Capítulo 2 : Ejercicios

Ejercicio 2.1 Considere el diagrama de rejilla para un canal discreto equivalente genérico con 4 coeficientes no nulos (memoria $K_p = 3$) y una constelación 2-PAM. La rejilla se divide en 4 sub-rejillas disjuntas, cada una conectando dos nodos en el instante n con dos nodos en el instante $n+1$. Estas sub-rejillas se llaman *mariposas*[1].

a) Dibuje el diagrama completo de 8 estados e identifique las cuatro mariposas.

Considere el caso general de una constelación de orden M, y un canal de longitud $K_p + 1$, en el que la rejilla tiene M^{K_p} estados.

b) Defina la mariposa establecidndo las propiedades de sus nodos de entrada y de salida.

c) ¿Cuántos nodos de entrada y cuantos nodos de salida pertenecen a cada mariposa?

d) ¿Cuántas mariposas hay en la rejilla?

Ejercicio 2.2 Considere la transmisión de símbolos binarios de una constelación 2-PAM $\{-1, +1\}$ por el canal $p[n] = 0{,}5\delta[n] - 0{,}5\delta[n-1] + 0{,}8\delta[n-2]$[2].

a) Dibuje el diagrama de rejilla etiquetando cada rama con la métrica correspondiente.

b) Dibuje el diagrama de rejilla asociado a la constelación de errores $\{-2, 0, +2\}$.

c) Determine la misma distancia euclídea entre la salida sin ruido de dos secuencias distintas (es decir, calcule el valor de D_{min}).

Ejercicio 2.3 Considere un canal discreto equivalente con la siguiente respuesta al impulso:

$$p[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

El ruido es blanco, gausiano y con densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2} = 0{,}01$. En el sistema de comunicaciones se utiliza una modulación binaria 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$.

a) Obtenga la constelación de la señal recibida en ausencia de ruido y obtenga la probabilidad de error del sistema si se utiliza un decisor sin memoria basado en el criterio MAP aplicado sobre la constelación transmitida.

b) Obtenga el diagrama de rejilla para el detector de máxima verosimilitud (ML).

[1] Problema 6.9 del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

[2] Problema 6.12, apartados (a), (b) y (c), del libro: A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales. Pearson Educación, 2007.

c) Obtenga la probabilidad de error alcanzada por un detector de secuencias ML.

d) Diseñe un igualador lineal basado en el criterio ZF y obtenga la probabilidad de error cuando se construye un igualador sin restricciones de complejidad.

e) Diseñe un igualador lineal basado en el criterio MMSE y obtenga la probabilidad de error cuando se construye un igualador sin restricciones de complejidad.

f) Diseñe un igualador lineal basado en el criterio MMSE con tres coeficientes y retardo $d = 1$, y obtenga la probabilidad de error.

g) Compare el rendimiento de los tres igualadores diseñados.

Ejercicio 2.4 Una constelación 4-PSK con símbolos equiprobables es transmitida sobre el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \delta[n] + j0{,}8\delta[n-1],$$

con ruido aditivo blanco y gausiano. Asuma $E_s = 1$ y que los símbolos de la constelación 4-PSK tienen como coordenadas

$$A[n] \in \{+1, -1, +j, -j\}.$$

Se quiere evaluar el rendimiento del sistema con diferentes receptores.

a) Si en el receptor hay un decisor MAP sin memoria

   I) Obtenga la constelación recibida si no hay ruido en el canal.

   II) Calcule la probabilidad de error P_e.

b) Si el receptor es un igualador lineal construido con el criterio ZF sin restricciones en la complejidad seguido por un decisor MAP sin memoria:

   I) Obtenga la función de transferencia del igualador.

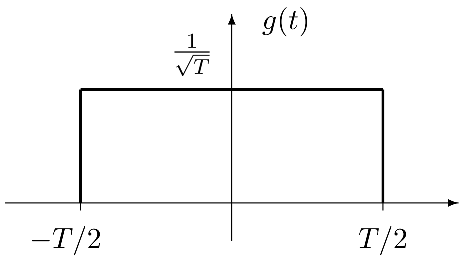
   II) Estime P_e.

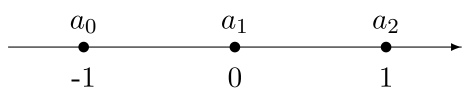
c) Si el receptor es un detector de secuencias ML:

   I) Obtenga el diagrama de rejilla y la distancia mínima a un evento erróneo.

   II) Obtenga P_e y compárela con los rendimientos obtenidos en los apartados anteriores.

Ejercicio 2.5 Un sistema de comunicaciones PAM utiliza en la transmisión el pulso conformador $g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ mostrado en la figura. El sistema transmite los tres símbolos de la constelación de la figura con la misma probabilidad. Se considera una transmisión sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ Watts./Hz.





a) Obtenga el canal discreto equivalente para un canal con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t) - 0{,}5\,\delta(t - \frac{T}{2})$, si el receptor usa un filtro adaptado al transmisor.

b) Asuma de ahora en adelante un canal discreto equivalente

$$p[n] = 0{,}75\,\delta[n] - 0{,}25\,\delta[n-1].$$

En primer lugar, obtenga el receptor óptimo para detección símbolo a símbolo sin memoria, y calcule la probabilidad de error asociada a dicho receptor.

c) Obtenga el diagrama de rejilla para el canal discreto equivalente de la sección anterior y calcule la probabilidad de error si se usa un detector de secuencias ML. Compare los resultados.

d) Decodifique, usando un decisor sin memoria MAP y un detector de secuencia ML la siguiente secuencia de observaciones teniendo en cuenta que $A[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n \geq 3$

$$\boldsymbol{q} = [0{,}2 \quad -0{,}35 \quad -0{,}35 \quad -0{,}2].$$

NOTA: La transformada de Fourier de $g(t)$ es $G(j\omega) = \sqrt{T}\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$.

Ejercicio 2.6 Un sistema de comunicaciones tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2].$$

Se usa una modulación 2-PAM (también llamada BPSK), $A[n] \in \{\pm 1\}$, el ruido es blanco, gausiano y con densidad espectral de potencia $N_0/2$ y $N_0 = 2\ 10^{-2}$.

a) Obtenga el igualador lineal ZF sin restricciones de complejidad y obtenga la probabilidad de error.

b) Obtenga el igualador lineal ZF con dos coeficientes y retardo $d = 1$.

Ejercicio 2.7 Un sistema de comunicaciones digital usa una modulación 2-PAM $A[n] = \pm 1$ sobre un canal discreto equivalente de la forma

$$p[n] = -0{,}3\delta[n] + 0{,}8\delta[n-1] - 0{,}2\delta[n-2]$$

y con ruido discreto $z[n]$ blanco y gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

a) Asuma que se utiliza un decisor símbolo a símbolo sin memoria.

   I) Dibuje la constelación a la salida del canal en ausencia de ruido.
   II) Obtenga la función de densidad de probabilidad de $q[n]$ a la entrada del decisor si $A[n] = 1$.
   III) Obtenga la función de densidad de probabilidad de $q[n]$ a la entrada del decisor si $A[n] = -1$.
   IV) Obtenga la probabilidad de error que se tendría si las regiones de decisión son las originales sin considerar la ISI, bajo los siguientes dos escenarios: primero suponga que las decisiones se toman sobre el símbolo $\hat{A}[n]$; segundo: asuma que las decisiones se toman sobre el símbolo $\hat{A}[n-1]$. ¿A qué se debe la diferencia en el rendimiento entre los dos escenarios?.

b) Utilizando un igualador lineal

i) Obtenga el igualador lineal ZF con tres coeficientes para $d = 0$ y $d = 1$. Para ello obtenga la matriz de canal $\mathbf{P}$ y el vector de respuesta al impulso $\mathbf{c}_d$ para ambos casos.

ii) Si se tiene un filtro con coeficientes $\mathbf{w}_{ZF} = [1{,}15,\ 0{,}22,\ 0{,}02]^T$ que ha sido obtenido para $d = 1$, obtenga la potencia del ruido y de la ISI a la salida del igualador[3].

Ejercicio 2.8 El canal discreto equivalente para un sistema de comunicaciones es

$$p[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{4}\delta[n-2].$$

El sistema utiliza una constelación 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$. La varianza del ruido discreto $z[n]$ es $\sigma_z^2 = 0{,}1$.

a) Si se utiliza un receptor símbolo a símbolo sin memoria, elija el retardo óptimo para la decisión, d, y calcule la probabilidad de error de símbolo para dicho retardo.

b) Diseñe el igualador lineal sin limitación de coeficientes, y criterio ZF, y calcule la probabilidad de error obtenida con el mismo.

c) Diseñe el igualador lineal de 3 coeficientes con los criterios ZF y MMSE para un retardo $d = 2$ (plantee el sistema de ecuaciones a resolver, definiendo de forma precisa todos los términos involucrados, pero no es necesario que obtenga los valores de los coeficientes del igualador resultante).

Ejercicio 2.9 Para poder estudiar las prestaciones de dos canales diferentes en una transmisión digital, se transmite la siguiente secuencia.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$A[n]$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$

A la salida de cada uno de los canales y en ausencia de ruido, se obtienen las siguientes secuencias:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$o_1[n]$	$+0{,}1$	$-0{,}3$	$+0{,}3$	$-0{,}3$	$-0{,}1$	$-0{,}1$	$+0{,}3$	$+0{,}1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$o_2[n]$	$+0{,}1$	$-0{,}3$	$+0{,}7$	$-0{,}7$	$+0{,}3$	$-0{,}1$	$+0{,}3$	$-0{,}3$

Asuma que en medidas anteriores, se ha determinado que el canal causal $p[n]$ que da lugar a la secuencia de salida $o_1[n]$ tiene una duración de dos muestras (memoria $K_{p_1} = 1$) y que el canal que da lugar a la secuencia de salida $o_2[n]$ tiene duración tres muestras (memoria $K_{p_2} = 2$).

a) Obtenga para cada uno de los canales las constelaciones recibidas y determine para cada uno de los símbolos recibidos el conjunto de símbolos que los originaron en transmisión.

b) Si en ambos canales se decidiera utilizar un detector sin memoria, con retardo nulo y sin modificar las regiones de decisión, determine cual de los dos canales tiene peores prestaciones calculando para cada uno de ellos la probabilidad de error.

c) Obtenga los canales discretos equivalentes $p_1[n]$ y $p_2[n]$ que originan las dos secuencias recibidas.

[3] El operador ^{T} denota transposición para un vector o matriz.

d) Obtenga la probabilidad de error para ambos canales si se decide emplear un detector ML de secuencia[4]. Si no tenemos restricciones de complejidad en el receptor, ¿en cuál de los dos canales será más fiable la transmisión?

e) Obtenga la secuencia que con mayor probabilidad fue transmitida en el caso del canal $p_2[n]$ si se recibe:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$q_2[n]$	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$-0{,}3$	$-0{,}7$	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$+0{,}5$	$+0{,}1$

cuando $A[n] = +1$ para $n < 0$ y para $n > 5$.

Ejercicio 2.10 Un sistema de comunicaciones en banda base utiliza como filtro transmisor un pulso causal de duración T segundos y normalizado en amplitud, y una constelación 2-PAM, para transmitir sobre un canal lineal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, con $N_0 = 0{,}02$ y la siguiente respuesta el impulso

$$h(t) = \delta(t) - 4\,\delta\left(t - \frac{3T}{2}\right) + \frac{5}{2}\,\delta\left(t - 2T\right).$$

a) Calcule el canal discreto equivalente, $p[n]$ si en el receptor se utiliza un pulso adaptado al filtro transmisor.

b) En lo sucesivo, considere que el canal discreto equivalente es

$$p[n] = \delta[n] - 2\,\delta[n-1] + \frac{1}{2}\,\delta[n-2].$$

Calcule la probabilidad de error que se tiene con el mejor detector símbolo a símbolo sin memoria.

c) Diseñe un igualador lineal de 3 coeficientes con el criterio forzador de ceros (ZF), considerando un retardo en las decisiones $d = 1$[5].

d) Diseñe un igualador lineal de 3 coeficientes y retardo $d = 3$ con el criterio de mínimo error cuadrático medio (MMSE)[2].

e) Si los coeficientes del igualador son

$$w[0] = -0{,}2,\ w[1] = -0{,}6,\ w[2] = -0{,}1,$$

estime el retardo óptimo para la decisión, y calcule la probabilidad de error que se tiene en este caso.

Ejercicio 2.11 Al transmitir dos secuencias 2-PAM (o BPSK), $A[n] \in \{\pm 1\}$, parcialmente desconocidas de longitud $L = 4$

$$\mathbf{A}_1 = \{1, A_1[1], A_1[2], A_1[3]\} \qquad \mathbf{A}_2 = \{-1, A_2[1], A_2[2], -1\}$$

por un canal del que conocemos que tiene duración de tres muestras

$$p[n] = p[0]\,\delta[n] + p[1]\,\delta[n-1] + p[2]\,\delta[n-2]$$

[4]Para el canal $p_2[n]$ puede suponer que la secuencia $A[n] = +1$, $\forall n$, tiene asociado un suceso erróneo con distancia euclídea mínima.

[5]No es necesario que resuelva el sistema de ecuaciones, pero ha de proporcionar los valores numéricos de todos y cada uno de los términos incluidos en el sistema.

obtenemos dos secuencias diferentes en recepción $o_1[n]$ y $o_2[n]$ en ausencia de ruido. Suponemos además que $A_i[n] = +1$ para $n < 0$ y $n \geq 4$ y para $i \in \{1, 2\}$.

n	0	1	2	3	4	5
$o_1[n]$	−0,1	−1,1	+1,3	−0,3	−0,1	−0,1

n	0	1	2	3	4	5
$o_2[n]$	−1,1	+0,3	+0,1	+0,1	+1,1	−0,3

a) Obtenga los coeficientes del canal por el que han pasado ambas secuencias y su diagrama de rejilla.

b) Obtenga los valores desconocidos de ambas secuencias.

c) Si se decidiera utilizar un detector símbolo a símbolo sin memoria sin considerar la ISI, con retardo $d = 0$, calcule la probabilidad de error si el ruido es blanco, gausiano y con densidad espectral de potencia $N_0/2$. [6]

d) Obtenga el igualador con criterio ZF y dos coeficientes para $d = 0$ y $d = 1$.

e) Obtenga la secuencia de salida del igualador obtenida para $d = 1$, $u[n]$, para $n = 1$ y $n = 2$, cuando a la entrada se tiene $o_1[n]$. ¿Ha recuperado los valores de la secuencia original $\mathbf{A}_1$? Razone su respuesta.

Ejercicio 2.12 Un sistema de comunicaciones que transmite una modulación 2-PAM, $A[n] \in \{\pm 1\}$, tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{3}{4}\,\delta[n] + \frac{5}{4}\,\delta[n-1].$$

El ruido discreto muestreado a la salida del demodulador, $z[n]$, es gausiano con varianza $N_0/2$. En el receptor, se van a utilizar dos configuraciones posibles, en función de si se utiliza o no antes del decisor el siguiente igualador lineal

$$w[n] = -\frac{12}{25}\,\delta[n] + \frac{4}{5}\,\delta[n-1].$$

a) Si NO se emplea el igualador, y el decisor es un decisor símbolo a símbolo sin memoria, seleccione el retardo óptimo para la decisión, d, y calcule la probabilidad de error que se obtiene para dicho retardo.

b) En la estructura del receptor que SÍ incluye el igualador, si el decisor es un decisor símbolo a símbolo sin memoria, seleccione el retardo óptimo para la decisión, d, y calcule la probabilidad de error que se obtiene para dicho retardo (para este caso sencillo, se puede calcular dicha probabilidad de forma exacta, sin recurrir a la aproximación habitual para la probabilidad de error con igualadores lineales).

c) Si el decisor es un ahora un detector de secuencias de máxima verosimilitud, que se aplica en la estructura que SÍ incluye el igualador, aplicándolo a la salida del mismo, $u[n]$, dibuje el diagrama de rejilla del detector, y obtenga la probabilidad de error aproximada, asumiendo que la secuencia $A[n] = +1, \forall n$, tiene un suceso erróneo a mínima distancia euclídea.

[6] Si no ha resuelto el apartado a), para este apartado y los siguientes resuelva en función de $p[0]$, $p[1]$ y $p[2]$.

d) En la estructura con igualador más detector de secuencias, obtenga la secuencia de máxima verosimilitud de $L = 3$ símbolos, $\mathbf{A} = [A[0], A[1], A[2]]$, aplicando el algoritmo óptimo de decodificación, si la secuencia recibida a la salida del igualador es

$$u[0] = +1{,}11,\ u[1] = +1,\ u[2] = +1{,}26,\ u[3] = -1{,}16,\ u[4] = -1$$

asumiendo que entre cada bloque de $L = 3$ símbolos se envía una cabecera de dos símbolos $+1$ para resetear cíclicamente el estado del sistema.
NOTA: Tiene que dejar evidencia clara del desarrollo del algoritmo empleado para la decodificación.

Ejercicio 2.13 Dos usuarios de un sistema de comunicaciones quieren transmitir respectivamente las secuencias equiprobables de símbolos $A_1[n] \in \{\pm 1\}$ y $A_2[n] \in \{\pm 2\}$. Cada usuario transmite su secuencia por un canal diferente ($p_1[n]$ y $p_2[n]$ respectivamente) y la suma de las dos señales transmitidas llega a un receptor, donde se intentará recuperar por separado cada una de las secuencias transmitidas. La señal recibida en el receptor es por tanto:

$$q[n] = A_1[n] * p_1[n] + A_2[n] * p_2[n] + z[n]$$

donde $z[n]$ es ruido blanco gaussiano con $\sigma_z^2 = 1$, y los canales para cada usuario son

$$p_1[n] = 0{,}9\,\delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-1] \text{ y } p_2[n] = 0{,}8\,\delta[n] - 0{,}2\,\delta[n-1].$$

Si el receptor decidiera recuperar la señal del usuario 1, la señal del usuario 2 es, a todos los efectos, una interferencia para el usuario 1 (tiene el mismo efecto que la interferencia entre portadoras, ICI, en una modulación OFDM). Sucede lo mismo si en el receptor se desea recuperar la señal del usuario 2.

a) Obtenga la constelación recibida en ausencia de ruido y el diagrama de rejilla del sistema completo si se pretendiera decodificar de forma conjunta ambas secuencias de datos (dibuje todas las ramas entre estados, pero etiquete sólo las transiciones que salen de uno de los estados, reflejando claramente los símbolos generan la transición y el valor de observación sin ruido).

b) Si se utiliza un receptor símbolo a símbolo sin memoria que no considera la ISI, obtenga la probabilidad de error del usuario 1 con retardo $d = 0$, obtenga la probabilidad de error del usuario 2 con $d = 0$, y compare los resultados, indicando qué usuario tiene mejores prestaciones y por qué.

c) Diseñe un igualador de 2 coeficientes y retardo $d = 0$ con criterio ZF con intención de recuperar la señal del usuario 1, ignorando la existencia del usuario 2. Obtenga la expresión de la ISI residual junto con la de la interferencia generada por los símbolos del usuario 2, y a partir de ellas obtenga una expresión aproximada de la probabilidad de error para el usuario 1.

d) Diseñe un igualador de 2 coeficientes y retardo $d = 0$ con criterio ZF para recuperar la señal del usuario 1, pero teniendo ahora en cuenta la existencia del usuario 2 (extienda el desarrollo del igualador ZF para incluir dicha información), y obtenga una expresión aproximada de la probabilidad de error para el usuario 1.

Ejercicio 2.14 Un sistema de comunicaciones en banda base transmite una constelación 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$. Se transmite sobre un canal lineal de tal modo que el sistema completo tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2].$$

El ruido que aparece en la señal recibida es blanco y gausiano, con densidad espectral de potencia $N_0/2 = 0{,}01$, y el filtro receptor es un filtro normalizado cuya función de ambigüedad temporal cumple el criterio de Nyquist a tiempo de símbolo.

a) Si se utiliza un receptor símbolo a símbolo sin memoria, obtenga el retardo óptimo para la decisión y calcule la probabilidad de error que se obtiene con dicho receptor.

b) En este caso se va a utilizar un igualador de canal para el receptor.

   I) Diseñe el igualador de canal de 3 coeficientes correspondiente al criterio MMSE para un retardo en la decisión $d = 2$.
   NOTA: Plantee el sistema de ecuaciones a resolver para obtener los coeficientes, indicando claramente los valores numéricos de todos y cada uno de los términos involucrados en el sistema, pero no es necesario que resuelva dicho sistema para obtener los coeficientes del igualador.

   II) Si los coeficientes del igualador son
   $$w[0] = -0{,}4,\ w[1] = +1{,}2,\ w[2] = -0{,}4,$$
   calcule de forma aproximada la probabilidad de error del sistema.

c) Si se utiliza un detector de secuencias de máxima verosimilitud, asumiendo que entre cada bloque de L símbolos de datos se envía una cabecera de 2 símbolos conocidos, en este caso $[+1, +1]$, decodifique, utilizando el algoritmo óptimo de decodificación, la secuencia de símbolos de longitud $L = 3$, $\{A[0], A[1], A[2]\}$, si las observaciones a la salida del demodulador son

n	0	1	2	3	4
$q[n]$	1,6	0,2	0	$-0{,}1$	1,3

NOTA: debe dejar clara evidencia de la aplicación del algoritmo empleado.

Ejercicio 2.15 El canal discreto equivalente para un sistema de comunicaciones es
$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-2].$$
El sistema utiliza una constelación 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$. La varianza del ruido discreto $z[n]$ es $\sigma_z^2 = 0{,}1$.

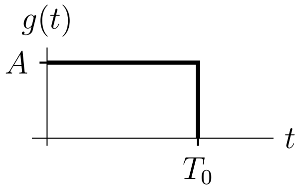
a) Si se utiliza un receptor símbolo a símbolo sin memoria, calcule la probabilidad de error de símbolo para un retardo en la decisión $d = 0$ y para $d = 1$.

b) Diseñe el igualador lineal sin limitación de coeficientes, y criterio ZF, y calcule la probabilidad de error obtenida con el mismo.

c) Diseñe el igualador lineal sin limitación de coeficientes, y criterio MMSE, y calcule la probabilidad de error obtenida con el mismo.

d) Diseñe el igualador lineal de 3 coeficientes con los criterios ZF y MMSE para un retardo $d = 2$ (plantee el sistema de ecuaciones a resolver, definiendo de forma precisa todos los términos involucrados, pero no es necesario que obtenga los valores de los coeficientes del igualador resultante).

Ejercicio 2.16 Un sistema de comunicaciones digitales en banda base transmite una constelación 2-PAM a una tasa binaria $R_b = 1$ kbits/segundo. Los símbolos de la secuencia 2-PAM, que denotamos como $A[n]$ y que es blanca y con símbolos equiprobales, son filtrados para obtener la secuencia $B[n] = A[n] * h_c[n]$, donde $h_c[n] = \delta[n] + 0{,}3\delta[n-1]$. Finalmente, la secuencia $B[n]$ es la que se usa como entrada al filtro transmisor para generar la señal banda base $s(t)$. El ruido térmico tiene una densidad espectral de potencia $N_0/2$ con $N_0 = 0{,}1$. El sistema usa el filtro transmisor de la figura



a) Suponiendo un canal ideal ($h(t) = \delta(t)$) y que se usa un filtro adaptado en el receptor ($f(t) = g(-t)$), obtenga el valor (o valores) de T_0 que permiten una comunicación libre de interferencia intersimbólica (ISI).

b) Obtenga la densidad espectral de potencia de $s(t)$ para $T_0 = \frac{1}{2R_b}$. Dibuje aproximadamente dicha densidad espectral de potencia, etiquetando adecuadamente ambos ejes.

c) Si ahora el canal ya no es ideal, y el canal discreto equivalente es $p[n] = \delta[n] + 0{,}75\delta[n-1]$, obtenga el retardo óptimo y las regiones de decisión para detectar $A[n]$ a partir de la señal recibida $q[n]$ usando un detector símbolo a símbolo sin memoria. Suponga que la SNR es suficientemente alta.

d) Para el canal discreto equivalente del apartado anterior, diseñe el igualador de canal de tres coeficientes a partir del criterio MMSE y con un retardo en la decisión $d = 2$ para recuperar $A[n]$ a partir de $q[n]$.

NOTA: No es necesario que resuelva el sistema de ecuaciones, pero debe proporcionar los valores numéricos de todos los términos involucrados en el sistema.

e) Indique como elegiría el retardo óptimo para el igualador MMSE. No es necesario que lo obtenga, sólo que explique el procedimiento y lo justifique.

Ejercicio 2.17 Un sistema digital de comunicaciones en banda base tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-2].$$

La constelación transmitida es una constelación M-PAM con niveles normalizados y el ruido térmico tiene una densidad espectral de potencia $N_0/2$ con $N_0 = 0{,}1$.

a) Si se transmite una constelación 2-PAM y se usa un receptor símbolo a símbolo sin memoria, obtenga el retardo óptimo para la decisión, y calcule la probabilidad de error exacta que se obtiene con dicho receptor y retardo para la decisión.

b) Para una constelación 4-PAM, diseñe un igualador lineal sin limitación de coeficientes, y obtenga la probabilidad de error

i) Con el criterio forzador de ceros (ZF)

ii) Con el criterio de mínimo error cuadrático medio (MMSE)

Compare ambos igualadores y diga cuál tiene mejor comportamiento, justificando la respuesta.

c) De nuevo con una constelación 4-PAM, se analizará ahora un igualador lineal de 5 coeficientes.

i) Elija el retardo que considere más adecuado para obtener las mejores prestaciones, explicando claramente la razón para elegir dicho retardo, y presente el sistema a resolver para obtener los coeficientes del igualador con dicho retardo bajo el criterio de mínimo error cuadrático medio (no es necesario que lo resuelva, pero debe proporcionar los valores numéricos de todos los términos involucrados en el sistema).

II) Calcule la probabildad de error aproximada para el mejor retardo, indicando el valor de dicho retardo, si los coeficientes del igualador son

n	0	1	2	3	4
$w[n]$	0	0,8	0	0,1	0

Ejercicio 2.18 Un sistema digital de comunicaciones en banda base tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\,\delta[n] - 4\,\delta[n-1] + \frac{1}{2}\,\delta[n-2]$$

y el ruido muestreado a la salida del demodulador es blanco y gausiano con varianza $\sigma_z^2 = 0{,}2$.

a) En este caso se utiliza un detector símbolo a símbolo sin memoria diseñado para tener las mejores prestaciones posibles

   I) Si la constelación transmitida es una 4-PAM con niveles normalizados, diseñe el detector símbolo a símbolo óptimo indicando claramente todas sus características (retardo, regiones de decisión,...).

   II) Si la constelación transmitida es una 2-PAM con niveles normalizados, obtenga la probabilidad de error exacta del sistema.

b) Ahora se utiliza un igualador de canal sin restricciones en el número de coeficientes.

   I) Obtenga el igualador con criterio forzador de ceros (ZF), y calcule la probabilidad de error si la constelación utilizada es una constelación 4-PAM con niveles normalizados.

   II) Explique cómo se obtiene el retardo óptimo para este tipo de igualadores de canal.

c) Finalmente, se utiliza un igualador de canal de 3 coeficientes, cuyos coeficientes son

n	0	1	2
$w[n]$	$-0{,}02$	$-0{,}25$	$-0{,}02$

   I) Obtenga el retardo óptimo para la decisión con este receptor, explicando claramente como se ha obtenido.

   II) Estime la probabilidad de error obtenida con este receptor, si la constelación transmitida es una 4-PAM con niveles normalizados.

Ejercicio 2.19 Un sistema digital de comunicaciones en banda base tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = 0{,}3\,\delta[n] - \,\delta[n-2]$$

y el ruido muestreado a la salida del demodulador es blanco y gausiano con varianza $\sigma_z^2 = 0{,}2$. Se transmite una constelación 2-PAM con niveles normalzados, y la secuencia de observaciones a la salida del demodulador es

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q[n]$	$-0{,}6$	$-0{,}8$	$-0{,}5$	$+0{,}2$	$-0{,}5$	$+0{,}3$	$-0{,}5$	$+1{,}1$	$+0{,}3$	$-0{,}7$	$+0{,}2$	$-0{,}7$	$+0{,}1$

a) En este caso se utiliza un detector símbolo a símbolo sin memoria diseñado para tener las mejores prestaciones posibles.

I) Diseñe el detector símbolo a símbolo óptimo indicando claramente todas sus características (retardo, regiones de decisión), y obtenga las decisiones que proporciona ese detector, $\hat{A}[n]$, para los instantes $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

II) Obtenga la probabilidad de error exacta del sistema con ese detector.

b) Ahora se utiliza un igualador de canal sin restricciones en el número de coeficientes.

I) Obtenga el igualador con criterio forzador de ceros (ZF), y calcule la probabilidad de error para ese receptor.

II) Explique cómo se obtiene el retardo óptimo para este tipo de igualadores de canal.

c) Se utiliza un detector de secuencias para decodificar bloques de 3 símbolos de información enviados entre cabeceras cíclicas de dos símbolos. Obtenga la secuencia decodificada $\hat{A}[0], \hat{A}[1], \hat{A}[2]$ aplicando el algoritmo óptimo de decodificación, si la cabecera enviada implica que $A[-2] = A[-1] = A[3] = A[4] = +1$ (debe proporcionar clara evidencia de la aplicación del algoritmo de decodificación óptimo).

Ejercicio 2.20 Un sistema digital de comunicaciones en banda base tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\,\delta[n-1] - 4\,\delta[n-2]$$

el ruido muestreado a la salida del demodulador es blanco y gausiano con varianza $\sigma_z^2 = 0{,}2$, y se utilizan constelaciones M-PAM con niveles normalizados.

a) En este apartado se utiliza un detector símbolo a símbolo sin memoria.

I) Si la constelación transmitida es una 4-PAM, diseñe el detector símbolo a símbolo óptimo indicando claramente todas sus características (retardo, regiones de decisión,...), y obtenga las decisiones $\hat{A}[n]$ para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ si las observaciones son:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q[n]$	$+0{,}7$	$+3{,}8$	$+1{,}3$	$-7{,}4$	$-12{,}1$	$+2{,}5$	$-15{,}3$	$+17{,}4$	$-0{,}1$	$+0{,}25$

II) Si la constelación transmitida es una 2-PAM con niveles normalizados, diseñe el detector símbolo a símbolo óptimo indicando claramente todas sus características, y obtenga la probabilidad de error exacta del sistema.

b) Ahora se utiliza un igualador de canal con 3 coeficientes y la constelación es una 4-PAM.

I) Obtenga el igualador con criterio MMSE y retardo $d = 2$.

II) Calcule el retardo óptimo para la decisión (indicando cómo se ha obtenido) y calcule la probabilidad de error si el igualador es $w[n] = -0{,}3\,\delta[n] + 0{,}1\,\delta[n-1] - 0{,}2\,\delta[n-2]$.

c) Finalmente, transmitiendo una 2-PAM se utiliza un detector de secuencias de máxima verosimilitud. Todos los símbolos de la cabecera cíclica necesaria toman el valor $A[n] = +1$.

I) Obtenga el diagrama de rejilla del sistema.

II) Estime la probabilidad de error de este receptor.

Ejercicio 2.21 Un sistema de comunicaciones en banda base transmite una constelación 2-PAM con niveles normalizados, $A[n] \in \{\pm 1\}$. Se transmite sobre un canal lineal de tal modo que el sistema completo tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2].$$

El ruido que aparece en la señal recibida es blanco y gausiano, con densidad espectral de potencia $N_0/2 = 0{,}01$, y el filtro receptor es un filtro normalizado cuya función de ambigüedad temporal cumple el criterio de Nyquist a tiempo de símbolo.

a) Si se utiliza un receptor símbolo a símbolo sin memoria, obtenga el retardo óptimo para la decisión y calcule la probabilidad de error que se obtiene con dicho receptor.

b) En este caso se va a utilizar un igualador de canal para el receptor.

  i) Diseñe el igualador de canal de 3 coeficientes correpondiente al criterio MMSE para un retardo en la decisión $d = 2$.
  <u>NOTA</u>: Plantee el sistema de ecuaciones a resolver para obtener los coeficientes, indicando claramente los valores numéricos de todos y cada uno de los términos involucrados en el sistema, pero no es necesario que resuelva dicho sistema para obtener los coeficientes del igualador.

  ii) Si los coeficientes del igualador son

$$w[0] = -0{,}4,\; w[1] = +1{,}2,\; w[2] = -0{,}4,$$

  calcule de forma aproximada la probabilidad de error del sistema.

c) Si se utiliza un detector de secuencias de máxima verosimilitud, asumiendo que entre cada bloque de L símbolos de datos se envía una cabecera de 2 símbolos conocidos, en este caso $[+1, +1]$, decodifique, utilizando el algoritmo óptimo de decodificación, la secuencia de símbolos de longitud $L = 3$, $\{A[0], A[1], A[2]\}$, si las observaciones a la salida del demodulador son

n	0	1	2	3	4
$q[n]$	1,6	0,2	0	−0,1	1,3

<u>NOTA</u>: debe dejar clara evidencia de la aplicación del algoritmo empleado.

Ejercicio 2.22 Un sistema digital de comunicaciones en banda base tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \delta[n] + 2\,\delta[n-2].$$

La constelación transmitida es una 2-PAM con niveles normalizados, los símbolos son equiprobables y blancos, y el ruido térmico tiene una densidad espectral de potencia $N_0/2 = 10^{-1}$.

a) Si se usa un receptor símbolo a símbolo sin memoria, obtenga el retardo óptimo para la decisión, y calcule la probabilidad de error exacta que se obtiene con dicho receptor y retardo para la decisión.

b) Diseñe un igualador lineal sin limitación de coeficientes con el criterio de mínimo error cuadrático medio (MMSE) y obtenga su probabilidad de error.

c) Ahora se analizará el detector ML de secuencias (MLSD).

  i) Obtenga su diagrama de rejilla.

II) Obtenga su probabilidad de error.

III) Obtenga la secuencia que con mayor probabilidad fue transmitida si se recibe:

n	0	1	2	3	4
$q[n]$	$+2$	$+2$	0	-2	0

cuando $A[n] = +1$ para $n < 0$ y para $n \geq 3$.

NOTA: Debe dejar clara evidencia de la aplicación del algoritmo empleado.

ALGUNAS RELACIONES DE INTERÉS

Inversa de una matriz de tamaño 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{con } D = a\,d - b\,c$$

Para $|a| \geq |b|$, y n entero, se tienen las siguientes integrales definidas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a \pm b\ \cos(n\,\omega)} d\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left(a \pm b\ \cos(n\,\omega)\right)^2} d\omega = \frac{2\pi a}{\sqrt{\left(a^2 - b^2\right)^3}}$$