TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

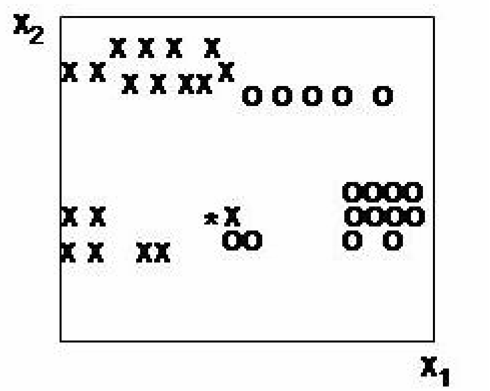
T1.- El algoritmo de estimación de densidad de probabilidad de los k vecinos más próximos (k-NN) puede ser utilizado para estimación de probabilidades a posteriori, siendo por tanto aplicable a tareas de clasificación.

a) A partir de la expresión no-paramétrica de la densidad de probabilidad, pruebe que la expresión para la estimación de la probabilidad a posteriori es:

$$\hat{\Pr}\left(C_c|x\right) = \frac{k_c}{k}$$

donde k_c es el número de muestras pertenecientes a la clase c y k es el número de vecinos considerado.

b) Determine el resultado de la clasificación por k-NN de la muestra de prueba de la figura, para k = 1, 3 y 5. Considerando que la muestra de prueba en verdad pertenece a la clase 1, ¿qué conclusiones se puede sacar de la variación del resultado con k en este caso?



Clase 0: **x,** Clase 1: **o,** Muestra de prueba: *****

(20 min; 1p)

T2.- Una v.a. s toma valores positivos. Para estimarla por vía bayesiana, se aplica una función de coste de la forma

$$C(s,\hat{s}) = a\left|s-\hat{s}\right|^{k}, \quad k > 0$$

¿Qué condiciones han de cumplir a y k para que $\hat{s} = \hat{s}_{ms}$?

(20 min; 1 p)

T3.- Considere la siguiente función no lineal:

$$f_{\alpha}(z) = \mathrm{sign}(z)\left|z\right|^{\alpha}; \quad \alpha > 0$$

a) Dibuje $f_{\alpha}(z)$ para 3 valores de α que den lugar a 3 curvas cualitativamente distintas.
b) Obtenga la expresión de un perceptrón con dos variables de entrada, una capa oculta de 4 neuronas y una salida, que utilice $f_{\alpha}(z)$ como función de activación.
c) Derive el algoritmo de actualización de cada uno de los pesos de la red expresada en b) según descenso de máxima pendiente y asumiendo coste cuadrático. Obtenga también una expresión para el ajuste del parámetro α de cada neurona.

(20 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **18/06/05**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Se desea clasificar objetos que pertenecen a una de dos clases, H_0 y H_1, mediante la consideración de dos de sus dimensiones, x_1 y x_2, estadísticamente independientes entre sí y cuyas verosimilitudes son

$$p(x_1 \mid H_0) = \begin{cases} 1 - x_1/2, & 0 < x_1 < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad p(x_1 \mid H_1) = \begin{cases} x_1/2, & 0 < x_1 < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x_2 \mid H_0) = \begin{cases} 1, & 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad p(x_2 \mid H_1) = \begin{cases} 1, & 1 < x_2 < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las clases son equiprobables y los costes de ambos tipos de errores de clasificación son unitarios. De otro lado, el coste de medir x_1 es despreciable, pero el de medir x_2 es C_M.

a) Determínese el coste medio C_B resultante de aplicar el clasificador bayesiano sobre x_1, x_2.

b) Con objeto de reducir el coste medio anterior, se considera la alternativa de aplicar un procedimiento de clasificación secuencial: clasificar según x_1 si la decisión es suficientemente clara y, caso contrario, medir x_2 y clasificar considerando ambas. Concretamente, dada la simetría en torno al umbral de decisión de las verosimilitudes de x_1, se detiene el proceso en el primer paso si x_1 se aleja de dicho umbral un valor mayor que γ ($0< \gamma <1$).

  b1) Determínese el umbral de decisión para el primer paso.
  b2) Calcúlese la probabilidad de que se tome una decisión en un solo paso, Pr(1).
  b3) Considerando la probabilidad anterior y los costes medios correspondientes a decidir en un paso y a decidir en dos, calcúlese el coste medio de la clasificación secuencial, C_S.
  b4) Discútase la mejor elección del parámetro γ, ¿Hay alguna limitación sobre el valor de C_M?

(75 min; 2.5 p)

P2.- Considere la va x dada por

$$x = s\,t$$

siendo s y t variables aleatorias independientes con distribuciones

$$p_s(s) = (m+1)s^m \qquad 0 \le s \le 1$$
$$p_t(t) = 1 \qquad 0 \le t \le 1$$

siendo $m \ge 0$.

1. Determine p(x)
2. Determine el estimador MMSE de s a la vista de x, $\hat{s}_{ms}$
3. Determine el estimador MAP de s a la vista de x, $\hat{s}_{map}$
4. Determine el sesgo del estimador MAP.

(Observe que, en algunas expresiones deberá considerar separadamente los casos m=0 y m>0)

(60 min; 2.5 p)