Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **14/09/05**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se desea estimar una v.a. s a partir de otra x, siendo la relación entre ambas:

$$x = s + n_1 + n_2$$

con $s : G(0, v_s)$ y $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} : G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$, y siendo n_1 y n_2 independientes de la variable que se desea estimar.

a) Determine el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x.

b) ¿Existe un estimador no lineal que supere en prestaciones al anterior? (Razone su respuesta)

(20 min; 1p)

T2.- Se desea estimar una v.a. s mediante una combinación convexa de estimadores lineales:

$$\hat{s} = \lambda \hat{s}_1 + (1-\lambda)\hat{s}_2$$

siendo $\hat{s}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$, y λ un parámetro de mezcla comprendido entre 0 y 1, y relacionado biunívocamente con una variable a de tipo real mediante:

$$\lambda = \mathrm{sgm}(a) = \frac{1}{1+\exp(-a)}$$

a) Obtenga la regla de actualización mediante descenso por gradiente estocástico (i.e., muestra a muestra) de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, si ambos vectores se modifican con el objetivo de minimizar los costes $C_1 = (s - \hat{s}_1)^2$ y $C_2 = |s - \hat{s}_2|$, respectivamente.

b) Obtenga la regla de actualización mediante descenso por gradiente estocástico del parámetro a, considerando que dicha variable se actualiza con el objetivo de minimizar $C = (s - \hat{s})^2$.

(20 min; 1 p)

T3.- Algunos algoritmos de agrupamiento se basan en la minimización de la función de distorsión cuadrática dada por

$$\sum_{j=1}^{G} \sum_{\mathbf{x}^{(k)} \in G_j} \left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{m}_j \right\|_2^2$$

siendo G el número de grupos, G_j el conjunto de muestras del grupo j-ésimo, $\mathbf{m}_j$ el centro del grupo j y $\mathbf{x}^{(k)}$ la muestra k-ésima del conjunto de datos.

a) ¿Sería posible optimizar esta función de coste por aplicación directa de un método de gradiente?
b) ¿Sería posible utilizar esta misma función de distorsión para determinar el número de grupos?

(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considere el problema de decisión binaria dado por hipótesis equiprobables, siendo

$$P(x \mid H_0) = (n_0 + 1)(1 - x)^{n_0} \qquad 0 \le x \le 1$$
$$P(x \mid H_1) = (n_1 + 1)x^{n_1} \qquad 0 \le x \le 1$$

siendo n_0 y n_1 números enteros no negativos. Considere los costes $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{01} = 1$, $c_{10} = c > 0$.

a) Observando la forma de las verosimilitudes de las hipótesis, demuestre que el decisor óptimo (de mínimo coste medio) tiene la forma

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta$$

para algún valor de η.

b) Determine la relación entre el umbral η y el coste c para el caso $n_0 = n_1 = n$

c) Determine la curva característica de operación (P_D vs. P_{FA}) como función del parámetro c, también para el caso para el caso $n_0 = n_1 = n$, y represente gráficamente, de forma aproximada, los casos n=1 y n=2. Discuta la influencia del parámetro n.

d) Determine el decisor que maximiza la diferencia P_D-P_{FA}.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Considere una v.a. x con distribución de probabilidad dada por:

$$p(x \mid R) = \frac{2x}{R} \exp\left(-\frac{x^2}{R} \right) u(x), \quad R > 0$$

de la que se hacen K observaciones independientes, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{K}$.

a) Determine el estimador de máxima verosimilitud de R, $\hat{R}_{ML}$.

Para el estimador obtenido en a):

b) Determine su sesgo

c) Discuta su consistencia.

d) Utilizando la cota de Cramer-Rao, discuta su eficiencia.

(75 min; 2.5 p)