Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **09/09/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

TEORÍA

(Tiempo: 75 minutos. Puntos: 3/8)

T1.- Se generan K observaciones independientes $\{x^{(k)}, k=1,\ldots,K\}$ con distribución p(x) uniforme en el intervalo [0,1), y se construyen los siguientes estimadores de la densidad de probabilidad:

- El histograma, h(x), basado en la partición del intervalo [0, 1) en N intervalos iguales de la forma [i/N, (i+1)/N), para i = 0, 1, …, N-1.
- El estimador de Parzen, q(x) basado en ventanas rectangulares de anchura 1/N.

a) Determínese la probabilidad de que h(1/2) = 0.

b) Determínese la probabilidad de que q(1/2) = 0.

c) Arguméntese si el resultado sería diferente en alguno de los dos casos para algún valor de $x \neq 1/2$.

(Indicación: Considere para su respuesta, por ejemplo, los valores máximo o mínimo que puede tomar la v.a. x.)

d) Sea $H_{K,N}$ la probabilidad obtenida en el apartado a), considérense las alternativas:

A1. N = K/10
A2. $N = K^{1/2}$

Determínese en qué casos se verifica $\lim_{K\to\infty} H_{N,K} = 0$.

Indicación:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{z} = \frac{1}{e} \qquad (e \approx 2.72)$$

(30 min; 1p)

T2.- Indíquese, justificando muy brevemente la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) La búsqueda global permite obtener siempre soluciones estrictamente mejores que la búsqueda local en términos de minimización de la función de coste.

b) El algoritmo NLMS permite solventar los problemas de búsqueda en zig-zag que padece el LMS convencional.

c) Los algoritmos de gradiente conjugado seleccionan direcciones de búsqueda que apuntan al mínimo de la función de coste.

d) El cumplimiento de la condición de conjugación en los algoritmos de gradiente conjugado permite seleccionar en cada iteración el valor óptimo del paso de adaptación.

e) Se desea resolver un problema de estimación aplicando reglas basadas en gradiente estocástico. Sabiendo que la distribución a posteriori de la variable a estimar es gaussiana, el principio de invarianza permite asegurar que es indiferente utilizar las reglas de gradiente basadas en coste cuadrático o absoluto.

(15 min; 1 p)

T3.- Considérense dos variables aleatorias unidimensionales s y x. La variable x está caracterizada por la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & |x| < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se sabe que el estimador de mínimo error cuadrático medio de s a la vista de x es

$$\hat{s}_{mse}(x) = -\frac{1}{2}\text{signo}(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$

También se sabe que el error cuadrático medio que comete este estimador es 1/12. Sin embargo, se prefiere usar el siguiente estimador

$$\hat{s}_1 = -x$$

a) Determínese el sesgo del estimador $\hat{s}_1$.

b) Calcúlense las siguientes esperanzas matemáticas: $E\{s\cdot x\}$ y $E\{s^2\}$.

c) Determínese el error cuadrático medio que comete el estimador $\hat{s}_1$.

(30 min; 1 p)

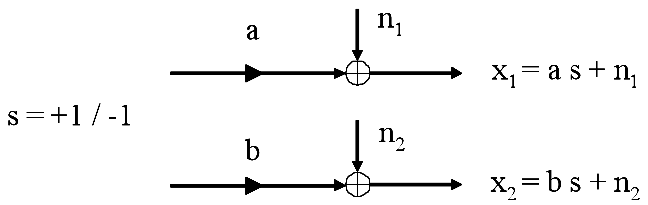
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones **09/09/09**
UCIIIM

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROBLEMAS

(Tiempo: 135 minutos. Puntos: 5/8)

P1.- Considérese un sistema de comunicaciones en el que los símbolos "+1" ó "-1" se transmiten simultáneamente por dos canales ruidosos, tal y como se ilustra en la figura:



$$\mathbf{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \sim G\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right]$$

siendo a y b dos constantes desconocidas que caracterizan a los canales. Se sabe, además, que las probabilidades de transmisión de ambos símbolos son iguales.

a) Si se desea construir un decisor para discriminar cuál fue el símbolo transmitido utilizando únicamente una de las dos observaciones disponibles, x_1 o x_2, indíquese cuál de las dos variables utilizaría, justificando su respuesta en función de los valores de las constantes. Proporciónese la forma analítica del decisor ML correspondiente.

b) Obténgase el decisor binario de mínima probabilidad de error basado en la observación conjunta de x_1 y x_2, expresando el resultado como función de a, b y ρ. Simplifique la expresión de dicho decisor tanto como le sea posible.

c) Para ρ = 0, calcúlese la probabilidad de error del decisor diseñado en b). Exprese su resultado utilizando la función de error complementario:

$$\mathrm{erfc}(u)=\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

d) Para el cálculo de las constantes a, b y ρ, se transmite inicialmente una secuencia de entrenamiento, de forma que para el diseño se dispone de un conjunto $\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right\}_{k=1}^{K_1}$ de observaciones correspondientes a K_1 transmisiones independientes del símbolo "+1", y otro conjunto $\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right\}_{k=1}^{K_{-1}}$ de observaciones correspondientes a K_{-1} transmisiones independientes del símbolo "-1". Obténganse los estimadores ML de a, b y ρ, a partir de las observaciones disponibles.

e) Durante su operación normal, el decisor recibe nuevas observaciones, y las clasifica de acuerdo al criterio obtenido en b), utilizando las estimaciones ML de las constantes. Indíquese cómo utilizaría las nuevas observaciones para reajustar los valores de a, b y ρ. Arguméntese en qué circunstancias el procedimiento propuesto permitirá una disminución de la probabilidad de error del clasificador y en qué circunstancias resultará en un deterioro.

(60 min; 2.5 p)

P2.- Se desea construir un modelo de regresión lineal de bajo coste computacional para una variable aleatoria s. Se sabe que esta variable depende de otras tres variables aleatorias x_1, x_2 y x_3, que constituyen las observaciones. La siguiente tabla muestra cuatro realizaciones independientes del proceso aleatorio.

x_1	x_2	x_3	s
3	-1	0	-1
-2	0	1	-2
0	-1	2	0
-1	2	-3	3

El objetivo del problema consiste en evaluar dos estrategias para construir el citado regresor de bajo coste computacional:

- Construir un regresor lineal exacto de mínimo error cuadrático medio usando únicamente dos de las variables disponibles.
- Construir una aproximación al estimador lineal de mínimo error cuadrático medio usando las tres variables. La aproximación consiste en suponer que la matriz de covarianzas de las observaciones es diagonal.

Para ello:

a) Determínese cuáles de las tres variables observables se van a incluir en el regresor del primer diseño. La selección se realiza en dos pasos: en primer lugar se elige la variable cuya covarianza muestral (i.e., estimada a partir de los datos) con s presenta un mayor valor absoluto. La segunda variable será aquella cuya covarianza muestral con la seleccionada en el primer paso tenga menor valor absoluto.

b) Constrúyase el regresor lineal de s de mínimo error cuadrático medio empleando las dos variables elegidas en el apartado anterior.

c) Constrúyase el estimador lineal aproximado especificado en el segundo diseño. Para ello, estímense en primer lugar los elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas de las observaciones y el vector de covarianzas de las observaciones con s a partir de las muestras disponibles.

d) ¿Cuál de los dos diseños propuestos obtiene un menor error cuadrático promedio sobre los datos disponibles?

(75 min; 2.5 p)