Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **16/01/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA
(Tiempo: 50 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Considérese un problema de decisión binario con hipótesis H_0 y H_1 y observación x. Cierto decisor adopta D_1 si x se encuentra en una región R_1 y D_0 en caso contrario, obteniendo probabilidades de falsa alarma y detección P_{FA} y P_D, respectivamente.

El decisor opuesto decide D_0 si x se encuentra en R_1 y D_1 en caso contrario, siendo $P_{FA}´$ y $P_D´$ sus probabilidades de falsa alarma y detección, respectivamente. Determínese la relación entre las probabilidades de falsa alarma y detección de ambos decisores.

(10 min; 1p)

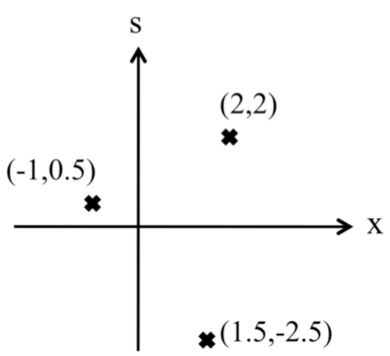
T2.- Se desea resolver un problema de estimación de una variable aleatoria unidimensional s a partir de otra variable aleatoria x mediante la aplicación de un estimador de máximo a posteriori (MAP), es decir,

$$\hat{s}(x) = \arg\max_{s} p(s \mid x)$$

Sin embargo, no se conoce la distribución de las variables aleatorias, por lo que se decide estimar la ddp conjunta de s y x a partir de un conjunto de pares $\{x^{(k)},s^{(k)}\}_{k=1}^{K}$, siendo K el número de muestras disponibles.

a) Obténgase la expresión del estimador $\hat{p}(s,x)$ que resulta de la aplicación del método del vecino más próximo (1-NN).

b) Obténgase el estimador MAP de s utilizando $\hat{p}(s,x)$. Ilústrese su funcionamiento en el caso representado (con K=3) al calcular $\hat{s}(1)$.



Indicación: Si le resulta útil, analice el comportamiento de $\hat{p}(s,x)$ en la recta x = 1.

(25 min; 1 p)

T3.- Se aplica la regla del perceptrón para clasificar dos conjuntos de muestras linealmente separables mediante un perceptrón monocapa duro.

a) ¿Se puede predecir el tiempo de convergencia?
b) Una vez que el algoritmo converja, ¿puede tener la solución algún inconveniente?

(15 min; 1 p)

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 120 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Las vvaa s y x se distribuyen conjuntamente según la ddp

$$p(s,x) = \alpha s x^2, \quad 0 < s < 1 - x, \quad 0 < x < 1$$

siendo α un parámetro a determinar.

a) Establézcanse las expresiones de las ddp marginales p(x) y p(s).

b) Calcúlese el estimador MAP de s dado x, $\hat{s}_{MAP}(x)$.

c) Calcúlese el estimador ML de s dado x, $\hat{s}_{ML}(x)$.

d) Calcúlese el estimador de s dado x de error cuadrático medio mínimo, $\hat{s}_{MSE}(x)$.

e) Compárense los estimadores calculados según el coste medio dado x que se emplea para establecer el estimador MAP.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Se tiene un problema de decisión binaria definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p(x_1, x_2 \mid H_0) = G\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right) \qquad p(x_1, x_2 \mid H_1) = G\left(\begin{bmatrix}m\\m\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right)$$

siendo m>0 y $|\rho| < 1$.

a) Sabiendo que $\Pr(H_0)=\Pr(H_1)$, obténgase el decisor bayesiano de mínima probabilidad de error. Represéntese en el plano x_1-x_2 la frontera de decisión obtenida.

b) Sobre el clasificador obtenido en a), compruébese que $z= x_1+x_2$ es un estadístico suficiente para la decisión. Obténganse las verosimilitudes de la variable aleatoria z, $p(z|H_0)$ y $p(z|H_1)$.

c) Calcúlense las probabilidades de falsa alarma, de pérdida y de error del decisor anterior; exprésense estas probabilidades utilizando la función error complementario

$$\mathrm{erfc}(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

d) Analícese cómo varía la probabilidad de error con el valor de ρ; para ello, considérense los casos $\rho = -1$, $\rho = 0$ y $\rho = 1$. Indíquese sobre el plano x_1-x_2, para cada valor de ρ, cómo se distribuyen las verosimilitudes, y represéntese la frontera de decisión.

(60 min; 2.5 p)