TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 70 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se desea estimar un vector aleatorio **s** a partir de un vector de observaciones **x** relacionado con él:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\,\mathbf{s} + \mathbf{r}$$

donde **H** es una matriz conocida, **r** es un vector de ruido con distribución $G(\mathbf{0}, v_r\mathbf{I})$, y **s** es el vector aleatorio a estimar, cuya distribución es $G(E\{\mathbf{s}\}, \mathbf{V}_s)$.

Sabiendo que **s** y **r** son vectores aleatorios independientes:

a) Calcúlese el estimador ML de **s**, $\hat{\mathbf{s}}_{ml}$.

b) Determínese si dicho estimador es sesgado o no. Justifique su respuesta.

c) Según se sabe, el estimador MSE de **s** viene dado por la expresión:

$$\hat{\mathbf{s}}_{mse} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + v_r\,\mathbf{V}_s^{-1})^{-1}\,\mathbf{H}^T\,\mathbf{x}$$

Calcúlese el sesgo de $\hat{\mathbf{s}}_{mse}$ e indíquese en qué condiciones dicho sesgo tiende a 0.

(25 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **19/09/07**
UCIIIM

T2.- Las siguientes expresiones:

a) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$

b) $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$

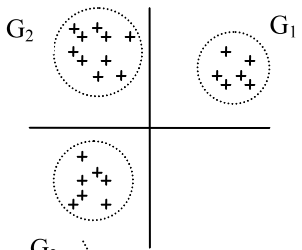
c) $\left(\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\right)^2$

d) $\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$

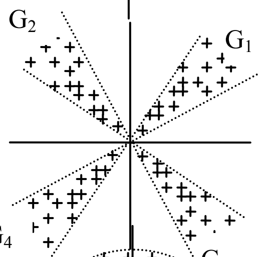
e) $\dfrac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$

se consideran para ser utilizadas como medidas de semejanza en un algoritmo de agrupamiento. Indíquese cual se emplearía en cada uno de los siguientes conjuntos de datos para obtener los grupos que se muestran.

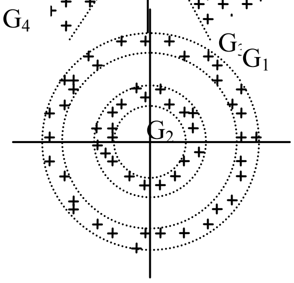
1)



2)



3)



(20 min; 1p)

T3.- Se dispone de K muestras, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, tomadas independientemente, de una v.a. x cuya d.d.p. viene dada por

$$p_X(x)=\frac{1}{bx^2}\exp\left(-\frac{1}{bx}\right)u(x)$$

con b>0.

a) Determínese $\hat{b}_{ml}$ en función de dichas muestras.
b) Verifíquese que la v.a. y=1/x sigue una d.d.p. $p_Y(y)$ de tipo exponencial unilateral, y establézcase el valor de la media de dicha distribución.
c) Considerando todo lo que antecede, ¿es $\hat{b}_{ml}$ un estimador insesgado?

(25 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **19/09/07**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- En un problema de decisión binaria planteado bajo el criterio ML, las verosimilitudes de las observaciones son:

$$p(x|H_0)=\begin{cases} 2(1-x)\ ,\ 0<x<1 \\ 0\ ,\ \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1)=\begin{cases} 1/a\ \ ,\ \ \ 0<x<a \\ 0\ ,\ \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $a\geq 1$ un parámetro determinista.

a) Diséñese el decisor óptimo supuesto que es conocido el valor de a.

b) Supóngase ahora que el valor de a es desconocido. Se opta por aplicar una estrategia minimax, fijando para la toma de decisiones un umbral x_u^* elegido para minimizar el máximo coste medio (correspondiente al criterio ML); es decir,

$$x_u^*=\arg\left\{\min_{x_u}\left\{\max_{a}\ \bar{C}_{ML}(x_u,a)\right\}\right\}$$

siendo x_u un umbral de decisión genérico

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} x_u$$

Determínese x_u^*.

c) Calcúlese el incremento del coste medio (ML) que se produce al aplicar la estrategia minimax respecto al que se tendría si el valor del parámetro a fuese conocido.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Considérese la familia de funciones de coste dadas por

$$C_N(s,\hat{s}) = \frac{1}{N+1}\hat{s}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}s^{N+1} - \frac{1}{N}s\hat{s}^N$$

siendo N un número entero no negativo e impar.

a) Analícese el cumplimiento del principio de invarianza para dicha familia de funciones de coste y distribución conjunta de s y x arbitraria (x es la variable observable).

b) Suponiendo que

$$p(s,x) = \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right)u(s)u(x), \;\; \lambda > 0$$

determínese el estimador de mínimo coste medio.

c) Determínese el mínimo coste medio.

d) Determínese el coeficiente w que minimiza el coste medio del estimador de la forma

$$\hat{s} = wx^m$$

siendo m un entero positivo.

e) Obsérvese la dependencia de w con N. ¿Contradice el principio de invarianza?

Indicación: $\int_0^\infty x^N \exp(-x)\,dx = N!$

(75 min; 2.5 p)