Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **26/06/08**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 60 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático (mse) que permita estimar la variable aleatoria s a partir de la v.a. x_1. Se conoce la siguiente información estadística:

$$E\{x_1\} = 0, \quad E\{s\} = 1,$$
$$E\{x_1^2\} = 1, \ E\{sx_1\} = 2$$

a) Indíquese cuál de los siguientes diseños mse proporcionará un error cuadrático medio menor:

$$\hat{s}_a = w_{0a} + w_{1a}x_1$$
$$\hat{s}_b = w_{1b}x_1$$

b) Si se dispone ahora de una segunda v.a. x_2 de la que se sabe:

$$E\{x_2\} = 1, \quad E\{x_2^2\} = 2,$$
$$E\{x_1x_2\} = 1/2, \ E\{sx_2\} = 2,$$

justifíquese si el estimador

$$\hat{s}_c = w_{0c} + w_{1c}x_1 + w_{2c}x_2$$

presenta un error cuadrático medio menor que los estimadores propuestos en a).

(20 min; 1p)

T2.- Explíquese cómo es la estimación de una ddp mediante un histograma, y cuál es la influencia de la anchura de barra en el comportamiento de dicho estimador.

(15 min; 1 p)

T3.- Se estima la varianza v de una v.a. x con media nula a partir de K observaciones $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$ de dicha variable tomadas independientemente, utilizando el estimador

$$\hat{v} = \frac{1}{K}\left[\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}\right]^2$$

a) Determínese el sesgo del estimador.

b) Para $K = 2$ y suponiendo $E\left\{x^4\right\} = \alpha$, determínese la varianza del estimador.

(25 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 180 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérese la situación descrita por

$$x = s + n$$

siendo s y n vv.aa. con ddps:

$$s : G_{\{m, v_s\}}(s)$$

$$n : G_{\{0, v_n\}}(n)$$

e independientes entre sí.

a) Calcúlese la ddp $p(s|x)$.

b) Se puede definir el estimador de intervalo de una v.a. s dada una observación x como el par ordenado de valores $\{s_a(x), s_b(x)\}$ que minimiza $s_b - s_a$ (anchura del intervalo de confianza, $[s_a, s_b]$) cumpliendo

$$\Pr\{s_a < s < s_b |x\} = 1 - \delta$$

donde δ ($\delta \ll 1$) es el nivel de confianza del estimador; $1 - \delta$ se denomina coeficiente de confianza.

Determínese el estimador de intervalo de s con nivel de confianza δ, expresado en función del percentil 100(1-δ/2) de la v.a. γ: $G_{\{0,1\}}(\gamma)$; es decir, el valor $\gamma_{1-\delta/2}$ que verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma_{1-\delta/2}} \exp(-\gamma^2 / 2) d\gamma = 1 - \delta/2$$

c) ¿Qué ocurre si $v_n \gg v_s$?

d) ¿Qué ocurre si $v_s \gg v_n$?

(90 min; 2.5 p)

P2.- Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p(x_1, x_2|H_0)=\begin{cases}\alpha & \text{si } 0 \le x_1 \le 3 \text{ y } 0 \le x_2 \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$p(x_1, x_2|H_1)=\begin{cases}\beta(x_1 + x_2) & \text{si } x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{y} \quad x_1 + x_2 \le 3 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a) Tras obtener los valores de las constantes α y β, represéntense las regiones de decisión correspondientes a un decisor LRT. Indíquese cómo varían las regiones de decisión en función del umbral del clasificador.

b) Obténganse las densidades de probabilidad marginales de x_1 y x_2 bajo ambas hipótesis (H_0 y H_1). ¿Son x_1 y x_2 independientes bajo alguna de las hipótesis?

c) Por sencillez, se decide utilizar un detector de umbral basado en una única observación, x_1 o x_2:

$$\text{DEC1: } x_1 \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} \eta_1 \quad ; \quad \text{DEC2: } x_2 \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} \eta_2$$

Calcúlense las probabilidades de falsa alarma y de detección de los clasificadores DEC1 y DEC2, expresándolas en función de los umbrales de dichos decisores: η_1 y η_2, respectivamente.

d) Dibújense las curvas características de operación (OC) (i.e., las curvas que representan P_D en función de P_{FA}) correspondientes a los decisores DEC1 y DEC2, y discútase cómo cambia el punto de operación de cada clasificador al modificar el valor del umbral correspondiente.

e) A la luz de los resultados obtenidos, ¿puede concluirse que alguno de los dos decisores propuestos, DEC1 o DEC2, sea superior al otro?

(90 min; 2.5 p)