Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **26/01/07**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 70 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Supóngase que la ddp conjunta de las vv.aa. s y $\underline{x}$, p(s,$\underline{x}$), es una mezcla de L ddps conjuntas $\{p_\ell(s,\underline{x})\}_{\ell=1}^{L}$; es decir

$$p(s,\underline{x}) = \sum_{\ell=1}^{L} \pi_\ell p_\ell(s,\underline{x})$$

donde $\{\pi_1\}_{\ell=1}^{L}$ son los coeficientes de mezcla (tales que $\{\pi_\ell\}>0 \ \forall \ell$ y $\sum_{\ell=1}^{L}\pi_\ell = 1$). Demuéstrese que el estimador de error cuadrático medio mínimo de s a la vista de $\underline{x}$, $\hat{s}_{MMS}(\underline{x})$, tiene la forma

$$\hat{s}_{MMS}(\underline{x}) = \sum_{\ell=1}^{L} g_\ell(\underline{x})\hat{s}_{MMS,\ell}(\underline{x}),$$

siendo

$$g_\ell(\underline{x}) = \frac{\pi_\ell p_\ell(\underline{x})}{\sum_{\ell'=1}^{L}\pi_{\ell'} p_{\ell'}(\underline{x})}, \quad 1\leq \ell \leq L$$

(donde $\{p_\ell(\underline{x})\}_{\ell=1}^{L}$ son las ddp marginales de $\{p_\ell(s,\underline{x})\}_{\ell=1}^{L}$ respecto a s

$$p_\ell(\underline{x}) = \int p_\ell(s,\underline{x})ds, \quad 1\leq \ell \leq L \ )$$

y

$$\hat{s}_{MMS,\ell}(\underline{x}) = E_\ell\{s|\underline{x}\} = \int s p_\ell(s|\underline{x})ds, \quad 1\leq \ell \leq L$$

(25 min; 1 p)

T2.- Se quiere estimar el parámetro s de una distribución uniforme

$$p(x)=U_{\{0,s\}}(x)=\begin{cases} 1/s & , 0<x<s \\ 0 & , \text{caso contrario} \end{cases}$$

a partir de una única observación de la misma, $x^{(1)}$.

a) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud, $\hat{s}_{ML}$.

b) Calcúlese el estimador lineal $\hat{s}=\hat{w}x$ de mínimo error cuadrático medio ($E\{(\hat{s}\text{-}s)^2 \mid s\}$).

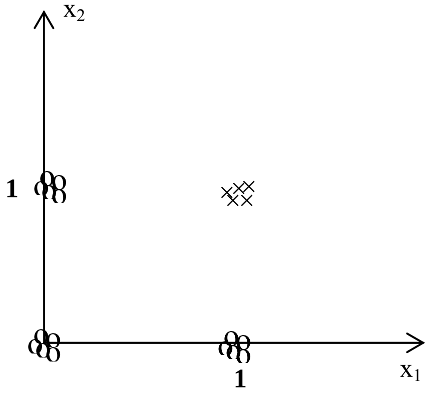
c) Compárense los sesgos y varianzas de ambos estimadores.

(25 min; 1p)

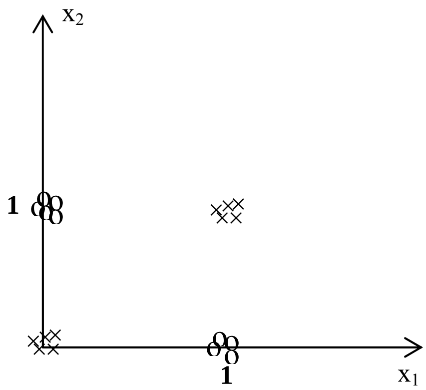
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **26/01/07**
UCIIIM

T3.- Los perceptrones monocapa "duros" pueden asociarse en capas para ofrecer regiones de decisión más generales.

a) Determínese una arquitectura y unos pesos que proporcionen una frontera separadora en el problema de clasificación dado por los datos de la figura (donde "o" son los datos de la clase 0, y "×" los datos de la clase 1).



b) Repita el apartado a) para los datos de la siguiente figura.



(20 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 150 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Sea $\hat{s}$ un estimador de punto estadísticamente creciente de un parámetro determinista s; es decir, si $s_2 > s_1$ son dos valores de s, se verifica que $\Pr\{(\hat{s}>\hat{s}_1)|s_2\} > \Pr\{(\hat{s}>\hat{s}_1)|s_1\}$, donde $\hat{s}_1$ es cualquier valor de $\hat{s}$.

El estimador de intervalo (del parámetro determinista s) asociado a dicho estimador de punto es el par ordenado de valores $\{s_a, s_b\}$ correspondientes a un valor estimado $\hat{s}_0$ (que se obtendría a partir de una observación $\underline{x}_0$) que minimiza s_b-s_a, anchura del intervalo $[s_a, s_b]$, cumpliendo la condición

$$\Pr\{(\hat{s}<\hat{s}_0)|s_a \cap (\hat{s}>\hat{s}_0)|s_b\}=1-\delta$$

siendo δ (δ<<1) el nivel de confianza (1-δ, el coeficiente de confianza) del estimador de intervalo; nivel que se preselecciona para realizar los cálculos.

a) Compruébese que la condición citada equivale a
$$\Pr\{(\hat{s}>\hat{s}_0)|s_a\}+\Pr\{(\hat{s}<\hat{s}_0)|s_b\}=\delta$$

b) Suponiendo que $\Pr\{(\hat{s}>\hat{s}_0)|s_a\}=\delta_1$ ($<\delta$), compruébese que para $s_1 < s_a$ se verifica $\Pr\{(\hat{s}>\hat{s}_0)|s_1\} < \delta_1$; de modo que resulta muy improbable que si el parámetro s toma el valor s_1 se obtenga el valor $\hat{s}_0$ para el estimador de punto. Análogamente ocurre para $s_2 > s_b$.

c) En la práctica, y salvo que conduzca a resultados que vulneren claramente la minimización de la anchura del intervalo de confianza, se acepta el resultado de aplicar separadamente
$$\Pr\{(\hat{s}>\hat{s}_0)|s_a\} < \delta/2$$
$$\Pr\{(\hat{s}<\hat{s}_0)|s_b\} < \delta/2$$
que proporciona, en general, prestaciones (levemente) subóptimas. Mediante la introducción de la v.a. normalizada
$$z=\frac{\hat{s}-E\{\hat{s}|s\}}{V\{\hat{s}|s\}}$$
donde $E\{\hat{s}|s\}$ y $V\{\hat{s}|s\}$ son la media y la varianza de $\hat{s}$ dado s, respectivamente (que se suponen no relacionadas entre sí), que se admiten conocidas, y la utilización de los percentiles de z[1], verifíquese que las ecuaciones implícitas para determinar s_a y s_b son

[1] El percentil y_ε de una v.a. y se define mediante

$$\hat{s}_0 = E\left\{\hat{s}|s_a\right\} + \sqrt{V\left\{\hat{s}|s_a\right\}}\ z_{1-\delta/2}$$

$$\hat{s}_0 = E\left\{\hat{s}|s_b\right\} + \sqrt{V\left\{\hat{s}|s_b\right\}}\ z_{\delta/2}$$

d) Determínese el estimador de intervalo $\{m_a, m_b\}$ con nivel de confianza δ (dado) de la media m de una v.a. x de varianza conocida v (no relacionada con m) asociado a la media muestral $\bar{x}$ calculada a partir de K observaciones de x, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, tomadas independientemente, siendo K suficientemente alto como para considerar que $\bar{x}$ tiene un comportamiento gaussiano.

(75 min; 2.5 p)

$$\int_{-\infty}^{y_\varepsilon} p(y)dy = \varepsilon\,;$$

obviamente, $y_\varepsilon = P^{-1}(\varepsilon)$, siendo $P(y)$ la función de distribución de y; es decir, y_ε es aquel valor tal que la v.a. y permanece por debajo de él con una probabilidad ε.

P2.- Considérese el problema de decisión binaria especificado por los costes C_{00}= C_{11}=0, C_{01}= C_{10}=1, y

$$p(x|H_0)=\lambda_0 \exp(-\lambda_0 x) \quad x \geq 0$$
$$p(x|H_1)=\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) \quad x \geq 0$$

siendo $\lambda_0 = 2\lambda_1$.

a) Diséñese el decisor de mínimo coste medio suponiendo $Pr(H_1)=1/2$.

b) Determínense las probabilidades P_{FA} y P_M del decisor obtenido en a).

c) Suponiendo que el verdadero valor de $Pr(H_1)$ es P>0, represente gráficamente el coste medio del detector obtenido en a) en función de P.

d) Se aplica la decisión anterior a dos observaciones independientes. Determínese la probabilidad de cometer exactamente 0, 1 y 2 errores, en función de P.

e) Supóngase que el coste total asociado a las dos decisiones no es la suma de los costes de cada decisión, sino que

- El coste de acertar en ambas decisiones es 0.
- El coste de cometer un solo error es 1.
- El coste de cometer 2 errores es C=18.

Represéntese gráficamente el valor medio del coste total en función de P.

(75 min; 2.5 p)