Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **17/09/03**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Describa y discuta los diferentes métodos que conozca de entrenamiento de redes de funciones radiales de base (RBFs).

(20 min; 1 p)

T2.- Se desea estimar cierta función s(x) a partir de una colección de observaciones $\{x^{(k)}, s^{(k)}, k=1,...,K\}$. Discuta las ventajas e inconvenientes de utilizar para ello un estimador lineal frente a una red no lineal tipo perceptrón multicapa

---

(20 min; 1 p)

T3.- ¿Qué es un estadístico suficiente?

En una población con función de densidad $p(x|s) = s^2\ x\ e^{-sx}\ u(x)$**,** búsquese un estadístico suficiente para s si se dispone de K valores de x tomados de modo independiente.

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 2h. Puntos: 5/8)

P1.- El método de los momentos para estimar variables deterministas **s** a partir de observaciones **x**(**s**) consiste en obtener las estimaciones a partir de igualar la media y los consecutivos momentos (centrales, típicamente) calculados analíticamente a a sus estimaciones muestrales. Resulta ventajoso cuando la estimación ML conduce a ecuaciones acopladas de difícil solución.

a) Considérese la ddp B(p,q)

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B_I(p,q)} & , \quad 0 \le x \le 1 \quad (p,q > 0) \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $B_I(p,q)$ es la función β integral

$$B_I(p,q) = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy$$

Compruébese que la estimación ML de p y q a partir de la observación de K muestras {x(k)} tomadas independientemente, conduce a ecuaciones acopladas de solución no inmediata.
(Nótese que los parámetros p y q no son la media ni la varianza de x)

b) Previo cálculo de la media y la varianza de p(x), determínense los estimadores $\hat{p}_{mt}$ y $\hat{q}_{mt}$ utilizando el método de los momentos (sobre **x** y **v**).

(Recuérdese: $B_I(p+1,q) = \dfrac{p}{p+q} B_I(p,q)$)

(60 min; 2.5 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **17/09/03**
UCIIIM

P2.- Considere el problema de decisión binaria

H_1: $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$
H_0: $\mathbf{x} = \mathbf{n}$

donde **s** y **n** son variables bidimensionales estadísticamente independientes, siendo $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ con probabilidad ½ y $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con la misma probabilidad, y $p(\mathbf{n}) = G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v\mathbf{I}\right)$. Considere, además, $P(H_1) = 2\,P(H_0)$.

a) Determine una ecuación para la frontera del decisor MAP.

b) Demuestre que, para valores de v próximos a 0, la regla de decisión se aproxima a

$$\max\{x_1, x_2\} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \lambda$$

para cierto valor de λ. Determine, asimismo, cuál es ese valor.
Indicación: si le resulta conveniente, puede utilizar la aproximación

$$\log(\exp(\alpha a) + \exp(\alpha b)) \approx \max\{\alpha a, \alpha b\}$$

que es válida para valores grandes de α

c) Determine la probabilidad de falsa alarma del decisor obtenido en el apartado b). Exprese el resultado en términos de la función de error complementario:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

d) Considere la familia de reglas de decisión de la forma

$$x_1 + x_2 \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \lambda'$$

Determine el valor de λ' de mínima probabilidad de error para esa familia.
Indicación: observe que $z = x_1 + x_2$ es Gaussiana tanto bajo hipótesis H_0 como bajo hipótesis H_1.

(60 min; 2.5 p)