Electrónica de Comunicaciones
Desarrollo de Filtro RLC Sintonizado

Harold Molina-Bulla

Octubre 14 2008

Tenemos un circuito RLC excitado por una fuente de tensión alterna de frecuencia ω_0, cuyo circuito corresponde a la figura 1 y su modelo equivalente Norton es el de la figura 2.
La tensión de salida V_{out} la medimos en los extremos de la inductancia L.

Si calculamos su tensión salida:
$V_{out} = \frac{V_{in}}{R_1}\frac{1}{Y_T}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{R_1}\frac{1}{Y_T}$

Donde Y_T es la admitancia del filtro RLC.

La admitancia se calcula de la siguiente manera:
$Y_T = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$
$Y_T = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$

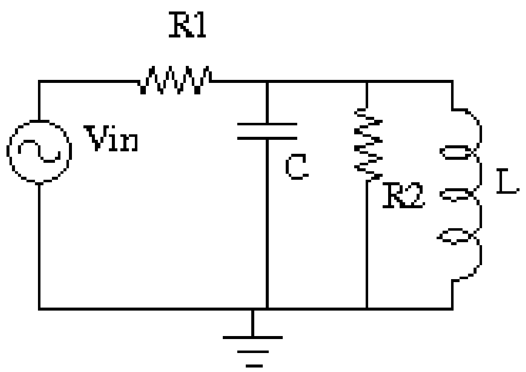

Figura 1: Circuito RLC Paralelo excitado con fuente de tensión

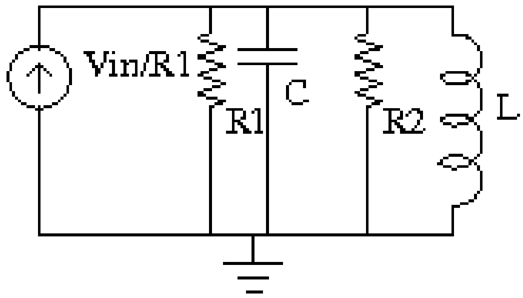

Figura 2: Modelo equivalente Norton

Entonces:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{R_1}\frac{1}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$

Factorizando $\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ en el denomindador y pasandolo al numerador, obtenemos:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{R_1}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{1+j\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\omega C-\frac{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{\omega L}\right)}$

Denominemos $R_L = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ y simplifiquemos el numerador:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{1+j\left(R_LC\omega-\frac{R_L}{\omega L}\right)}$

En el término complejo factoricemos R_LC:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{1+jR_LC\left(\omega-\frac{1}{\omega LC}\right)}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jR_LC\left(\omega-\frac{1}{\omega LC}\right)}$

Se considera que un circuito RLC está en resonancia a la frecuenca en la cual su componente imaginaria es igual a 0:
$\omega - \frac{1}{\omega CL} = 0$

De donde
$\omega = \frac{1}{\omega CL}$
$\omega^2 = \frac{1}{CL}$
$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Definimos la frecuencia de resonancia ω_0 la frecuencia a la cual el término imaginario es 0, es decir $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, como hemos calculado previamente.

Observese que a frecuencia de resonancia, tenemos que:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jR_LC(0)}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+j0}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$
Esto que quiere decir: A frecuencia de resonancia las reactancias se anulan mutuamente, dejandonos un circuito resistivo neto y su resultado es el clásico divisor resistivo.

Adicionalmente, podemos decir que a frecuencia de resonancia, el circuito tiene máxima ganancia.

Volviendo a las ecuaciones originales, sustituyendo $\frac{1}{LC}$ por ω_0^2, tenemos:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jR_LC\left(\omega-\frac{\omega_0^2}{\omega}\right)}$

Factorizando ω_0 en el término complejo del denominador:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+j\omega_0R_LC\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

De las notas de clase de filtros sabemos que para un filtro RLC paralelo el factor de calidad es:
$Q = \frac{R_L}{\omega_0 L}$

Multiplicando numerador y denominador por $\omega_0 C$ tenemos:
$Q = \frac{R_L\omega_0C}{\omega_0^2LC}$
$Q = \frac{R_L\omega_0C}{\omega_0^2\frac{1}{\omega_0^2}}$
$Q = R_L\omega_0C$
Sustituyendo:
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0\omega}\right)}$
$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jQ\left(\frac{(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)}{\omega_0\omega}\right)}$

Si $\omega \rightarrow \omega_0$ tenemos:
$\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$
$\omega - \omega_0 \approx \Delta\omega$

Entonces,

$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jQ\left(\frac{2\omega_0\Delta\omega}{\omega_0\omega_0}\right)}$

$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jQ\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)}$

$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+j2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}$

Si definimos $X = 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ entonces tenemos que:

$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1}{1+jX}$

Que es la expresión a la que llegamos en clase: El término $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ es la ganancia del del filtro a ω_0 y el término $\frac{1}{1+jX}$ es la parte afectada por la frecuencia.