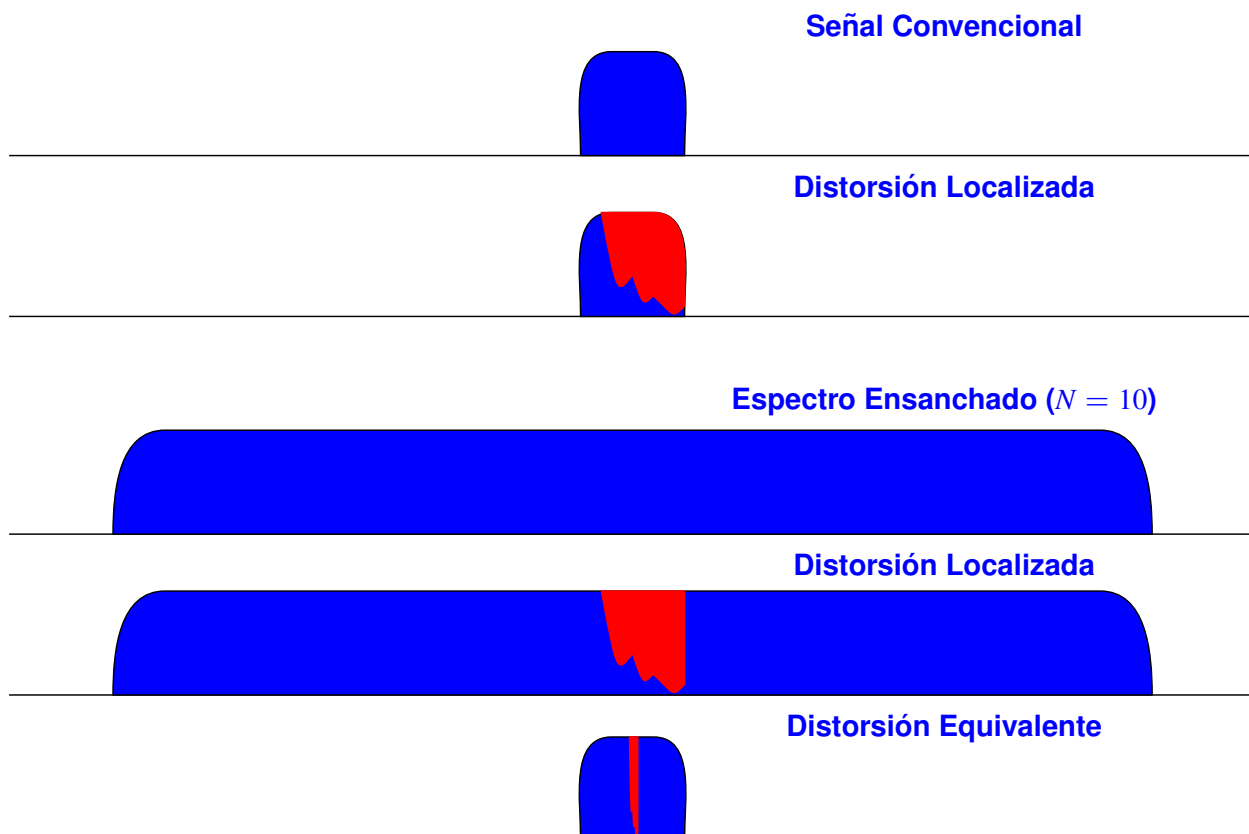
Canal "agresivo"



Canal "agresivo": espectro ensanchado



Espectro ensanchado: idea intuitiva



Espectro ensanchado por secuencia directa

DSSS: Direct Sequence Spread Spectrum

- Alternativa que evita la localización en tiempo de la potencia de la señal
- Familia de filtros transmisores

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c)$$

Combinación lineal de N réplicas de un filtro, $g_c(t)$, desplazadas múltiplos de $T_c = \frac{T}{N}$ con coeficientes $x[m]$

- ▶ $x[m]$: secuencia ensanchadora (secuencia de *chip*)
 - ★ N valores: $\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$
- ▶ T_c : período de *chip* $T_c = \frac{T}{N}$
- ▶ $g_c(t)$: filtro tal que $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c

- Expresión analítica de la señal modulada

$$s(t) = \sum_n A[n] \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t-nT)}$$

Ejemplo de filtro: rectangular $N = 4$

- Tiempo de chip: $T_c = \frac{T}{N} = \frac{T}{4}$
- Filtro a tiempo de chip

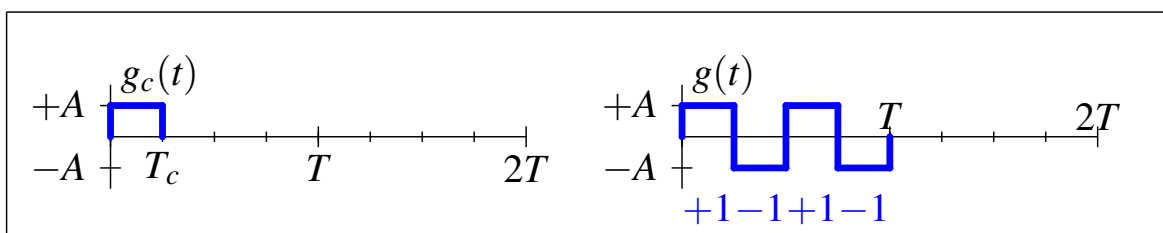
$$g_c(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Filtro transmisor (a tiempo de símbolo)

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c)$$

- Secuencia de ensanchado

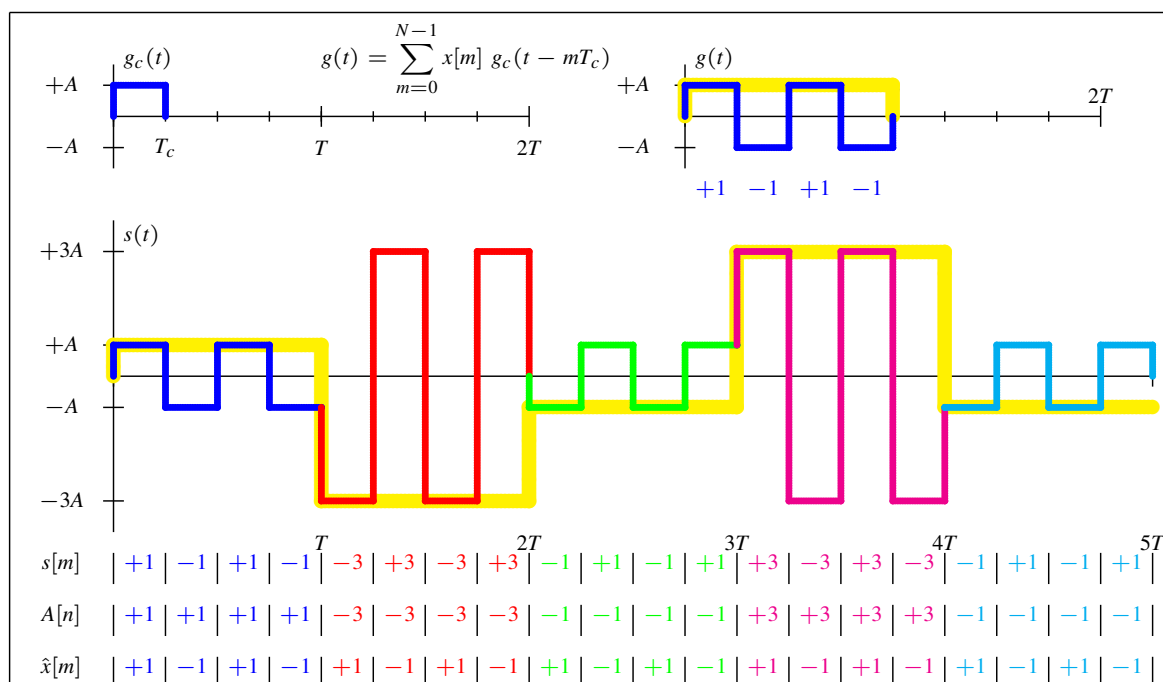
n	0	1	2	3
$x[n]$	+1	-1	+1	-1



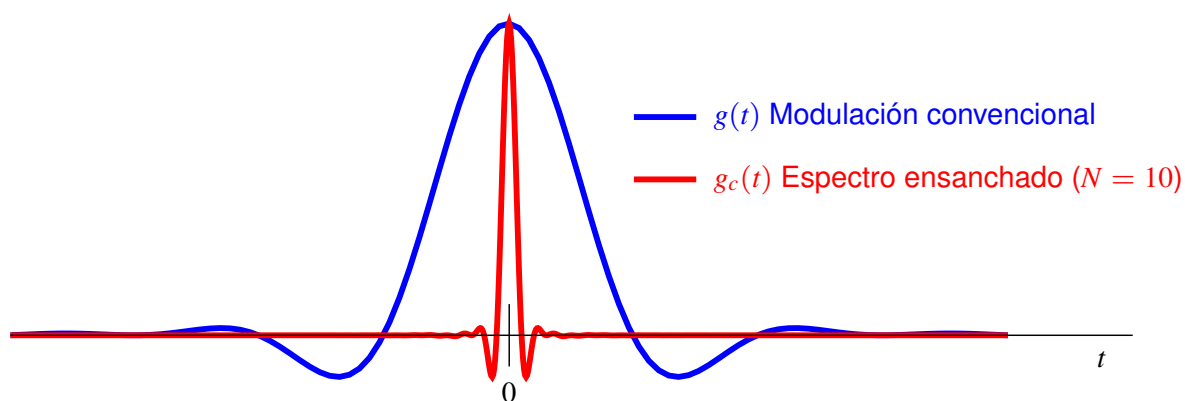
Generación de las señales $s(t)$ (Ejemplo $N = 4$)

● Secuencia a transmitir: $\frac{n}{A[n]} \mid \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ +1 & -3 & -1 & +3 & -1 \end{array}$

● Secuencia de ensanchado ($N = 4$): $x[0] = +1, x[1] = -1, x[2] = +1, x[3] = -1$

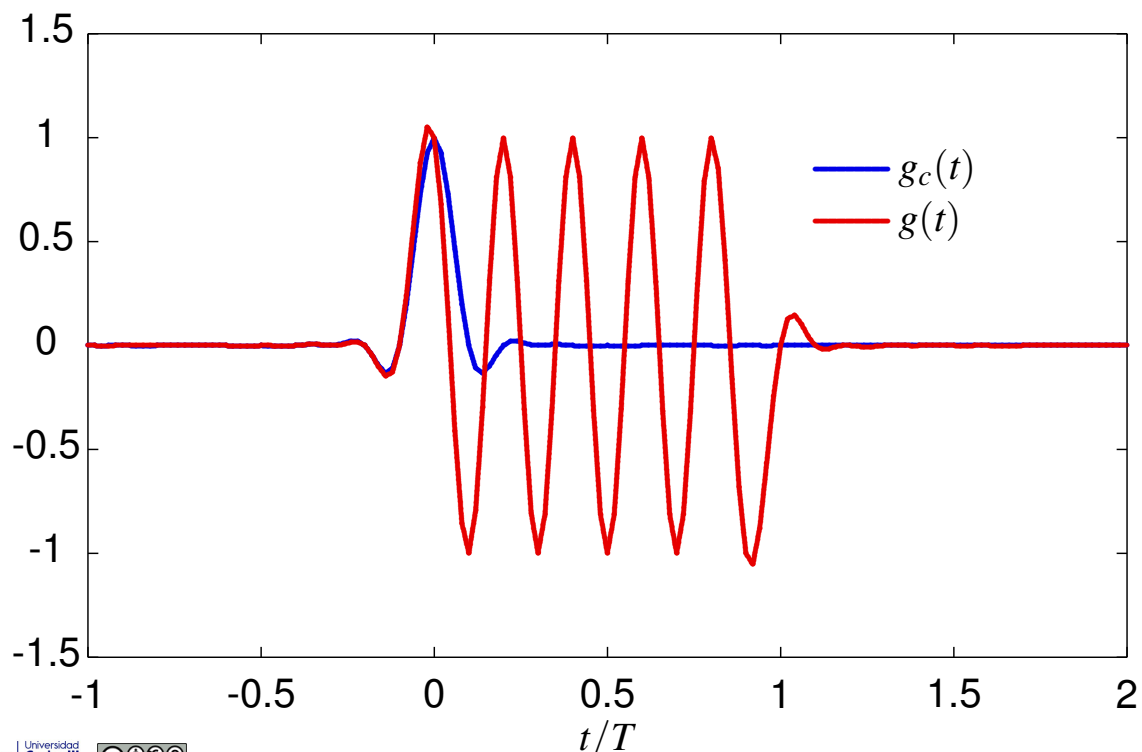


Ejemplo de filtros: coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$

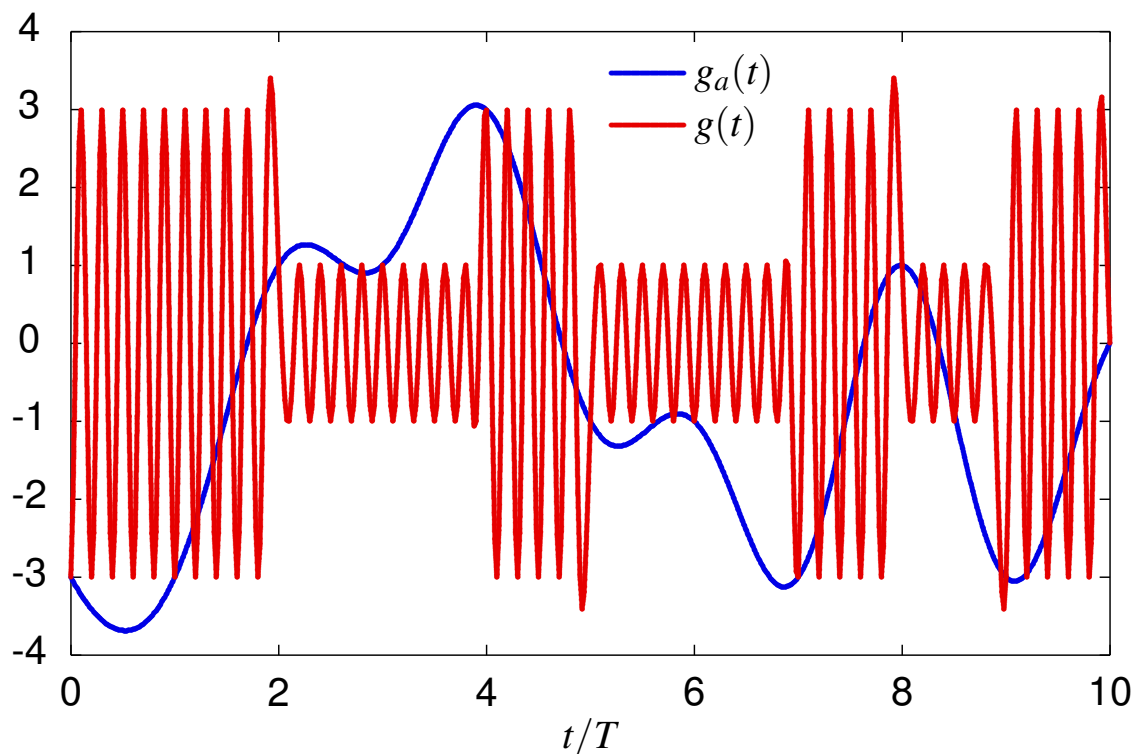


Ejemplo de filtro: coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1



Ejemplo de forma de onda: Coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$



Condiciones para evitar la ISI

- Los valores del $p[n]$ para $n \neq 0$ son proporcionales a

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m \pm k]$$

- La ISI se puede evitar (o reducir significativamente) si

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m \pm k] = C \delta[k]$$

lo que es equivalente a

$$|X(e^{j\omega})| = C$$

- Ejemplos de secuencias con espectro (casi) plano
 - ▶ $x[m] = e^{j\theta} \delta[m - k]$ (problema: localización)
 - ▶ Secuencias de pseudo-ruido

Acceso al medio de múltiples usuarios - CDMA

- Una de las aplicaciones del espectro ensanchado es el acceso múltiple
 - ▶ Varios usuarios acceden simultáneamente al sistema utilizando la misma banda de frecuencias
 - ★ Acceso por división de código
- Cada usuario utiliza una secuencia de ensanchado diferente
 - ▶ Código de usuario

CDMA - DSSS

- Parámetros idénticos para todos los usuarios

- ▶ $g_c(t), T, T_c$

- Señales multiusuario CDMA: L usuarios

- ▶ Cada usuario tiene una secuencia de ensanchado $x_i[m]$
 - ▶ Filtro a tiempo de símbolo para el usuario i -ésimo

$$g_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] g_c(t - m T_c)$$

- ▶ Señal compleja en banda base

$$s(t) = \sum_{i=0}^{L-1} s_i(t)$$

$$s_i(t) = \sum_n A_i[n] g_i(t - nT) = \sum_n \sum_{m=0}^{N-1} A_i[n] x_i[m] g_c(t - mT_c - nT)$$

- ▶ Separación de las señales de cada usuario

- ★ Filtros transmisores ortogonales

Condición de ortogonalidad de los filtros

- Producto escalar de dos filtros distintos a período de símbolo

$$\begin{aligned} \langle g_i(t), g_j(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) g_j^*(t) dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t - mT_c) g_c^*(t - \ell T_c) dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[\ell] (g_c(t - mT_c) * g_c^*(-t - \ell T_c))_{t=0} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[m] \end{aligned}$$

- Condición de ortogonalidad sobre las secuencias de código

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[m] = C \delta[i - j], \quad i, j = 0, \dots, L - 1$$

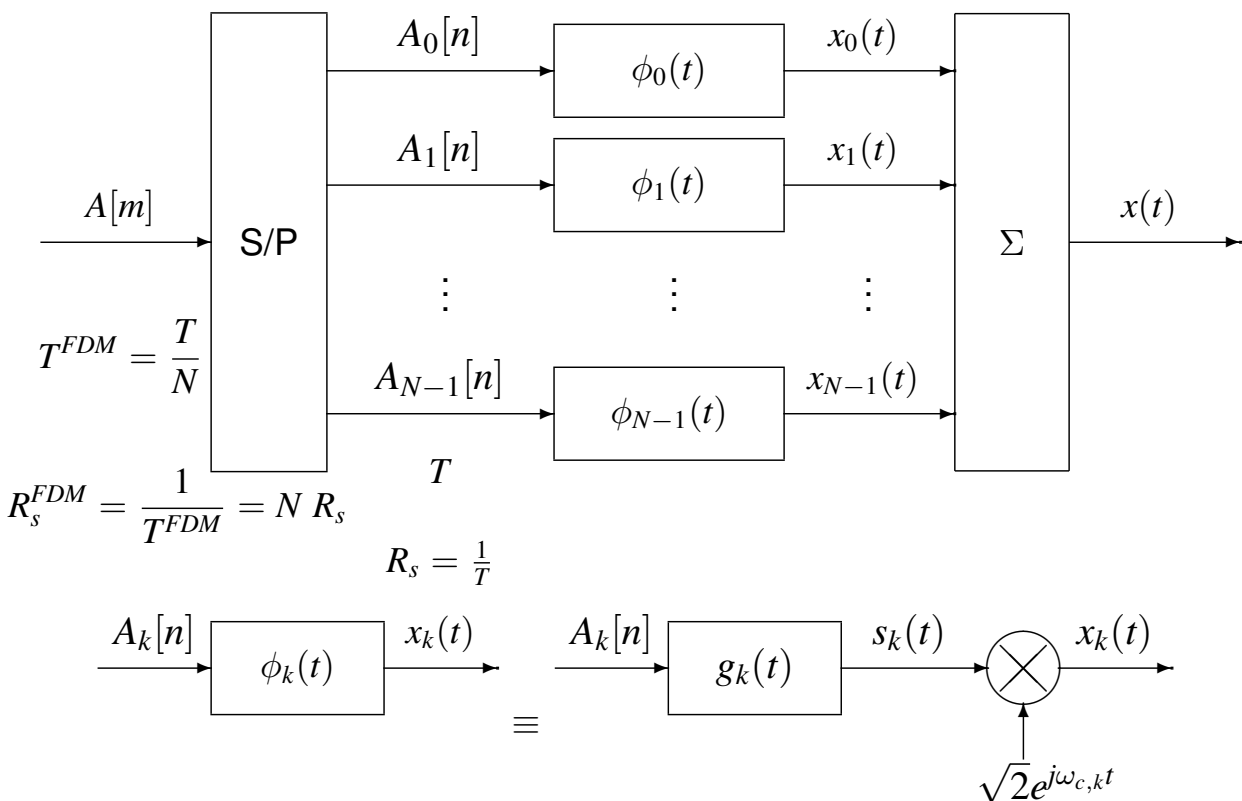
- Varios tipos de secuencias se usan en la práctica

- ▶ Secuencias de Gold (1967), código de Kasami, secuencias de Welch,...

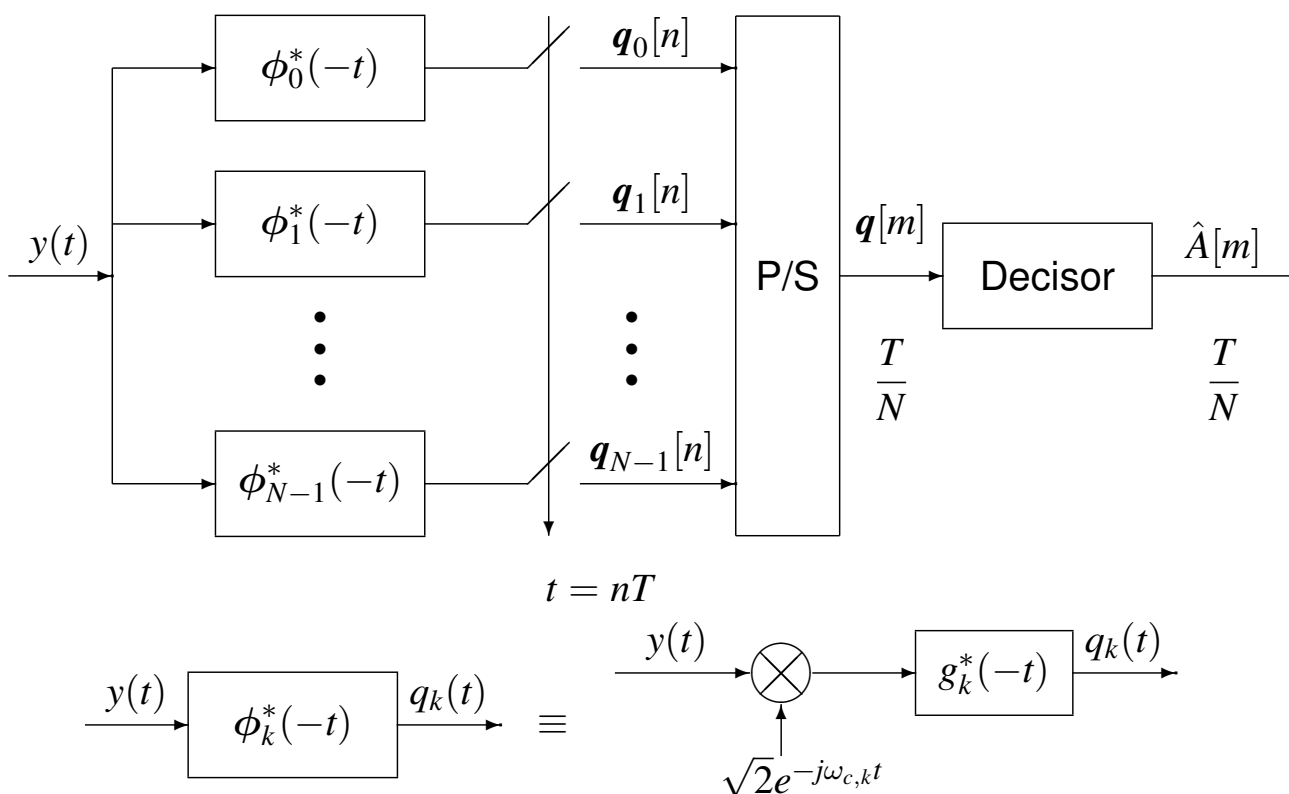
Modulación con múltiples portadoras - FDM

- FDM - Frequency division multiplex
- División del ancho de banda disponible (W^{FDM} rad/s) en N subcanales
 - ▶ Ancho de banda de cada subcanal: $W = \frac{W^{FDM}}{N}$ rad/s
 - ▶ Secuencia de datos $A[n]$ dividida en N secuencias
 - ▶ Transmisión de una señal en cada subcanal (p.e. PAM)
 - ▶ Tasa de cada subcanal: $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
 - ▶ Tasa total: $R_s^{FDM} = \frac{1}{T^{FDM}} = N \times R_s$ baudios
 - ▶ Utilizando filtros de la familia coseno alzado: $W = \frac{2\pi}{T} (1 + \alpha)$ rad/s
- Transmisor
 - ▶ Conversión serie / paralelo: $A[m] \rightarrow \{A_0[n], \dots, A_{N-1}[n]\}$
 - ▶ N ramas con señales PAM paso banda
 - ★ Filtro transmisor en la rama k -ésima: $\phi_k(t)$, $k = 0, \dots, N - 1$
 - Parámetros: filtro transmisor $g_k(t)$, frecuencia central $\omega_{c,k}$
 - ★ Señal modulada en la rama k -ésima: $x_k(t)$
- Receptor
 - ▶ N filtros adaptados al transmisor
 - ▶ Conversión paralelo serie: $\{\hat{A}_0[n], \dots, \hat{A}_{N-1}[n]\} \rightarrow \hat{A}[m]$

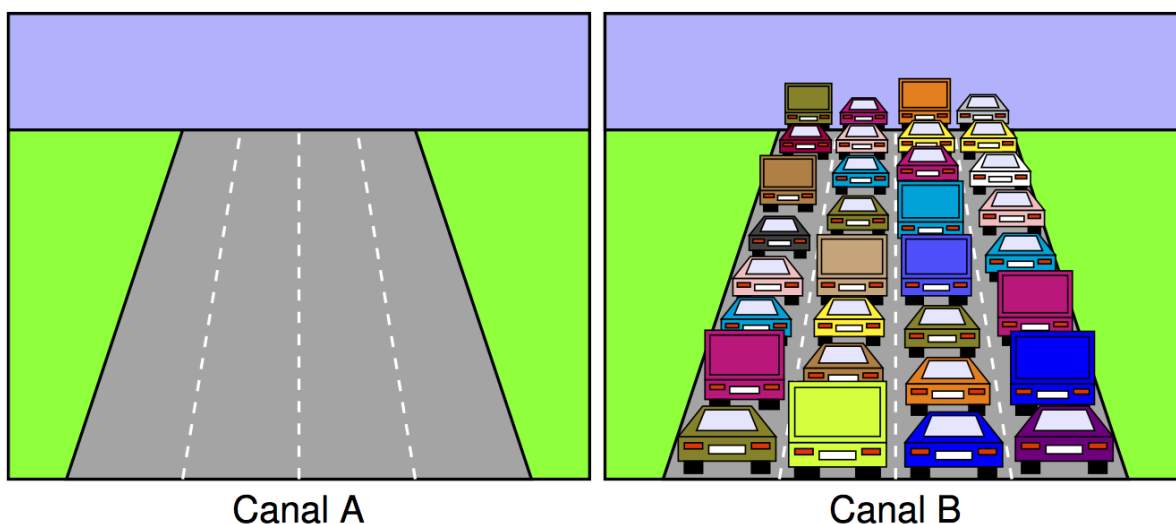
Modulador FDM



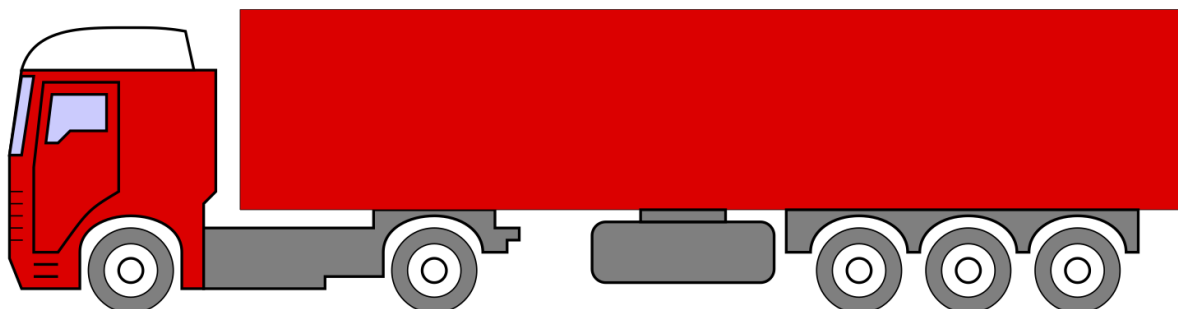
Demodulador FDM



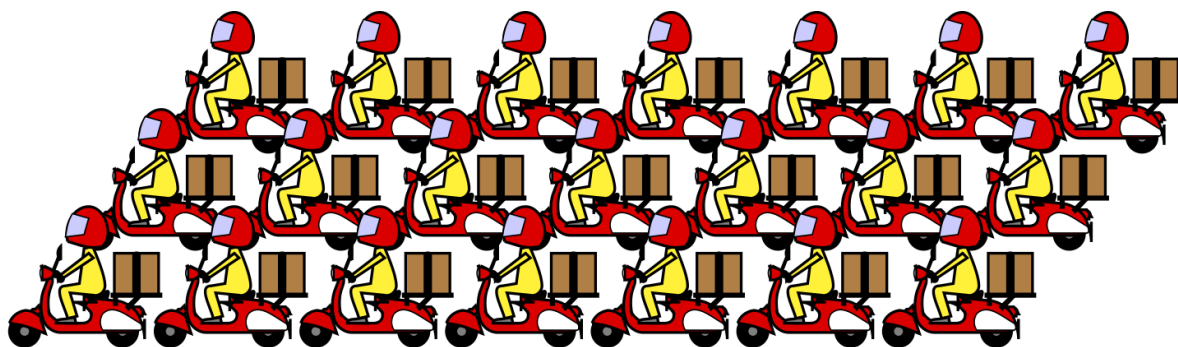
Algunos tipos de "canal"



Posibles soluciones

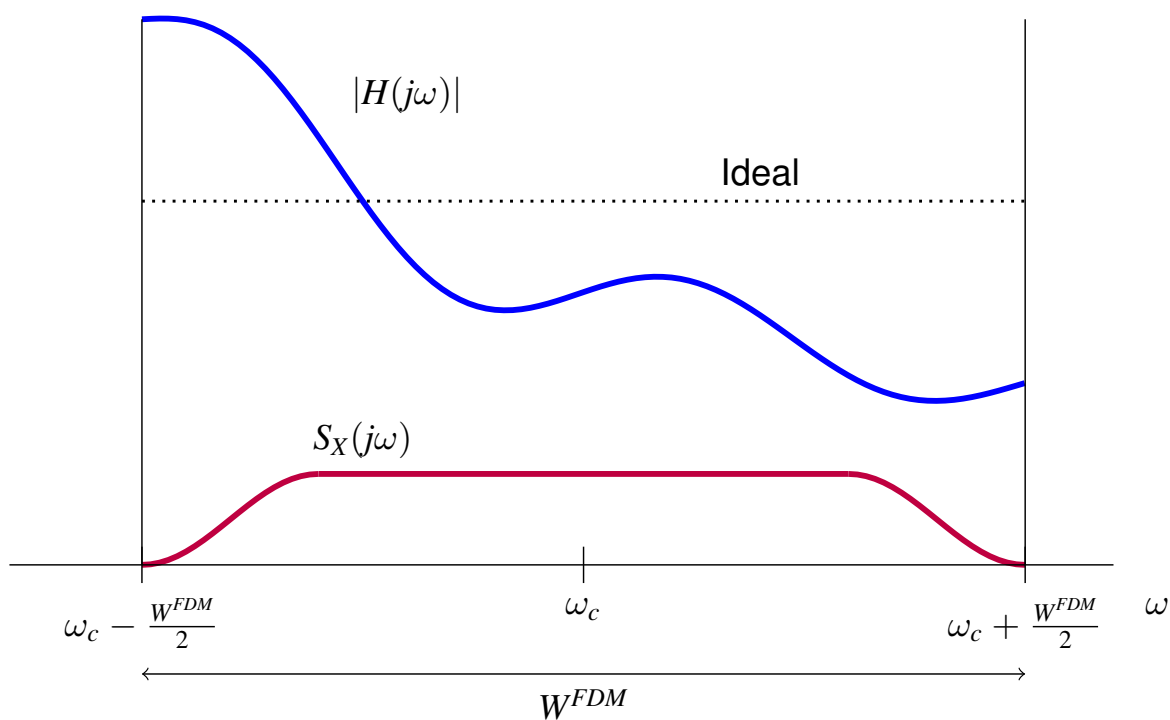


Portadora Única

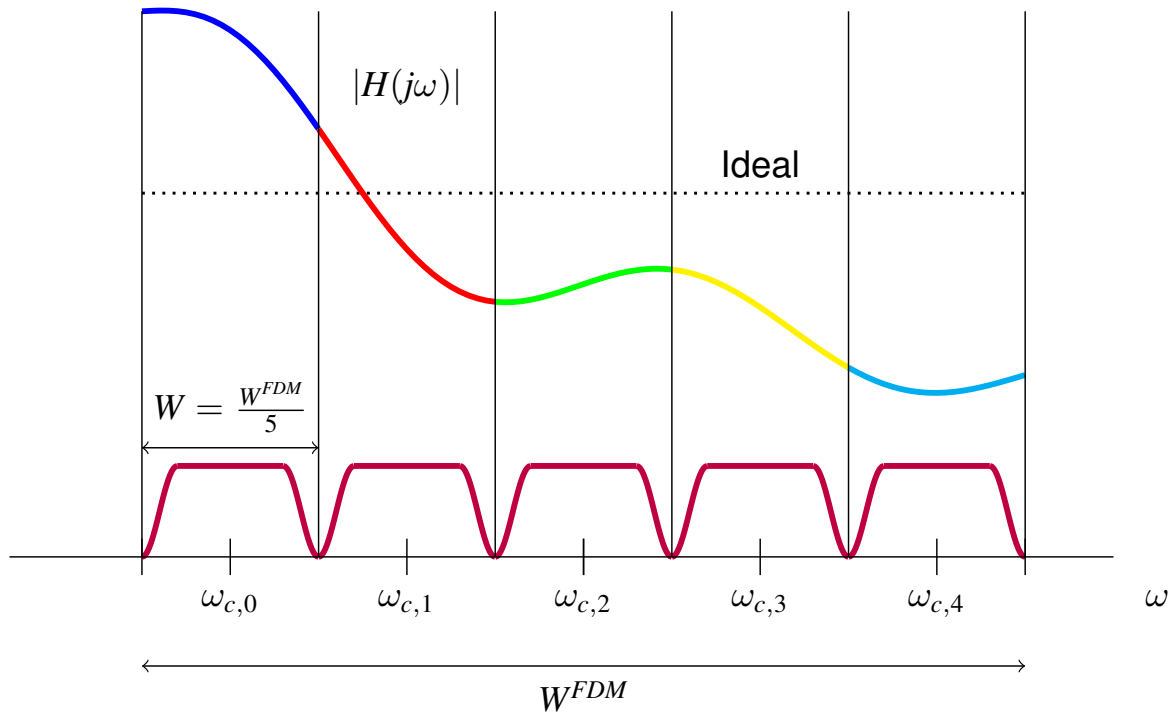


Múltiples Portadoras

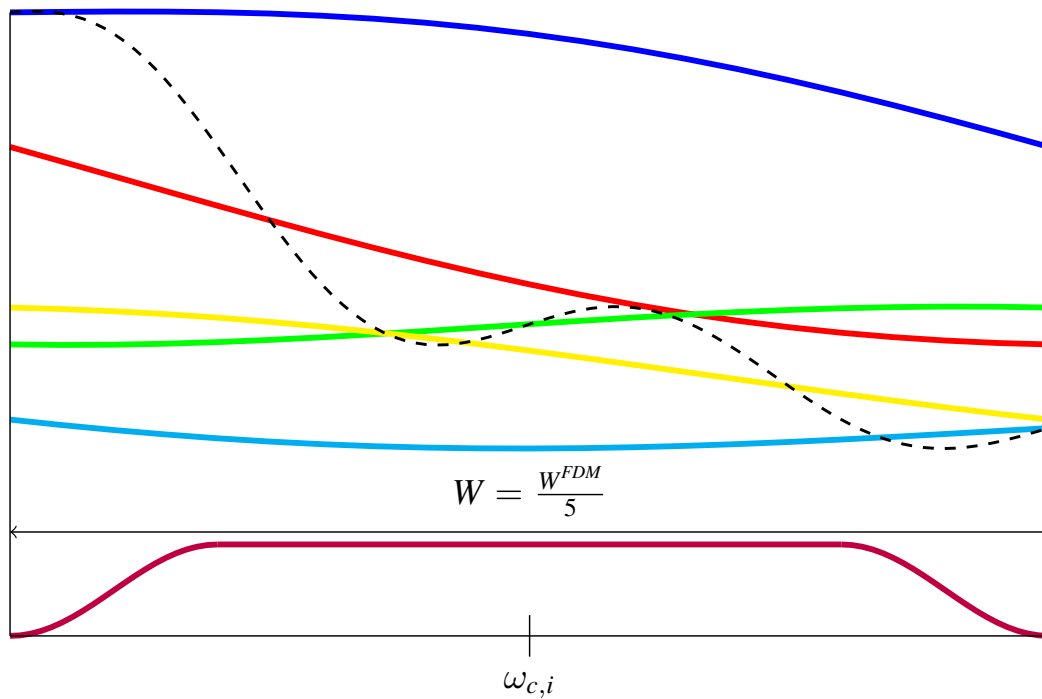
FDM - Distorsión del canal



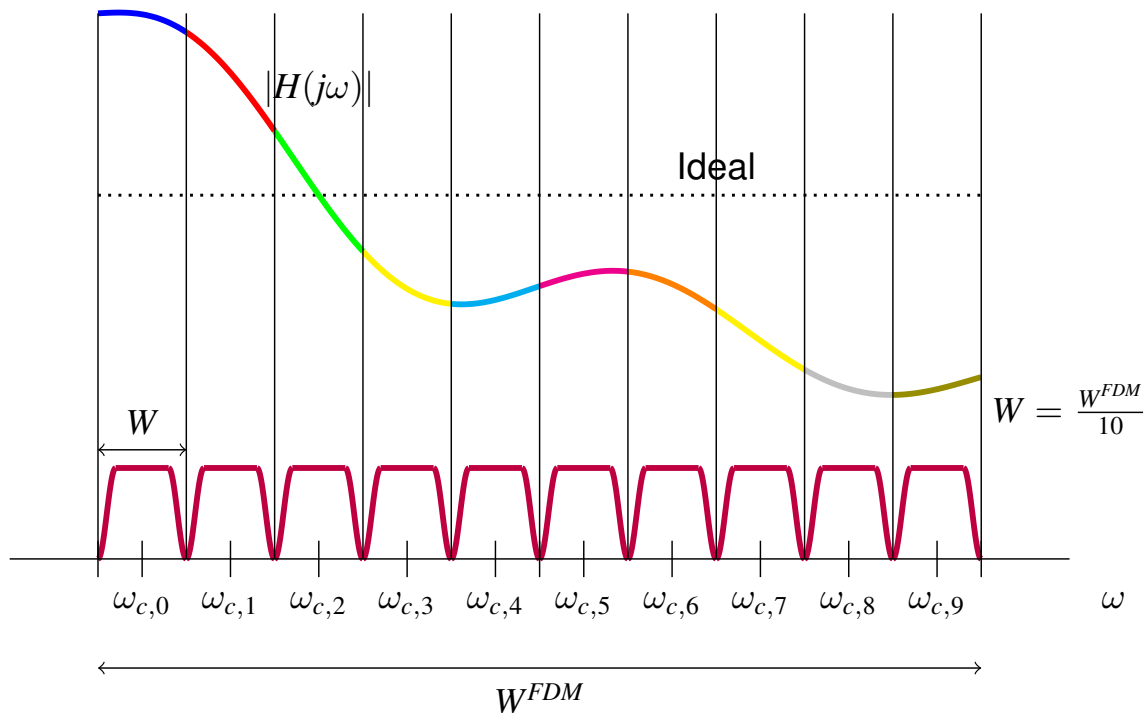
FDM - Distorsión del canal (II)



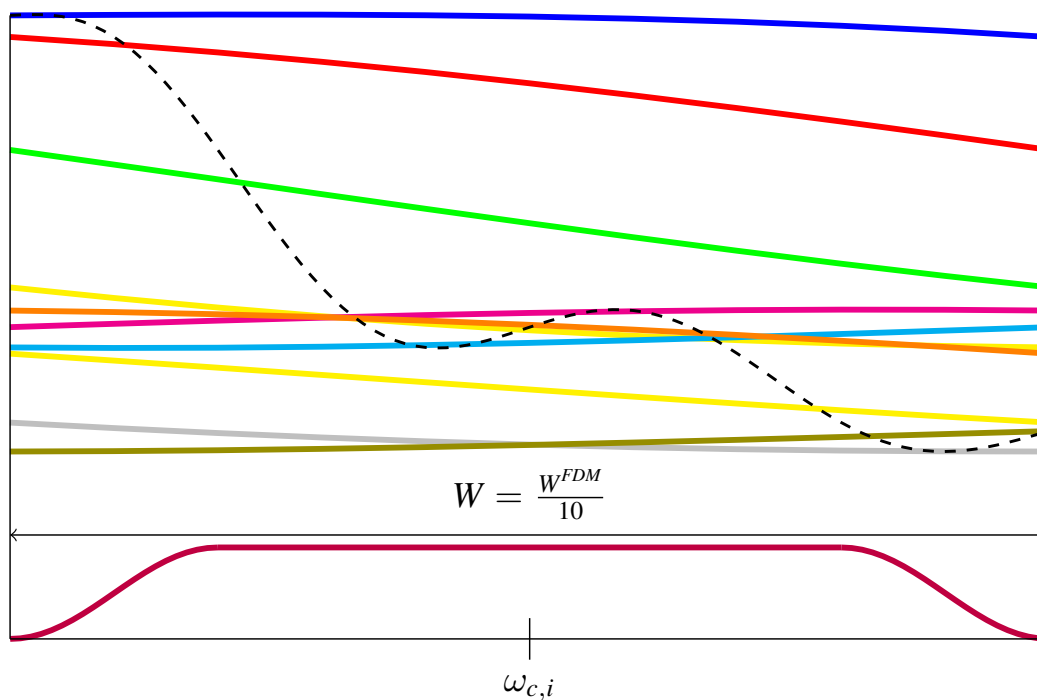
FDM - Distorsión del canal (III)



FDM - Distorsión del canal (IV)



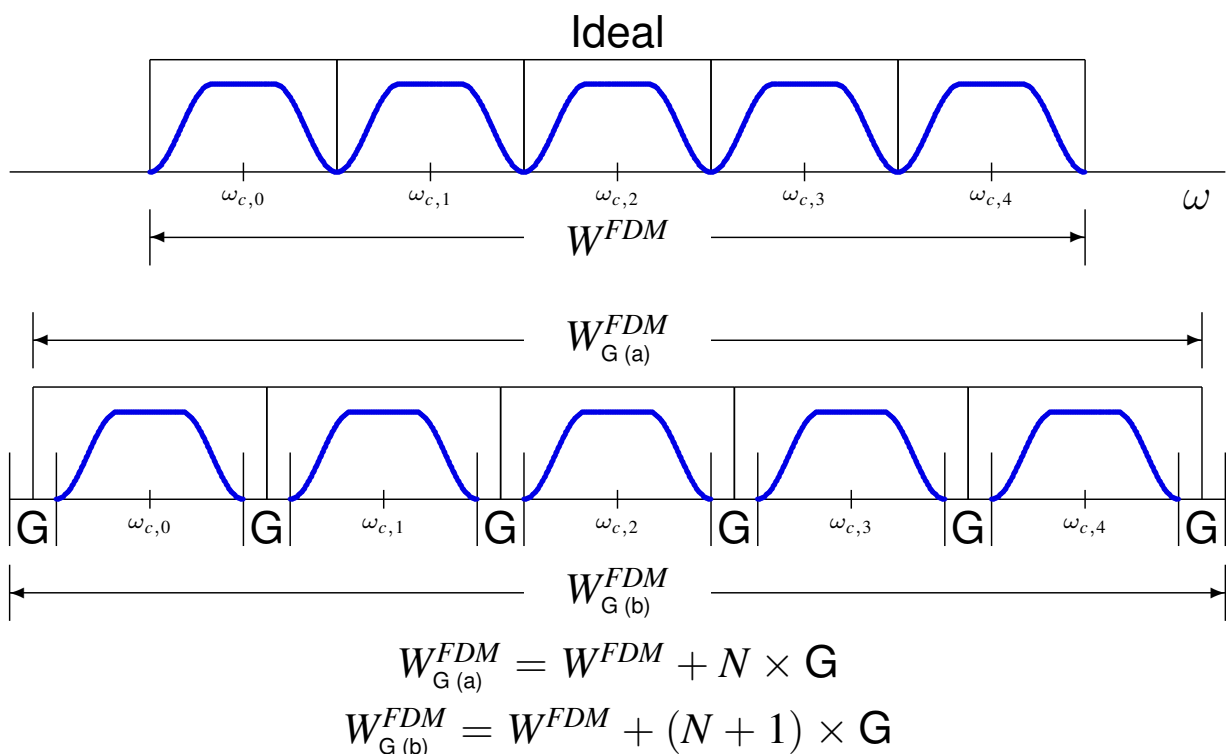
FDM - Distorsión del canal (V)



Inconvenientes solución FDM

- Complejidad hardware del sistema
 - ▶ N filtros transmisores (paso banda: componentes en fase y cuadratura)
 - ▶ N moduladores / demoduladores (paso banda)
 - ▶ N filtros complejos
 - ▶ N muestreadores síncronos (paso banda)
- Se necesitan filtros ideales para optimizar el uso del ancho de banda disponible
 - ▶ Sin filtros ideales, hay que introducir intervalos de guarda para separar los canales
 - ★ Pérdida de eficiencia espectral
- Solución alternativa:
 - ▶ Modulación FDM ortogonal (OFDM)
 - ★ N pulsos ortogonales (con solapamiento espectral)
 - ★ Uso eficiente del ancho de banda disponible
 - ★ Implementación eficiente: baja complejidad hardware

FDM - Bandas de guarda



NOTA: en algunos sistemas, las guardas en ambos extremos son de la mitad (a)

Modulación OFDM en tiempo continuo

- Señal modulada en términos de la señal compleja en banda base

$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{s(t) e^{j\omega_c t}\}$$

Notación habitual para señales moduladas paso banda

- Señal compleja en banda base

- ▶ Suma de N señales, una para cada secuencia de datos $A_k[n]$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_n A_k[n] \phi_k(t - nT)}_{s_k(t)}$$

Cada señal $s_k(t)$ es una señal PAM con filtro transmisor $\phi_k(t)$

- N pulsos: pulso prototipo $\times N$ diferentes portadoras

- ▶ Pulso $\phi_k(t)$: k períodos de una exponencial compleja normalizada en T seg.

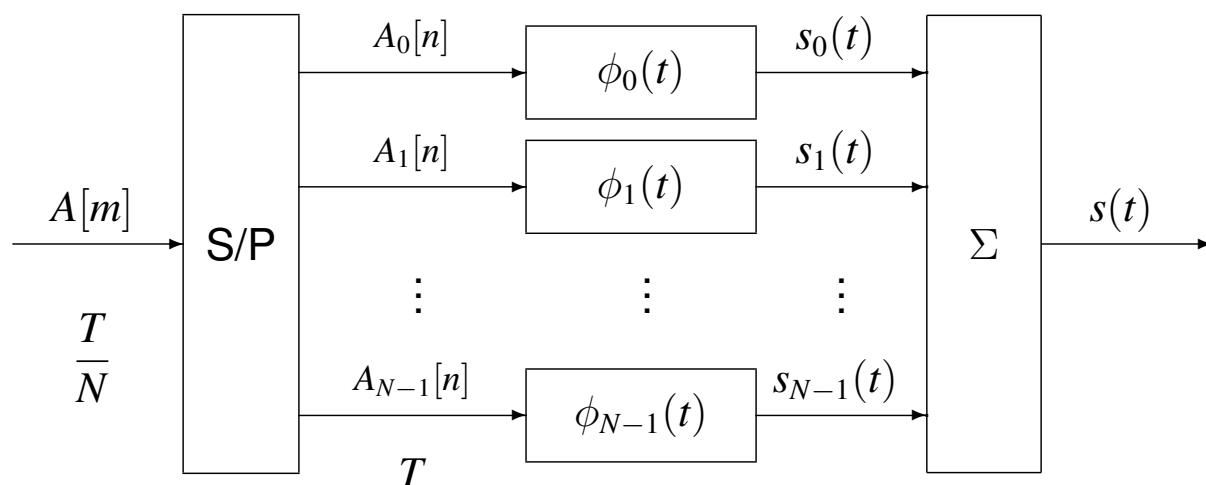
$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_T(t) e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$$

$w_T(t)$: ventana temporal causal de duración T segundos $w_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Modulador OFDM en tiempo continuo

- Conversión serie paralelo de secuencia de símbolos $A[m]$

- ▶ Secuencias $A_k[n]$, $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$
- ▶ Tiempo de símbolo de cada secuencia $A_k[n]$: T
- ▶ Tiempo de símbolo total (sobre $A[m]$): $\frac{T}{N}$



Ortonormalidad de los pulsos

- Los pulsos OFDM forman una base ortonormal
El producto escalar es

$$\begin{aligned}\langle \phi_k, \phi_\ell \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\frac{2\pi k}{T} t} e^{-j\frac{2\pi \ell}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T} t\right) dt + j\frac{1}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T} t\right) dt \\ &= \delta[k - \ell]\end{aligned}$$

- Relación de los pulsos con el pulso prototipo $\phi_0(t)$

$$\phi_k(t) = \phi_0(t) \times e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$$

$$\phi_k(t - nT) = \phi_0(t - nT) e^{j\frac{2\pi k}{T} (t - nT)} = \phi_0(t - nT) e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$$

Espectro de la OFDM en tiempo continuo

- Respuesta en frecuencia de los pulsos

$$|\Phi_k(j\omega)|^2 = T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{T}) T}{2\pi}\right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- $A_k[n]$ y $A_\ell[n]$ no están correladas y $A_k[n]$ es blanca $\forall k$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} |\Phi_k(j\omega)|^2$$

$E_{s,k}$: Energía media por símbolo de la constelación de la secuencia $A_k[n]$

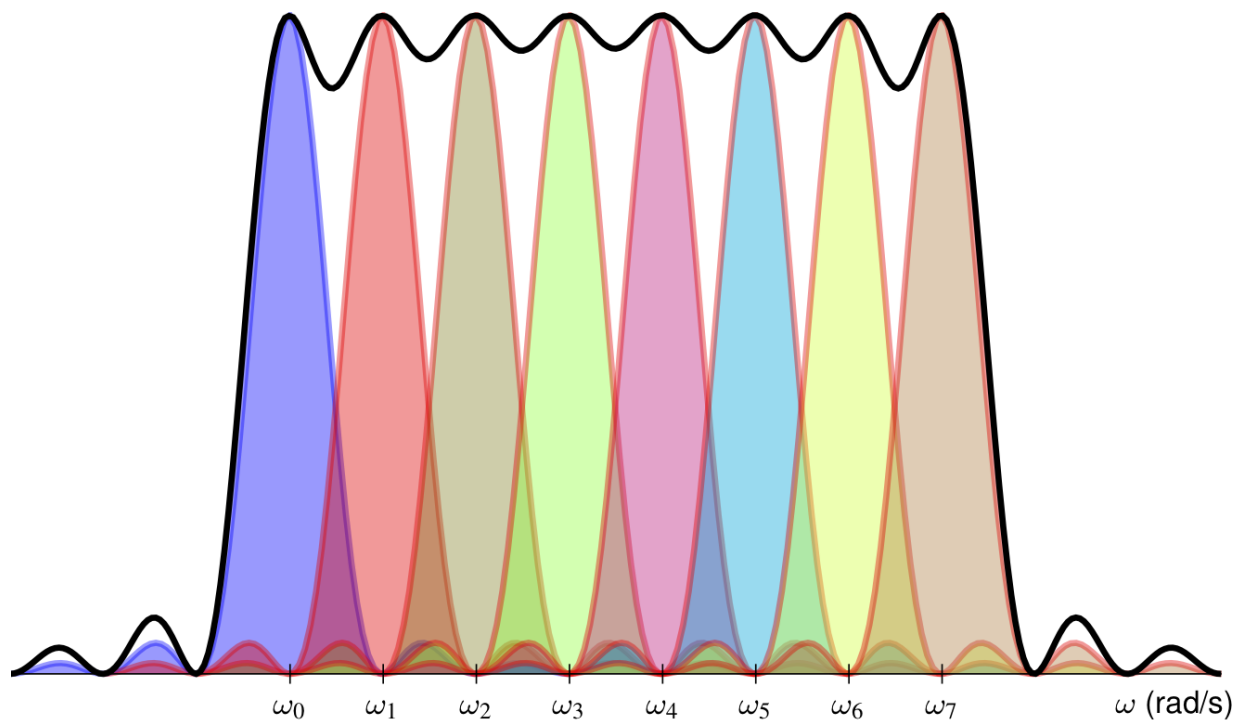
- Potencia de la señal transmitida

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k}$$

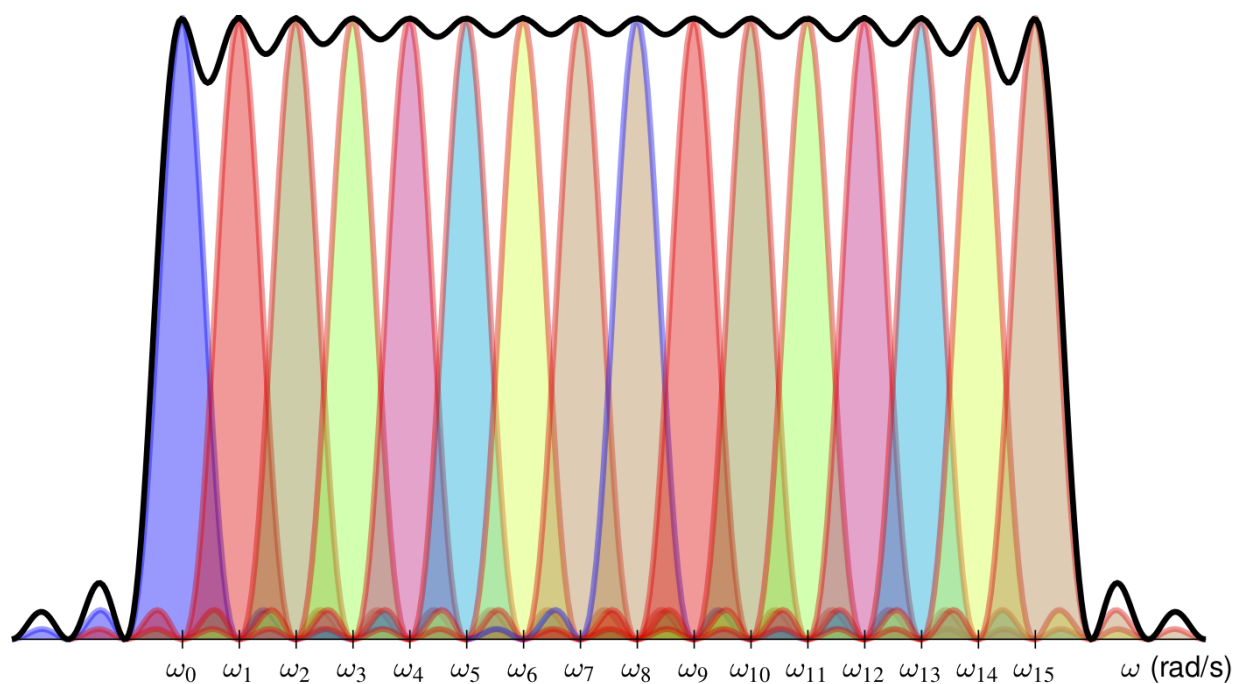
- Cuando las constelaciones de las N secuencias son idénticas

$$P_S = \frac{E_s}{T} \times N = E_s \times R_s \times N = E_s \times R_s^{TOTAL} \text{ Watts}$$

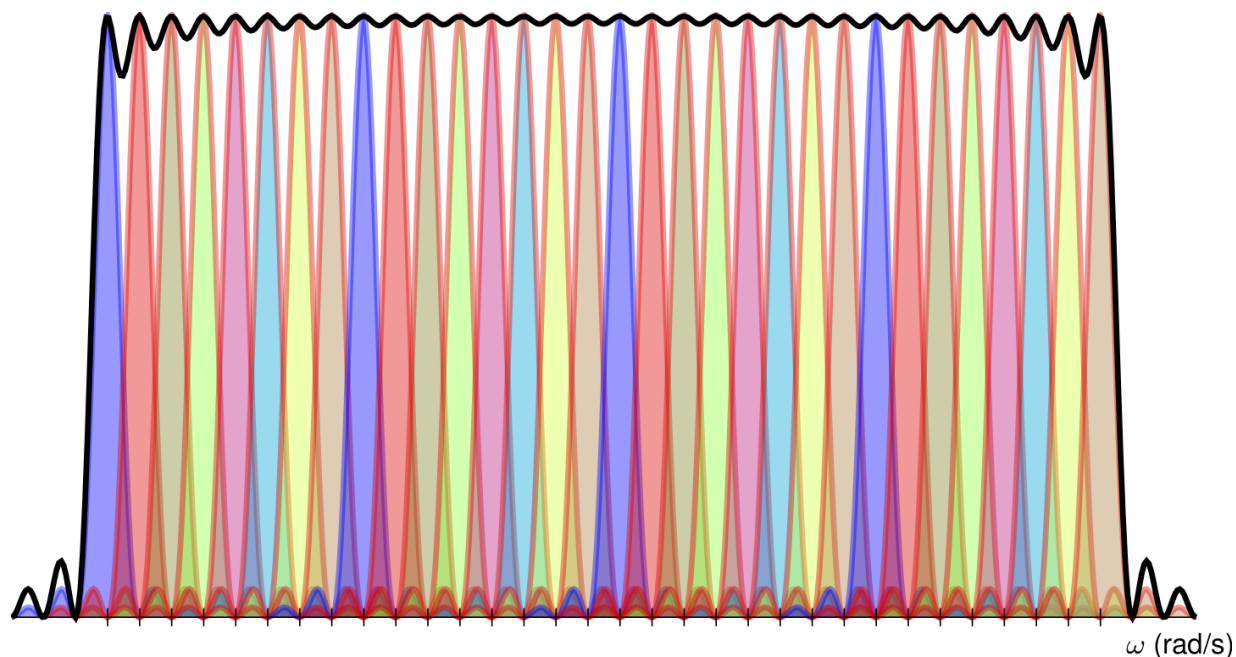
Espectro OFDM - N=8



Espectro OFDM - N=16



Espectro OFDM - N=32



Espectro asintóticamente plano

- Si se consideran infinitas portadoras y constelaciones idénticas

$$\begin{aligned} S_s(j\omega) &= E_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{T}) T}{2\pi} \right) \\ &= E_s \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \end{aligned}$$

- La densidad espectral de potencia es plana si se cumple

$$\frac{E_s}{T} (\phi_0(t) * \phi_0(-t)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = C \delta(t)$$

Modulación OFDM en tiempo discreto

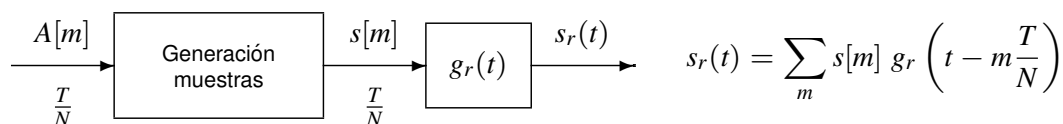
- Aproximación: se considera ancho de banda limitado
Ancho de banda aproximado es $W^{OFDM} = \frac{2\pi}{T} \times N$ rad./s
- Alternativa para la generación de la señal
 - ▶ Síntesis de muestras de la señal a la velocidad de muestreo dada por Nyquist
Con la aproximación, significa tomar muestras cada T/N s
 - ▶ Conversión Digital / Analógica (reconstrucción a T/N)
- Procedimiento de generación de la señal
 - ▶ Obtención de las muestras de la señal (generación *software*)
 - ★ Dependerán de los símbolos transmitidos

$$s[m] = s(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}} = s\left(m\frac{T}{N}\right)$$

- ▶ Reconstrucción de la señal (conversión D/A)

- ★ Filtro de reconstrucción ideal (interpolación con sincs a $\frac{T}{N}$)

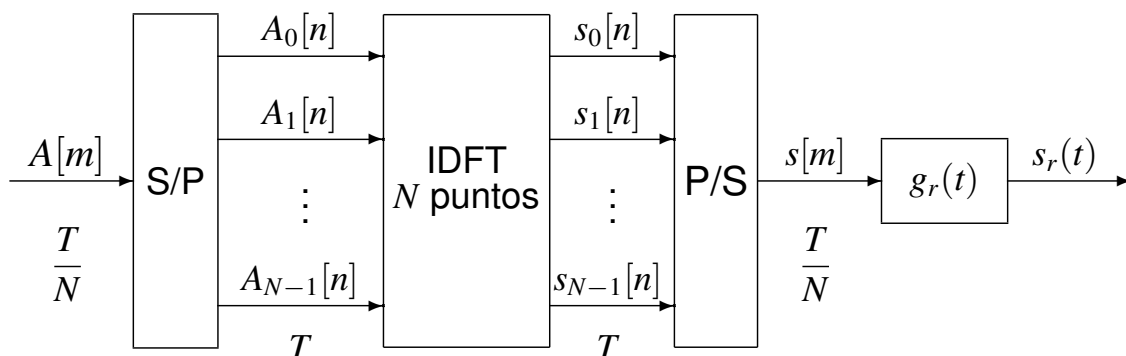
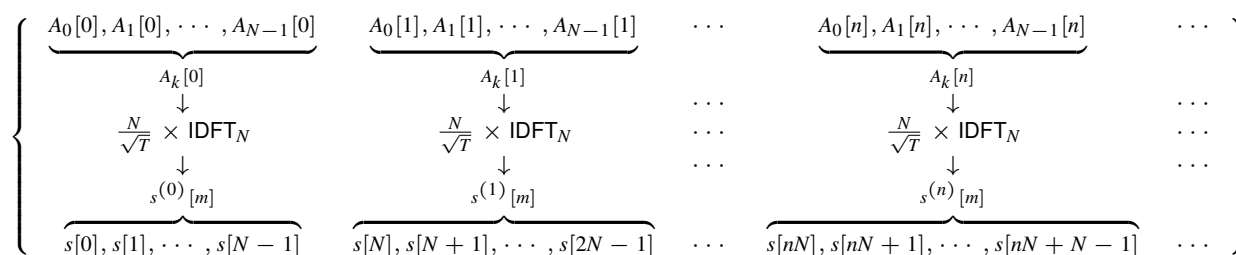
$$g_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{N}{T}t\right), \quad G_r(j\omega) = \frac{T}{N} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right)$$



NOTA: La señal reconstruida $s_r(t) \neq s(t)$ ($s_r(t)$ es una señal de ancho de banda $\frac{2\pi}{T} \times N$ rad/s)

Modulador OFDM en tiempo discreto

Generación de muestras



$$s_r(t) = \sum_m s[m] g_r(t - mT/N)$$

Ejemplo síntesis OFDM tiempo discreto: $N = 4$

- Secuencia de símbolos

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A[m]$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>L</i>

- Conversión Serie/Paralelo

n	0	1	2
$A_0[n]$	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>I</i>
$A_1[n]$	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>J</i>
$A_2[n]$	<i>C</i>	<i>G</i>	<i>K</i>
$A_3[n]$	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>L</i>

- Muestras OFDM

$$n = 0 : s^{(0)}[m] = \{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A, B, C, D\}$$

$$n = 1 : s^{(1)}[m] = \{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{E, F, G, H\}$$

$$n = 2 : s^{(2)}[m] = \{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{I, J, K, L\}$$

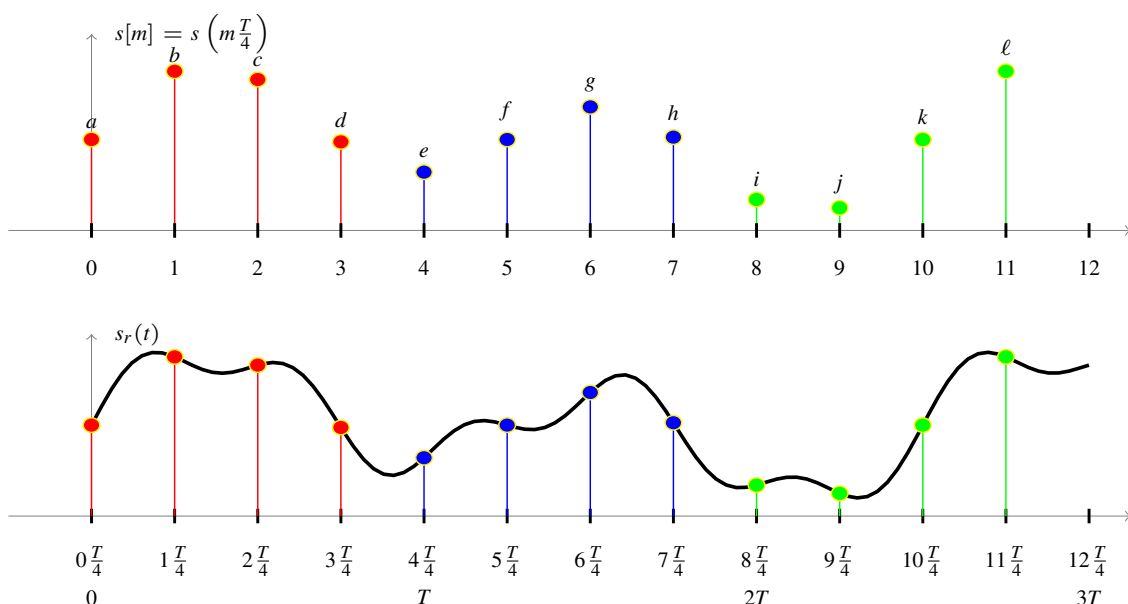
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s[m]$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>

Ejemplo síntesis OFDM tiempo discreto: $N = 4$

$$n = 0 : s^{(0)}[m] = \{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A, B, C, D\}$$

$$n = 1 : s^{(1)}[m] = \{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{E, F, G, H\}$$

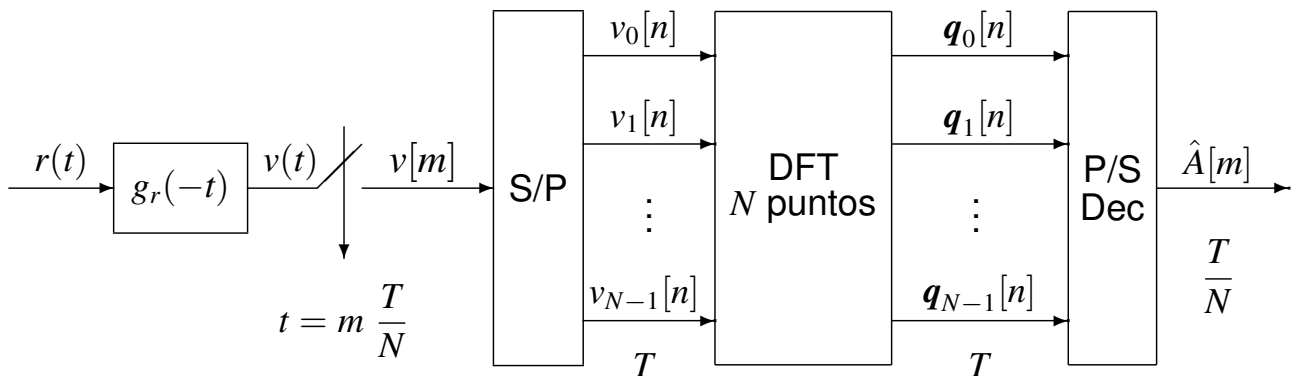
$$n = 2 : s^{(2)}[m] = \{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{I, J, K, L\}$$



Receptor para OFDM en tiempo discreto

Generación de observaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{v^{(0)}[m]}_{v[0], v[1], \dots, v[N-1]} \quad \underbrace{v^{(1)}[m]}_{v[N], v[N+1], \dots, v[2N-1]} \quad \dots \quad \underbrace{v^{(n)}[m]}_{v[nN], v[nN+1], \dots, v[nN+N-1]} \quad \dots \\ \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \quad \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \quad \dots \quad \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \quad \dots \\ \underbrace{q_0[0], q_1[0], \dots, q_{N-1}[0]}_{q_k[0]} \quad \underbrace{q_0[1], q_1[1], \dots, q_{N-1}[1]}_{q_k[1]} \quad \dots \quad \underbrace{q_0[n], q_1[n], \dots, q_{N-1}[n]}_{q_k[n]} \quad \dots \end{array} \right\}$$



Eliminación de ISI e ICI - Extensión cíclica

- ICI: Interferencia entre portadoras ($A_k[n]$ puede interferir en $A_i[n]$)
- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
 - ▶ Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Con una extensión cíclica de las muestras, incluyendo un prefijo cíclico de C muestras, tal que $C \geq K_d$, los canales son

$$p_{k,i}[n] = \frac{N}{T} \delta[n] \delta[k - i] D[k]$$

- ISI e ICI son completamente eliminadas
- Observación para la portadora de índice k , $q_k[n]$, es ahora

$$q_k[n] = \frac{N}{T} A_k[n] D[k] + z_k[n]$$

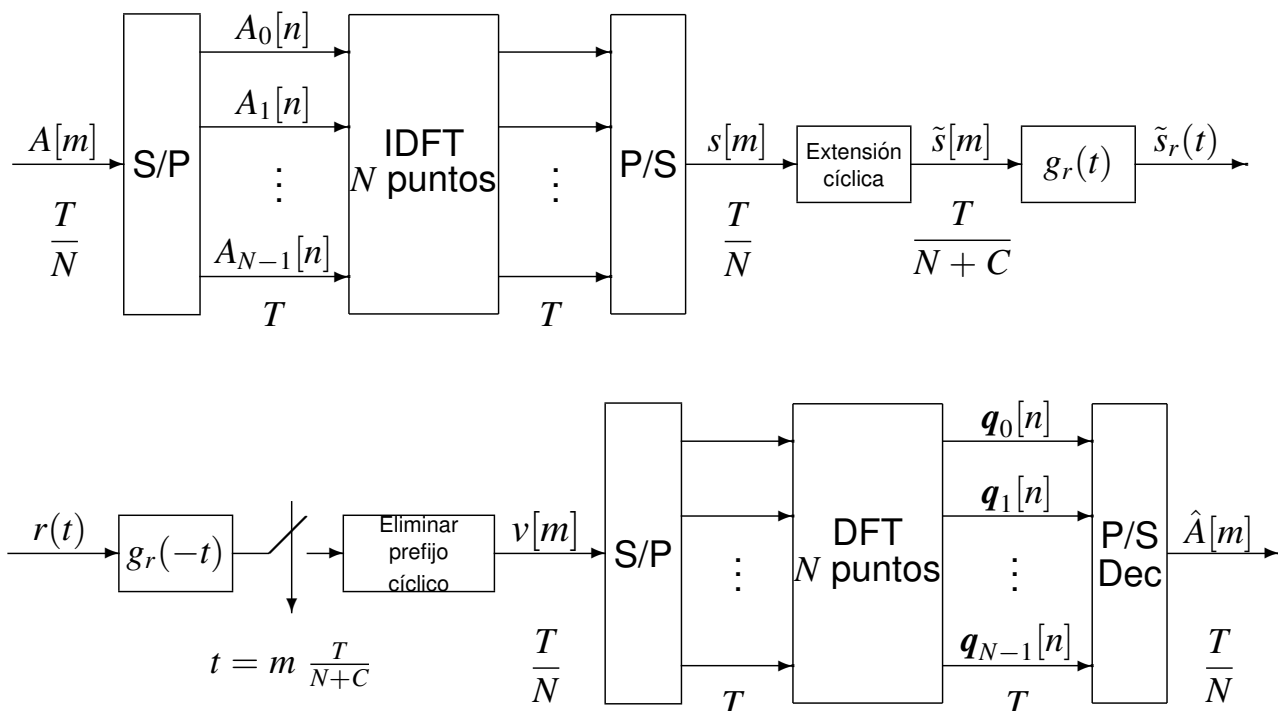
$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[m]$

- ▶ Diferente relación señal a ruido en cada portadora (factor de ganancia $D[k]$)

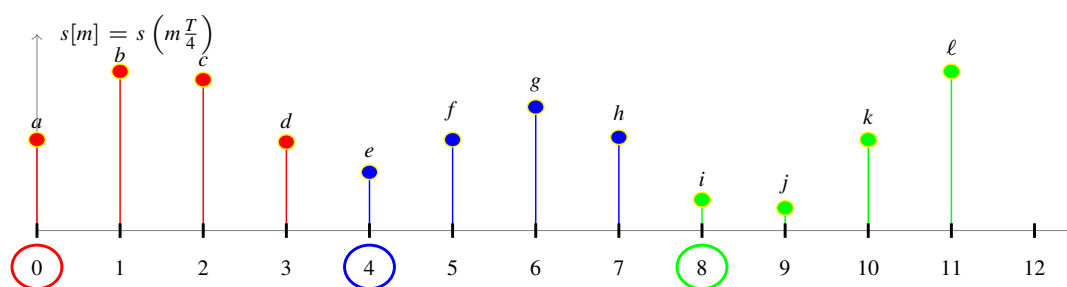
NOTA: con la extensión, se transmitirán $N + C$ muestras cada T segundos, por lo que la nueva definición del canal discreto equivalente $d[m]$ será

$$d[m] = d(t) \Big|_{t=m \frac{T}{N+C}}, \quad d(t) = g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)$$

Modulador/demodulador OFDM con prefijo cíclico



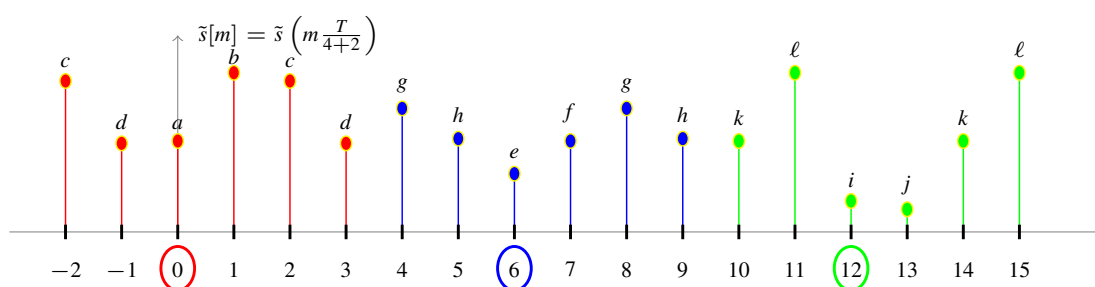
Prefijo cíclico: $N = 4, C = 2$



$$\{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\}$$

$$\{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\}$$

$$\{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\}$$



Eficiencia espectral de OFDM con prefijo cíclico

- Señal OFDM se construye a partir de muestras: filtro rector $g_r(t)$

$$s_r(t) = \sum_m s[m] g_r(t - mT_s), \text{ con } g_r(t) = \text{sinc} \left(\frac{N}{T_s} t \right)$$

T_s : tiempo asociado a la secuencia de muestras $s[m]$

- ▶ Ancho de banda de la señal modulada paso banda $x(t)$ es

$$W = \frac{2\pi}{T_s} \text{ rad/s}, B = \frac{1}{T_s} \text{ Hz}$$

- OFDM sin prefijo cíclico

- ▶ En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N}$

$$W = \frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad/s}, B = R_s \times N \text{ Hz}$$

- OFDM con prefijo cíclico

- ▶ En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N+C}$

$$W = \frac{2\pi}{T} \times (N + C) \text{ rad/s}, B = R_s \times (N + C) \text{ Hz}$$

- Eficiencia de OFDM utilizando un prefijo cíclico de longitud C

$$\eta = \frac{N}{N + C}$$

Relación señal a ruido en cada portadora

- Observaciones a tiempo de símbolo

$$q_i[n] = \frac{N}{T} D[i] A_i[n] + z_i[n]$$

- Relación señal a ruido en cada portadora

$$\left. \frac{S}{N} \right|_i = \frac{\mathcal{E} \left\{ \frac{N}{T} D[i] A_i[n] \right\}}{\mathcal{E} \{ z_i[n] \}} = \frac{E \left[\left| \frac{N}{T} D[i] A_i[n] \right|^2 \right]}{E \left[|z_i[n]|^2 \right]} = \frac{\left| \frac{N}{T} D[i] \right|^2 E_{s,i}}{\sigma_z^2}$$

- ▶ Relación $\left. \frac{S}{N} \right|_i$ proporcional a $|D[i]|^2$
- ▶ Las prestaciones serán diferentes para cada portadora
 - ★ Cuanto mayor el valor de $|D[i]|$, mejor serán las prestaciones de la portadora de índice i
- ▶ Distancia mínima entre los puntos de la constelación (escalado)

$$d_{min}^{(i)} = d_{min} \left| \frac{N}{T} D[i] \right|$$

$$P_e^{(i)} \approx k Q \left(\frac{d_{min}^{(i)}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$