Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **16/09/08**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 65 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Un problema de decisión ternario unidimensional de hipótesis equiprobables está definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p(x \mid H_0) = 2\left(1 - 2\left|x - \tfrac{1}{2}\right|\right), \qquad 0<x<1$$
$$p(x \mid H_1) = 1, \qquad 0<x<1$$
$$p(x \mid H_2) = 2x, \qquad 0<x<1$$

a) Determínese el decisor de mínima probabilidad de error.

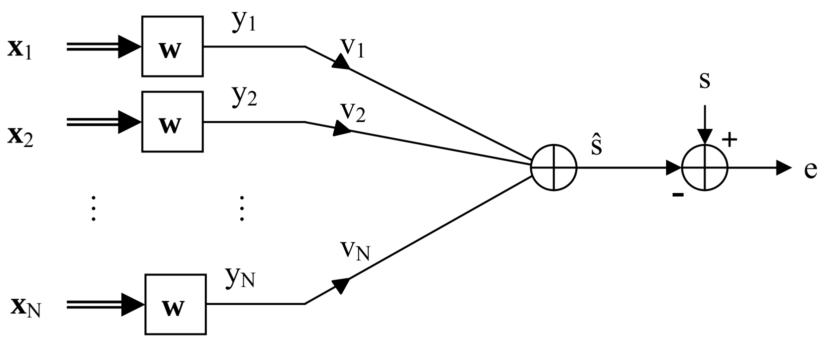
b) Discútase si es equivalente el decisor anterior al constituido por un primer decisor de mínima probabilidad de error que decide entre H_0 y $H_1 \bigcup H_2$, y, tras ello, si se acepta $H_1 \bigcup H_2$, un segundo decisor de mínima probabilidad de error para decidir entre H_1 y H_2.

(25 min; 1p)

T2.- Explíquese en qué consisten los métodos paramétricos, semi-paramétricos y no paramétricos de estimación de la ddp, ilustrando sus diferencias por medio de un ejemplo de cada uno de ellos.

(15 min; 1 p)

T3.- La siguiente figura representa un sistema para la estimación de una variable aleatoria s a partir de un conjunto de vectores de observaciones, $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N$:



de forma que $\hat{s} = \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i\right)$.

Exprésense las reglas secuenciales de descenso por gradiente que permiten obtener los vectores de parámetros $\mathbf{v} = [v_1,\ldots,v_N]^T$ y $\mathbf{w}$ que minimizan el error cuadrático medio del estimador, a partir de un conjunto de entrenamiento $\{\mathbf{x}_1^{(k)},\ldots,\mathbf{x}_N^{(k)}, s^{(k)}\}$.

(25 min; 1 p)

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **16/09/08**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 165 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Se desea estimar la va s a partir de la va x, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p(x,s) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le s \quad 0 \le s \le 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese el estimador de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x, $\hat{s}_{MSE}$.

b) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud de s dado x, $\hat{s}_{ML}$.

c) Establézcanse las ddps de ambos estimadores, $p(\hat{s}_{MSE})$ y $p(\hat{s}_{ML})$, y represéntense gráficamente ambas.

d) Calcúlense la media y la varianza del error de ambos estimadores.

(75 min; 2.5 p)

P2.- En un problema de decisión binaria unidimensional se sabe que la v.a. observada x bajo la hipótesis H_0 responde a una ddp $p(x|H_0)$ de media 0, simétrica y decreciente en torno a la media, con varianza v; mientras que bajo la hipótesis H_1 pasa a tomar media $m_1>0$, conservando su forma (es decir, $p(x|H_1) = p(x-m_1|H_0)$). Las hipótesis son equiprobables.

a) Diséñese el decisor ML.

b) En la práctica, m_1 es desconocida. Un diseñador opta por estimarla mediante la media muestral $\overline{x}_{(1)}$ de K observaciones de x bajo la hipótesis H_1, $\left\{x_{(1)}^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, tomadas independientemente; estableciendo a partir de ella un estimador U del umbral teórico, y tomando la decisión mediante

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} U, \qquad \text{si } U>0$$

$$x \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} U, \qquad \text{si } U<0$$

Justifíquese esta forma de decidir, y determínese la expresión de U.

c) Obviamente, U es una v.a. Calcúlense su media y su varianza en función de las de las muestras, m_1 y v.

d) Considerada U como v.a, cuando se aplica al decisor con umbral U se produce falsa alarma
- si U>0, cuando la v.a. x bajo la hipótesis H_0 supera el valor de la v.a. U;
- si U<0, cuando la v.a. x bajo la hipótesis H_0 es inferior al valor de U.

Explicítese la expresión que permite calcular P_{FA}.

e) Cuando K>>1 y admitiendo que $p(x|H_0)$ obedece al Teorema Central del Límite, U puede considerarse gaussiana. Suponiéndolo y también que $m_1=1$ y

$$p(x \mid H_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

(que no satisface la condición de decrecimiento en torno a la media; pero el diseñador no lo sabe), calcúlese la P_{FA} del diseño empírico (el que maneja U).

f) ¿A qué tiende la probabilidad de error del diseño empírico del apartado anterior cuando $K\to\infty$, admitiendo que, por simetría, $P_M \to P_{FA}$? Compárese con la del diseño ML supuesto m_1 conocida, $P_e(T)$.

Nota: Utilícese, cuando convenga, la función de error complementario dada por la expresión:

$$\text{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

(90 min; 2.5 p)