

Comunicaciones Digitales

Capítulo 3

Modulaciones angulares (de fase y frecuencia)

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid



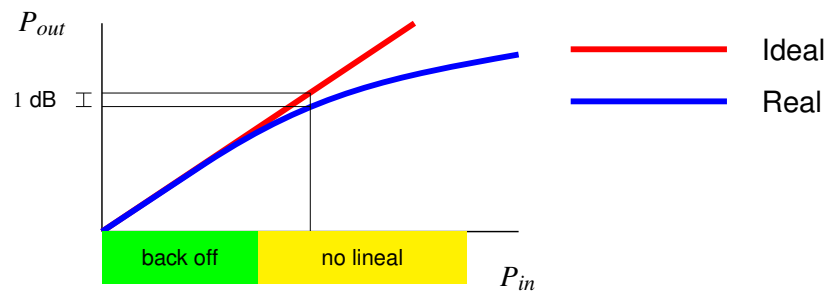
1 / 74

Índice

- Modulaciones de fase (lineales)
 - ▶ Modulación por desplazamiento de fase (PSK)
 - ▶ Modulación PSK en cuadratura (QPSK)
 - ▶ Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)
 - ▶ Modulaciones PSK diferenciales (DPSK)
- Modulaciones de frecuencia (no lineales)
 - ▶ Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)
 - ▶ Modulaciones de mínimo desplazamiento en frecuencia (MSK)
 - ▶ Modulaciones de fase continua (CPM)

Características generales de las modulaciones angulares

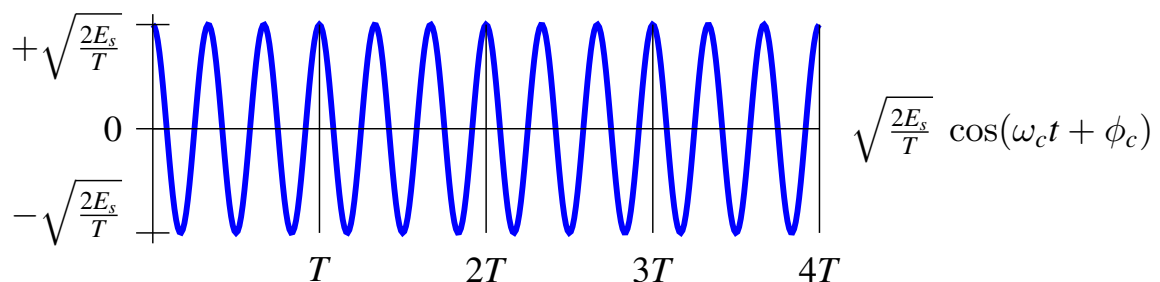
- La información transmitida ($A[n]$) no está impresa en la amplitud de la señal modulada, sino en su información angular
 - ▶ Fase de la señal en el intervalo de símbolo
 - ▶ Frecuencia de la señal en el intervalo de símbolo
- Adecuadas para la transmisión cuando existe una fuerte distorsión de amplitud
 - ▶ Ejemplo: utilización de amplificadores en la zona no lineal



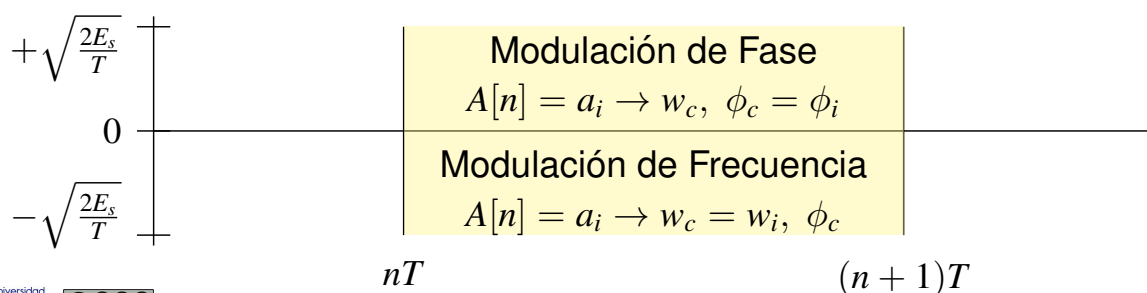
- Inconveniente: ancho de banda más elevado que el de las modulaciones lineales de amplitud

Modulaciones angulares

- Portadora (simusoide) con amplitud constante



- ▶ Dos parámetros: fase ϕ_c / frecuencia ω_c
- Modulación angular: fase / frecuencia en un intervalo de símbolo depende del símbolo transmitido en ese intervalo

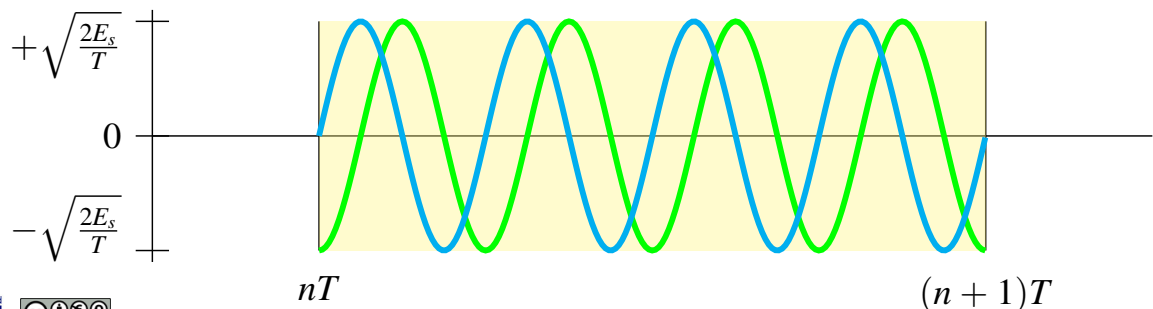
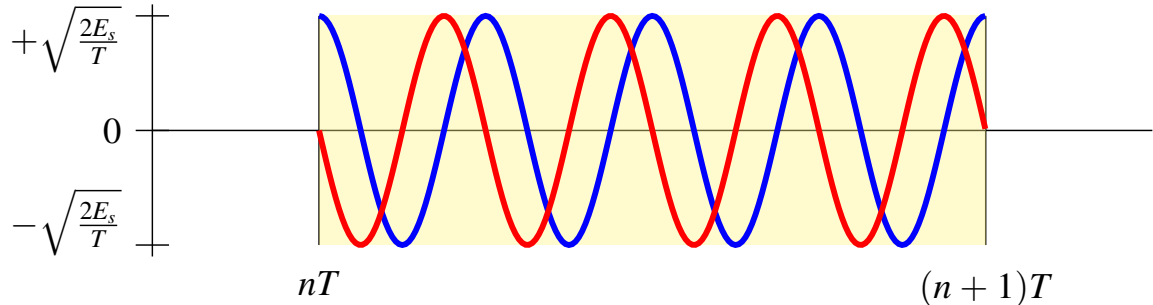


Modulaciones angulares: ejemplo constelaciones 4-árias

$$A[n] \in \{a_0 \text{ (azul)}, a_1 \text{ (rojo)}, a_2 \text{ (verde)}, a_3 \text{ (cyan)}\}$$

$$a_0 \equiv \phi_c = 0 \quad a_1 \equiv \phi_c = 90 \quad a_2 \equiv \phi_c = 180 \quad a_3 \equiv \phi_c = 270$$

● Modulación de fase



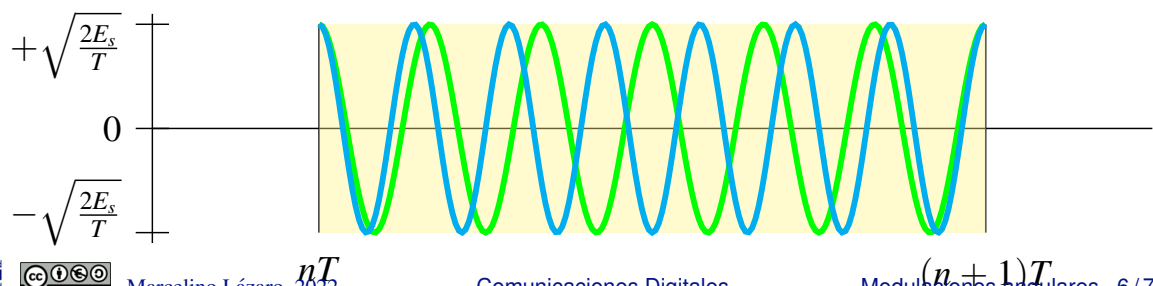
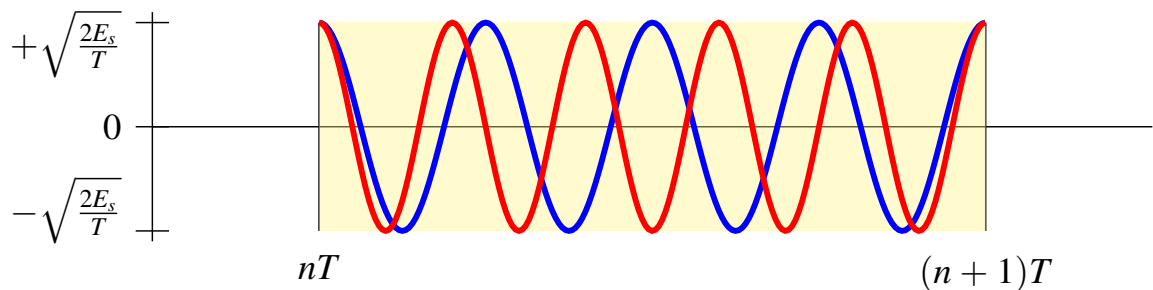
Modulaciones angulares: ejemplo constelaciones 4-árias

$$A[n] \in \{a_0 \text{ (azul)}, a_1 \text{ (rojo)}, a_2 \text{ (verde)}, a_3 \text{ (cyan)}\}$$

$$a_0 \equiv \omega_c = \frac{8\pi}{T} \quad a_1 \equiv \omega_c = \frac{10\pi}{T} \quad a_2 \equiv \omega_c = \frac{12\pi}{T} \quad a_3 \equiv \omega_c = \frac{14\pi}{T} \text{ rad/s}$$

$$a_0 \equiv f_c = 4R_s \quad a_1 \equiv f_c = 5R_s \quad a_2 \equiv f_c = 6R_s \quad a_3 \equiv f_c = 7R_s \text{ Hz}$$

● Modulación de frecuencia



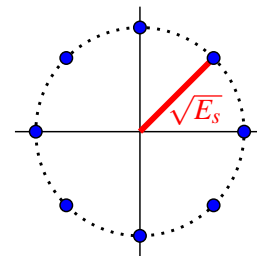
Modulaciones de fase

● Modulación PSK (Phase Shift Keying): lineal (PAM paso banda)

► Constelaciones de módulo constante - Información en la fase

★ Símbolos

$$A[n] = \sqrt{E_s} e^{j\phi[n]}$$



★ Señal compleja banda base

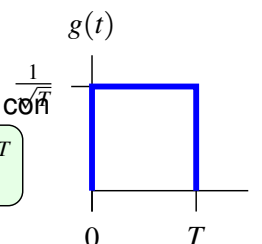
$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) = \sqrt{E_s} \sum_n e^{j\phi[n]} g(t - nT)$$

★ Señal modulada paso banda

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ s(t) e^{j\omega_c t} \} = \sqrt{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n g(t - nT) e^{j(\omega_c t + \phi[n])} \right\} \\ &= \underbrace{\sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT)}_{\text{envolvente}} \cos(\omega_c t + \phi[n]) \end{aligned}$$

► Filtro transmisor : envolvente constante se puede conseguir con

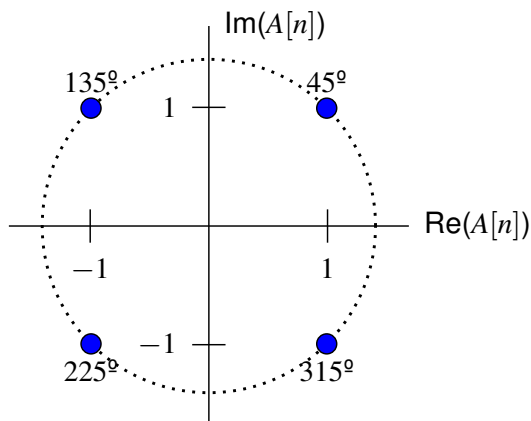
$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_T(t), \quad w_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



● Inconveniente: ancho de banda elevado (saltos de fase en $t = nT$)

$$S_X(j\omega) = \frac{E_s}{2T} \left[|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(j\omega + j\omega_c)|^2 \right], \quad |G(j\omega)| = \sqrt{T} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right)$$

Modulación QPSK - $M = 4$ - Constelación



$$\phi[n] = 45^\circ: A[n] = +1 + j \equiv \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\phi[n] = 135^\circ: A[n] = -1 + j \equiv \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\phi[n] = 225^\circ: A[n] = -1 - j \equiv \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\phi[n] = 315^\circ: A[n] = +1 - j \equiv \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Saltos de fase en señal QPSK

● Señal PSK

$$x(t) = \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t) - \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

$$= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT) \cos(\omega_c t + \phi[n])$$

siendo

$$s_I(t) = \sum_n \mathcal{R}e\{A[n]\}g(t - nT) = \sum_n A_I[n] g(t - nT)$$

$$s_Q(t) = \sum_n \mathcal{I}m\{A[n]\}g(t - nT) = \sum_n A_Q[n] g(t - nT)$$

● Saltos de fase

- ▶ $\pm 90^\circ$: cambia $s_I(t)$ o $s_Q(t)$
- ▶ 180° : cambian $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ simultáneamente

Relaciones trigonométricas

$$+\cos(\omega_c t) - \sin(\omega_c t) = \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 45^\circ)$$

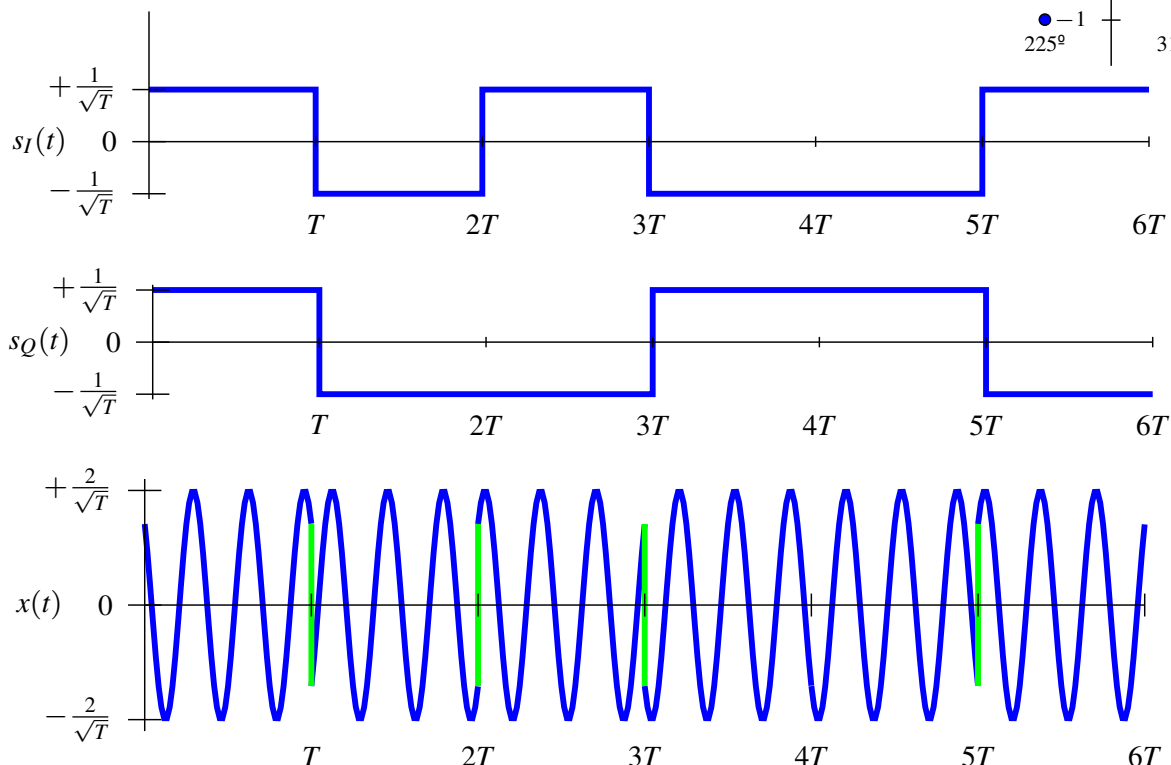
$$-\cos(\omega_c t) - \sin(\omega_c t) = \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 135^\circ)$$

$$-\cos(\omega_c t) + \sin(\omega_c t) = \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 225^\circ)$$

$$+\cos(\omega_c t) + \sin(\omega_c t) = \sqrt{2} \cos(\omega_c t + 315^\circ)$$

Modulación QPSK

$$A[0] = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[2] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[3] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[4] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[5] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Modulación QPSK con desplazamiento temporal (OQPSK)

- Se eliminan los saltos de 180°
 - ▶ Evitar que coincidan las transiciones de $s_I(t)$ y $s_Q(t)$
- Señal OQPSK
 - ▶ Se retarda la componente en cuadratura $T/2$
 - ▶ Saltos sólo de $\pm 90^\circ$
 - ▶ Saltos más frecuentes (cada $T/2$)

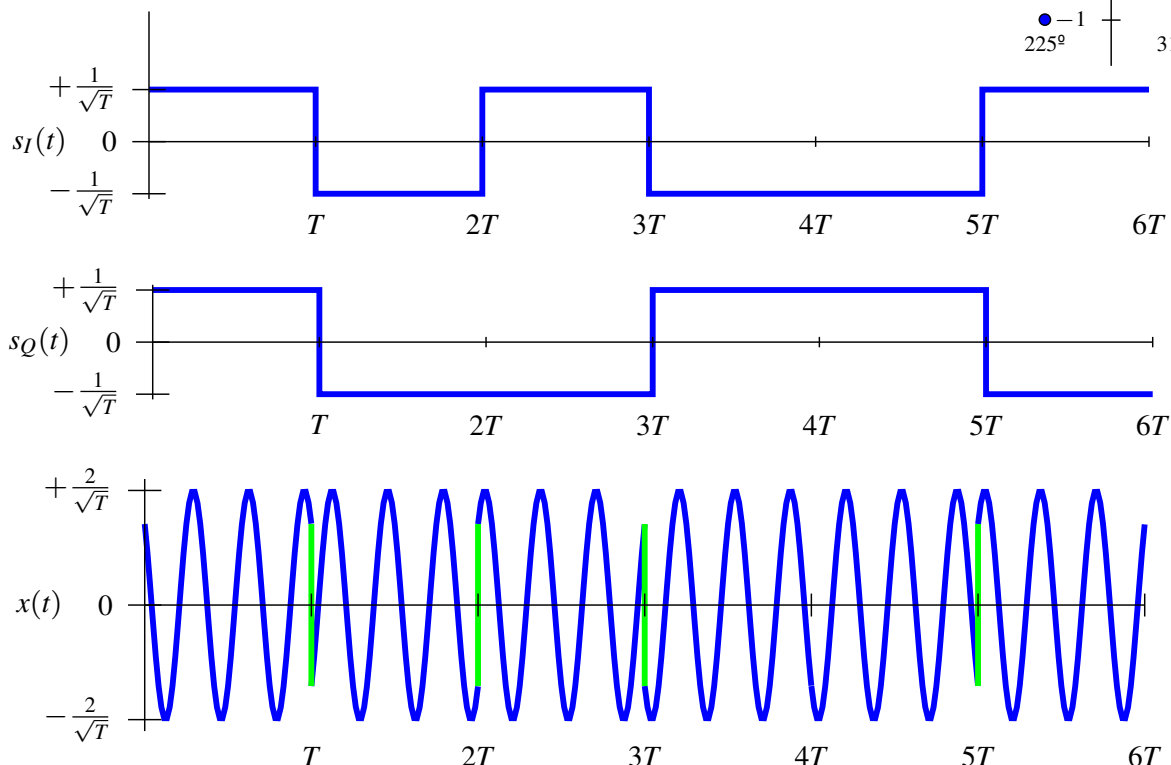
$$x(t) = \sqrt{2} s_I(t) \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} s_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

$$s_I(t) = \sum_n A_I[n] g(t - nT)$$

$$s_Q(t) = \sum_n A_Q[n] g(t - nT - T/2)$$

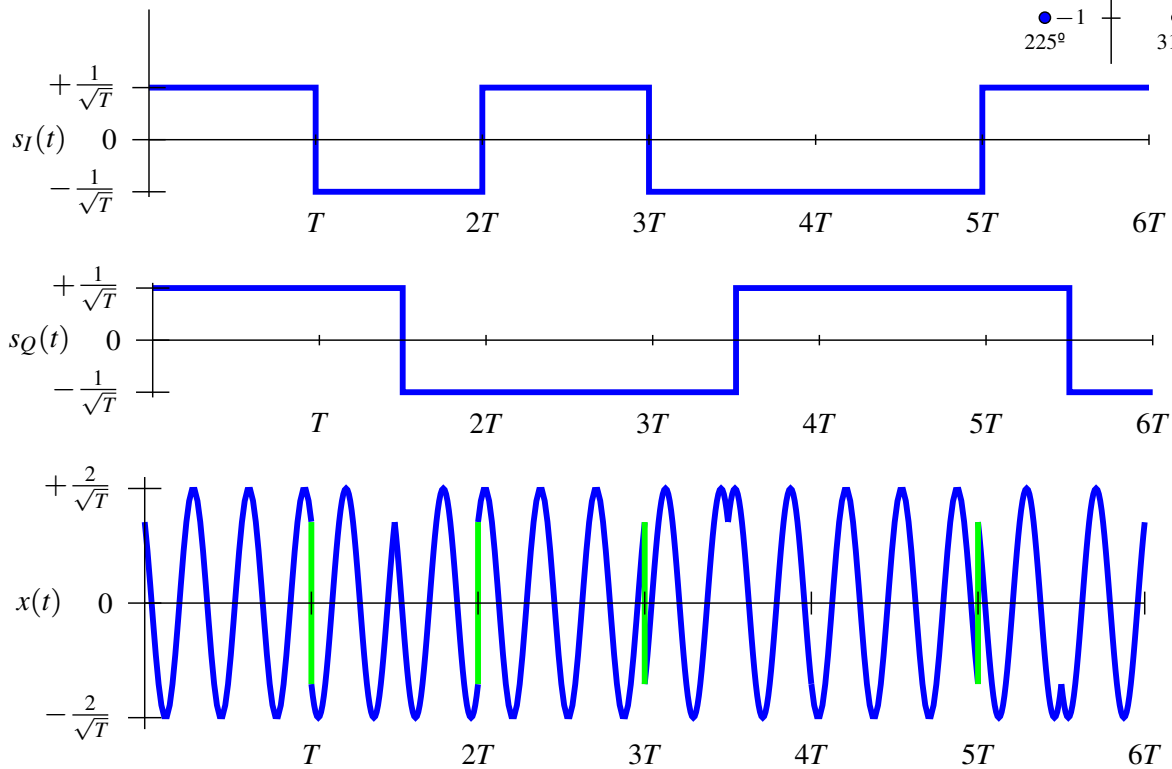
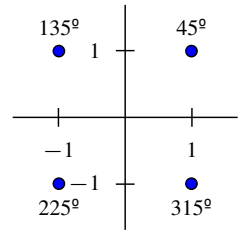
Modulación QPSK

$$A[0] = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[2] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[3] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[4] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[5] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

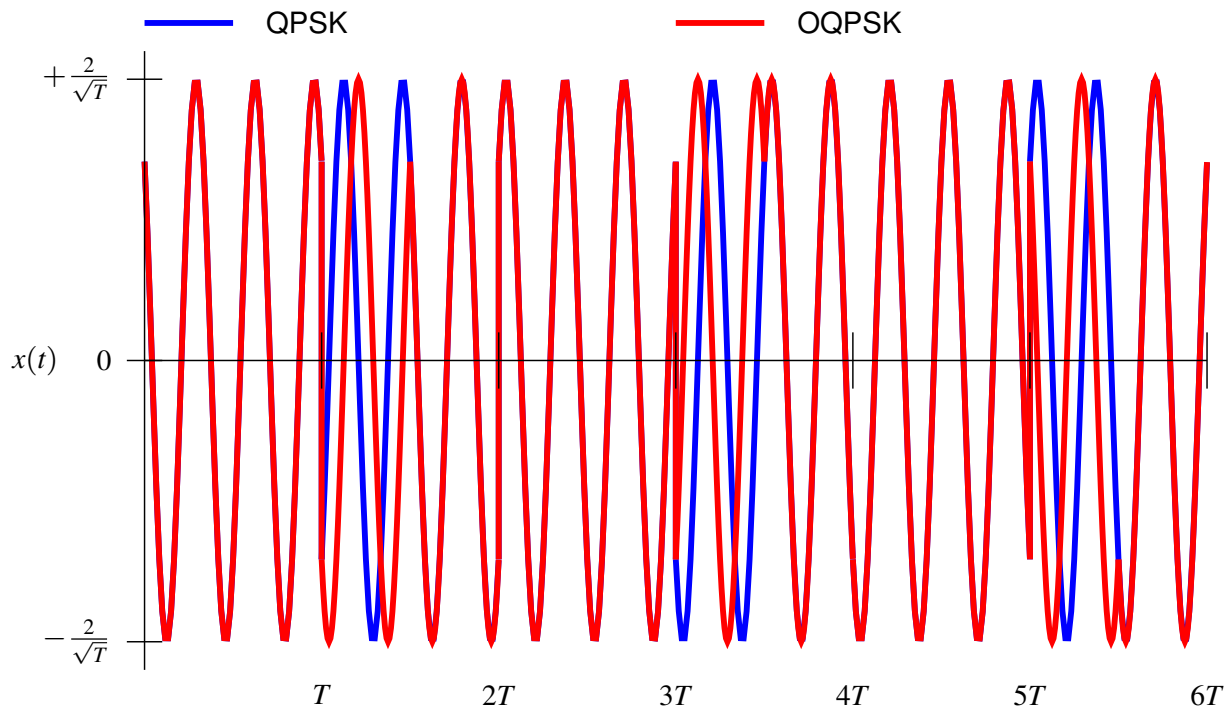


Modulación OQPSK - Retardo de $s_Q(t)$

$$A[0] = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[2] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, A[3] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[4] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, A[5] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Modulación QPSK vs OQPSK



Espectro de la señal OQPSK

- Definición

$$x_I(t) = \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t), \quad x_Q(t) = \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t)$$

- Espectro de cada componente ($s_k, k \in \{I, Q\}$)

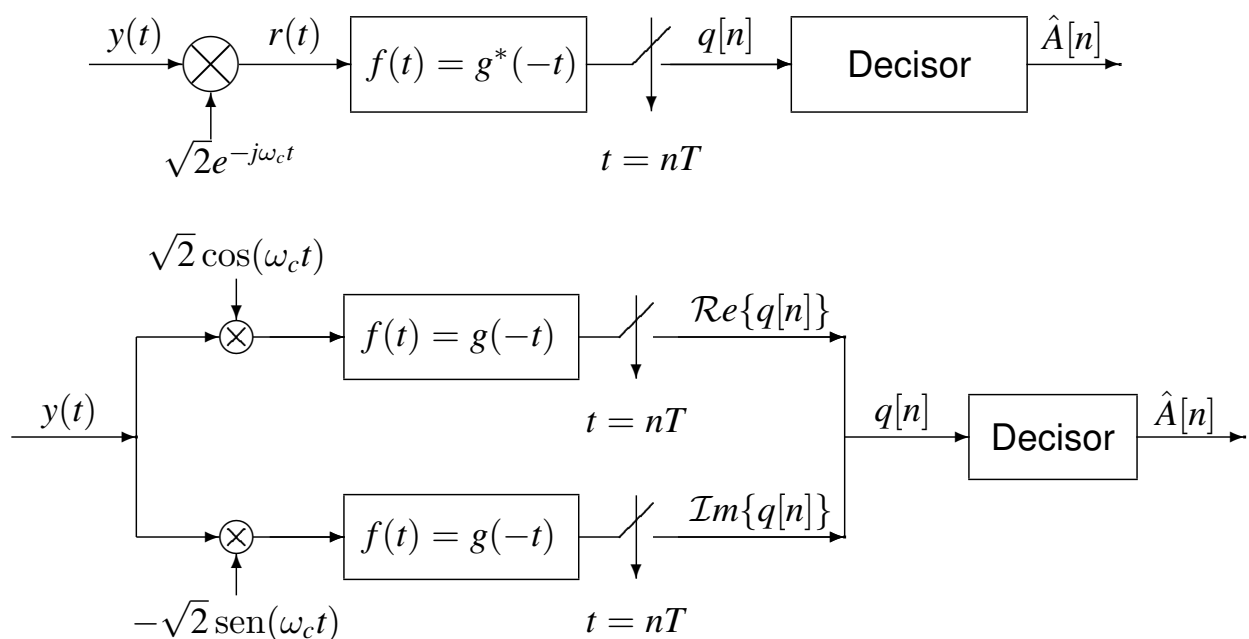
$$S_{x_k}(j\omega) = \frac{1}{2} [S_{s_k}(j\omega - j\omega_c) + S_{s_k}^*(-j\omega - j\omega_c)]$$

$$S_{s_I}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\mathcal{Re}\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2, \quad S_{s_Q}(j\omega) = \frac{\mathcal{E}\{\mathcal{Im}\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2$$

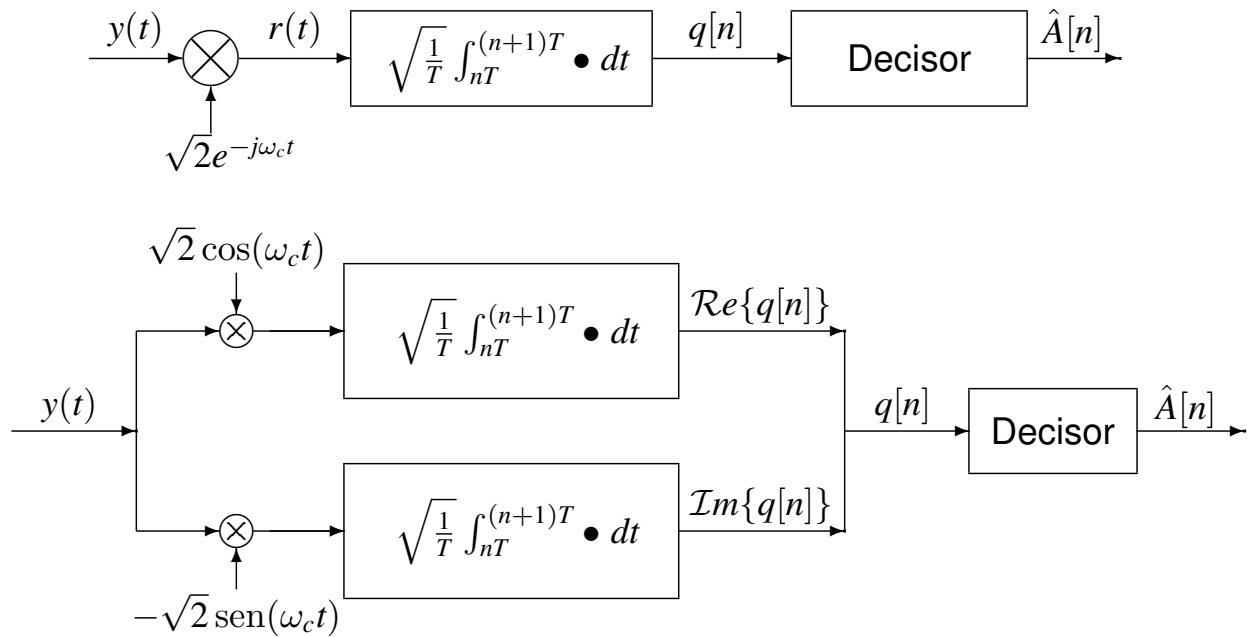
- Espectro OQPSK

$$S_X(j\omega) = \frac{E_s}{2T} [|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(-j\omega - j\omega_c)|^2]$$

Receptor para modulaciones de fase PSK

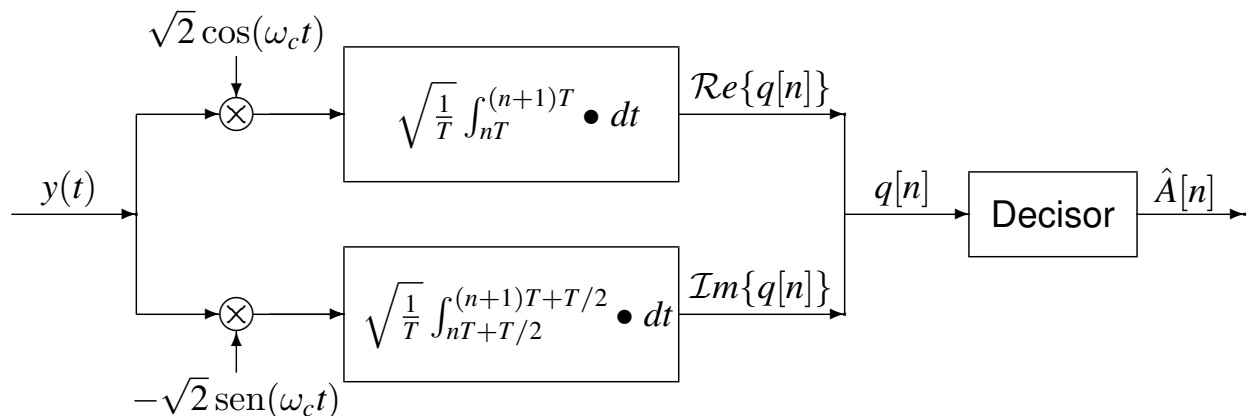


Receptor para modulaciones de fase PSK (II)



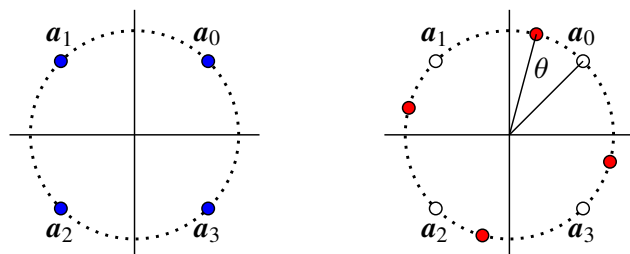
Receptor para modulaciones OQPSK

Hay que tener en cuenta el retardo de $T/2$ en la componente en cuadratura: retardo en el correlador



Efecto de un receptor no coherente en modulaciones PSK

- En un receptor no coherente, las fases de las portadoras usadas para demodular (θ_R) es distinta de la fase de las portadoras utilizadas en el transmisor para modular (θ_T)
 - Diferencia de $\theta = \theta_R - \theta_T$ radianes
- El efecto de esta diferencia de fase es que la constelación recibida está rotada θ radianes

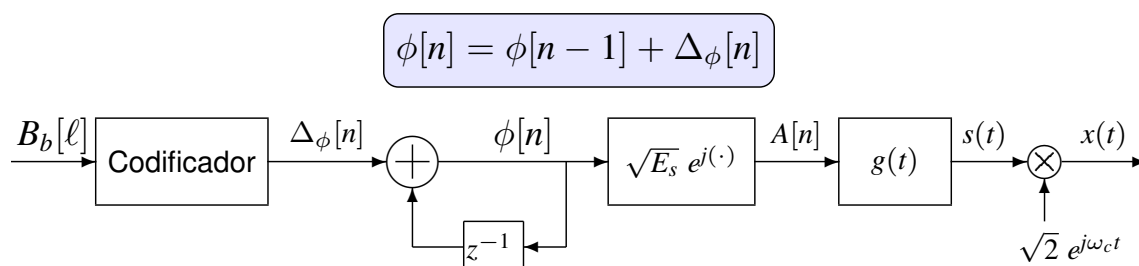


Fase transmitida $\phi[n]$ Fase recibida $\phi_R[n] = \phi[n] + \theta$

- Este efecto puede afectar seriamente al rendimiento
- Sin embargo, receptores no coherentes tienen menor coste
 - Modulaciones PSK diferenciales (DPSK) permiten usar receptores no coherentes

Modulación de fase diferencial (DPSK)

- No requieren un receptor coherente
- Modulación PSK con codificación diferencial



- Codificador para modulación M -ária (M símbolos)

$$\Delta\phi[n] \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \dots, \frac{2\pi(M-1)}{M} \right\} \text{ rad}$$

Asignación binaria se realiza sobre $\Delta\phi[n]$

Ejemplo: 4-PSK

$\Delta\phi[n]$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Bits	00	01	11	10

(Codificación Gray)

- Inicialización: selección de un valor arbitrario (conocido) para $\phi[-1]$

- No hay propagación de errores debido a la inicialización

Demodulación de fase diferencial

● Decodificación de los m bits asociados al instante n

► Modulación PSK

- ★ A partir de $\hat{\phi}[n]$ (estima de la fase del símbolo recibido)

$$\phi_R[n] = \phi[n] + \theta \Rightarrow \hat{\phi}[n] \Rightarrow m \text{ bits}$$

El desfase θ en la fase del símbolo recibido puede ser catastrófico!!!

► Modulación DPSK

- ★ A partir de $\hat{\Delta}_{\phi}[n]$ (estima de la diferencia de fases)

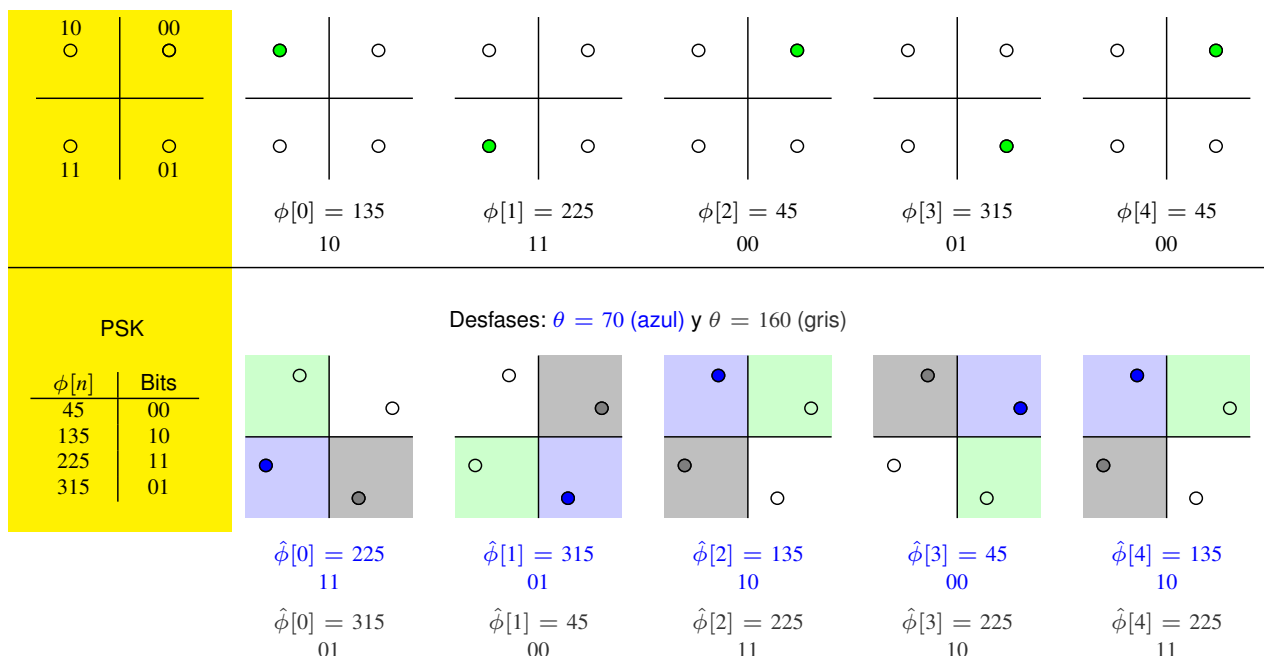
$$\phi_R[n] = \phi[n] + \theta, \quad \phi_R[n-1] = \phi[n-1] + \theta$$

$$\Delta_{\phi_R}[n] = \phi_R[n] - \phi_R[n-1] = \phi[n] - \phi[n-1]$$

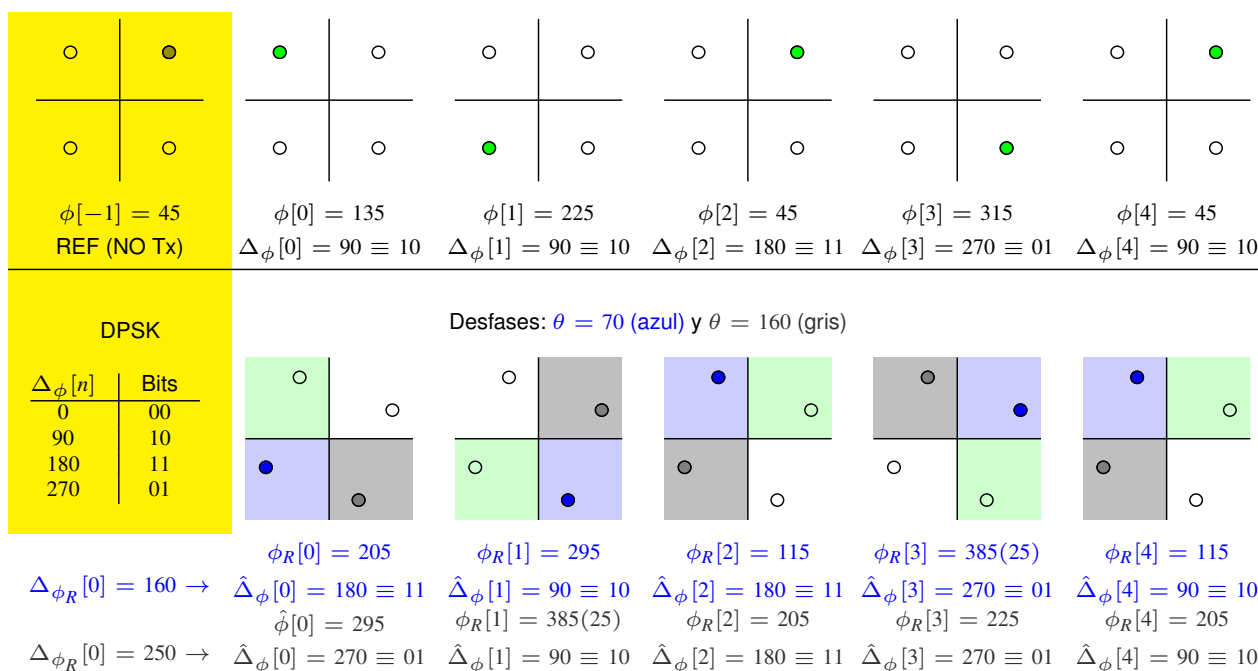
$$\Delta_{\phi_R}[n] \Rightarrow \hat{\Delta}_{\phi}[n] \Rightarrow m \text{ bits}$$

En la diferencia de fases θ es irrelevante

Efecto de un receptor no coherente en modulaciones PSK



Efecto de un receptor no coherente en modulaciones DPSK



ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_b[\ell]$	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
$\hat{B}_b[\ell]$	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$\hat{B}_b[\ell]$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0

Modulación / Demodulación DPSK - Ejemplo

● Constelación 4-PSK

$$\phi[n] \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \quad \Delta\phi[n] \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \phi[-1] = \frac{\pi}{4}$$

● Asignación binaria

PSK: Asignación binaria se realiza sobre $\phi[n]$

$\phi[n]$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
Bits	00	01	11	10

(Codificación Gray)

DPSK: Asignación binaria se realiza sobre $\Delta\phi[n]$

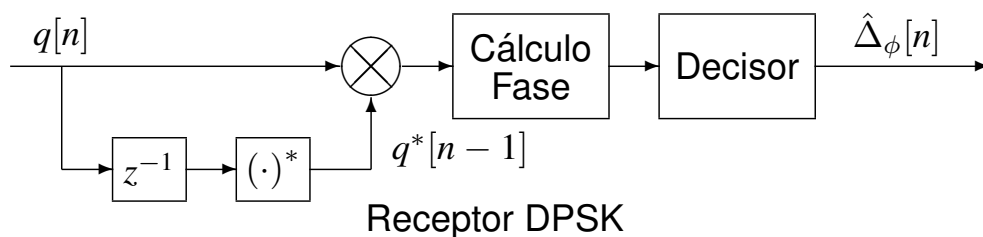
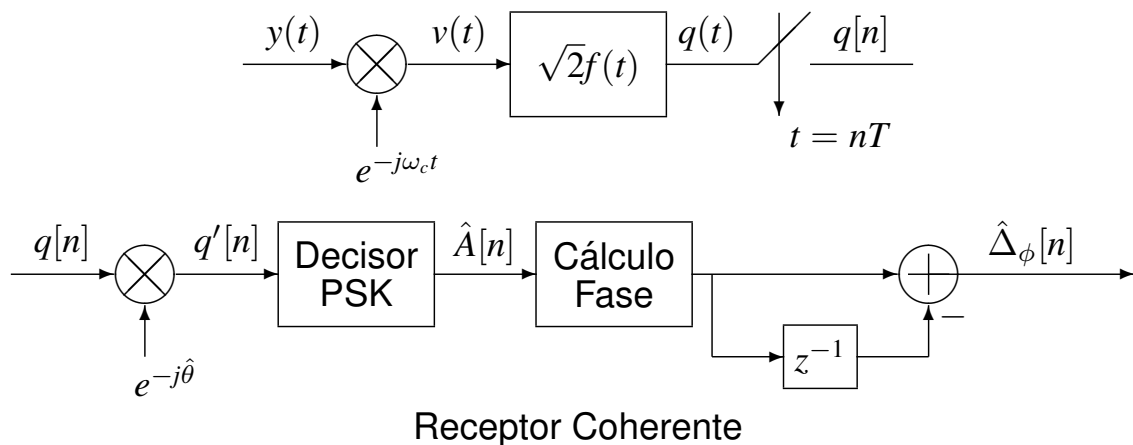
$\Delta\phi[n]$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Bits	00	01	11	10

(Codificación Gray)

● Secuencia binaria a transmitir $B_b[\ell] = 00\ 10\ 01\ 11\ 10 \dots$

n	0	1	2	3	4
$B[n]$	00	10	01	11	10
PSK: $\phi[n]$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
PSK: $\phi_R[n]$	$\frac{\pi}{4} + \theta$	$\frac{7\pi}{4} + \theta$	$\frac{3\pi}{4} + \theta$	$\frac{5\pi}{4} + \theta$	$\frac{7\pi}{4} + \theta$
DPSK: $\Delta\phi[n]$	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
DPSK: $\phi[n]$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
DPSK: $\phi_R[n]$	$\frac{\pi}{4} + \theta$	$\frac{7\pi}{4} + \theta$	$\frac{\pi}{4} + \theta$	$\frac{5\pi}{4} + \theta$	$\frac{3\pi}{4} + \theta$
DPSK: $\Delta\phi_R[n]$	θ	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

Demodulador PSK (Diferencial)



Receptor DPSK (no coherente)

● Observación

$$q[n] = \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n] + \theta)} + z[n]$$

► Observación anterior (complejo conjugada)

$$q^*[n-1] = \sqrt{E_s} e^{-j(\phi[n-1] + \theta)} + z^*[n-1]$$

● Multiplicador

$$\begin{aligned} q[n] \times q^*[n-1] &= E_s e^{j(\phi[n] - \phi[n-1])} + \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n] + \theta)} z^*[n-1] \\ &\quad + \sqrt{E_s} e^{-j(\phi[n-1] + \theta)} z[n] + z[n] z^*[n-1] \end{aligned}$$

● Decisión

$$\hat{\Delta}_{\phi_R}[n] = \angle \{ q[n] \times q^*[n-1] \}$$

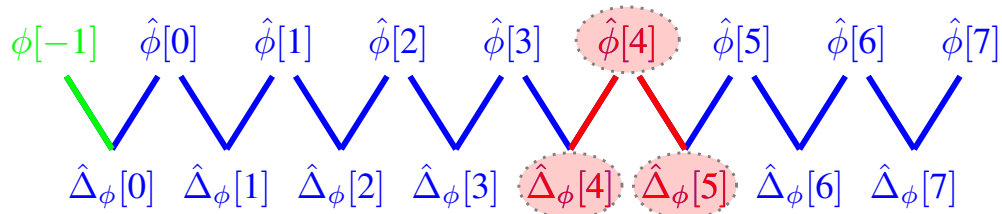
$$\hat{\Delta}_\phi[n] = \arg \min_{\Delta_\phi[n]} d \left(\hat{\Delta}_{\phi_R}[n], \Delta_\phi[n] \right)$$

Probabilidad de error para DPSK

- Probabilidad de error usando receptores coherentes

$$P_e \approx 2 P_e^{PSK}$$

- ▶ Un error en un símbolo decidido $\hat{A}[n]$ (fase $\hat{\phi}[n]$) afecta a dos incrementos de fase $\Delta\phi[n]$ y $\Delta\phi[n+1]$



- No tiene mucho sentido utilizar una modulación diferencial si se dispone de receptores coherentes
 - ▶ No hay ninguna ventaja en el coste del receptor
 - ▶ Las prestaciones son peores que utilizando una PSK convencional (no diferencial)

Probabilidad de error para DPSK (II)

- Probabilidad de error con receptores no-coherentes

- ▶ Para decodificar se procesan dos observaciones ($q[n]$, $q[n-1]$)
 - ★ Efecto de dos muestras de ruido

$$z[n], z[n-1]$$

- ▶ Estadístico para la decisión

$$\frac{q[n] \times q^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} = \underbrace{\sqrt{E_s} e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])}}_{\text{Fase } \Delta\phi[n]}$$

$$+ e^{j(\phi[n]+\theta)} z^*[n-1] + e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} z[n] + \frac{z[n] z^*[n-1]}{\sqrt{E_s}}$$

Receptor coherente PSK

$$q[n] = \underbrace{\sqrt{E_s} e^{j\phi[n]}}_{\text{Fase } \phi[n]} + z[n]$$

- ▶ Términos de ruido (tres)
 - ★ El último es despreciable para E_s/σ_z^2 alto
 - ★ Los otros dos: independientes, circularmente simétricos
- ▶ Relación señal a ruido: pérdida de 3 dB (energía de ruido $\approx \times 2$)
 - ★ Energía Señal: E_s
 - ★ Energía Ruido: $\approx 2\sigma_z^2$

Modulación por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- Información: pulsos de frecuencia discreta de una portadora
- M pulsos (para mapear M símbolos)

$$g_i(t) = \sin(\omega_i t) w_T(t), \quad i = 0, 1, \dots, M-1$$

- Codificador: define el índice del pulso transmitido en el instante n

$$A[n] \in \{i = 0, 1, \dots, M-1\}$$

- Señal FSK en el dominio del tiempo

$$x(t) = K \sum_n g_{A[n]}(t - nT)$$

- FSK de fase continua (CPFSK)

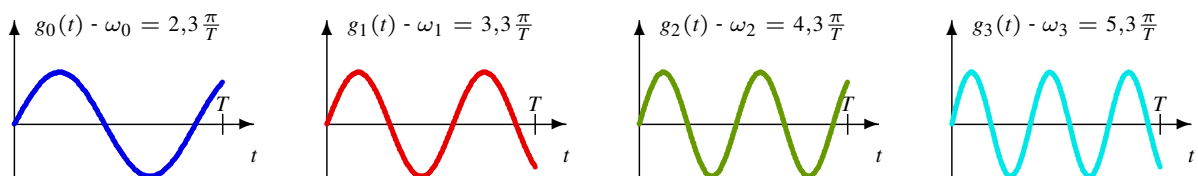
- ▶ Continuidad de fase: pulsos con un número entero de períodos en T segundos

$$\text{Frecuencias: } \omega_i = \frac{2\pi}{T} \times N_i \text{ rad/s, } f_i = R_s \times N_i \text{ Hz, } N_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, \dots, M-1$$

- ▶ Ancho de banda mínimo: N_i consecutivos (espectro de $g_i(t)$ está en torno a ω_i)

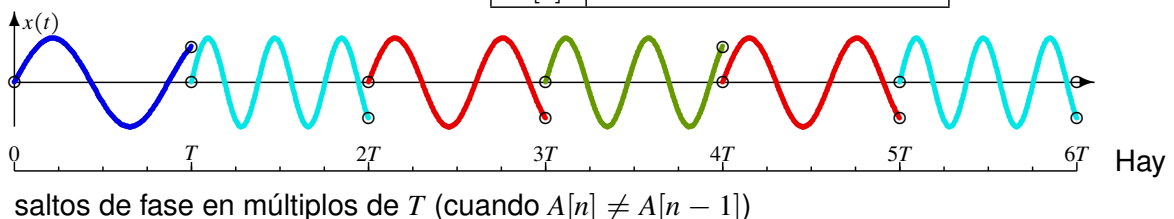
Formas de onda FSK - Ejemplo para $M = 4$ - Saltos de fase

- Ejemplo con frecuencias que no son múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}$ rad/s



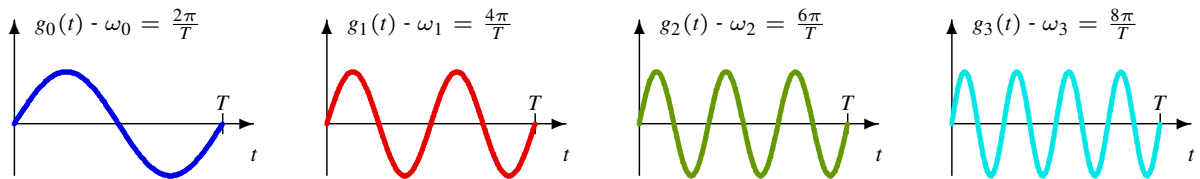
- Waveform for data sequence

n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



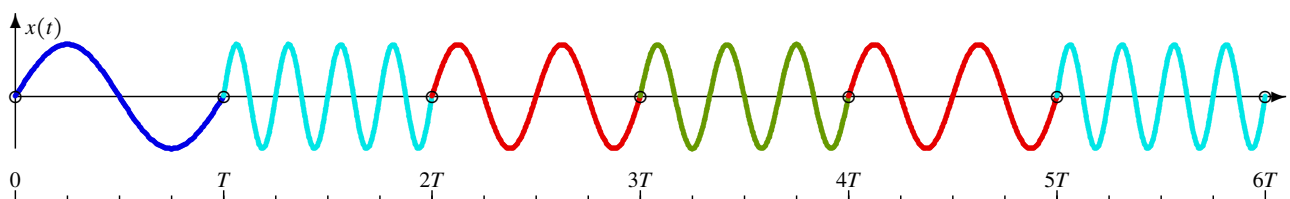
Formas de onda CPFSK - Ejemplo para $M = 4$

- Pulsos CPFSK para $M = 4$ (un posible ejemplo)



- Forma de onda para secuencia de datos

n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



Ortogonalidad de los pulsos CPFSK

- Producto escalar entre dos pulsos

$$\begin{aligned}
 \langle g_i(t), g_\ell(t) \rangle &= \int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_\ell t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \underbrace{\cos((\omega_i - \omega_\ell) t)}_{(N_i - N_\ell) \frac{2\pi}{T}} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \underbrace{\cos((\omega_i + \omega_\ell) t)}_{(N_i + N_\ell) \frac{2\pi}{T}} dt \\
 &= \frac{T}{2} \delta[i - \ell] \quad \text{Pulsos CPFSK son ortogonales!!!}
 \end{aligned}$$

- Definición de una base ortonormal (dimensión M)

$$\phi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_i t) w_T(t) \quad i = 0, 1, \dots, M-1$$

- Señal CPFSK como expansión en la base ortonormal

$$x(t) = \sqrt{E_s} \sum_n \phi_{A[n]}(t - nT)$$

Receptor para CPFSK (coherente)

- Base ortonormal (espacio M -dimensional)

- ▶ Constelación ortogonal (dimensión M)

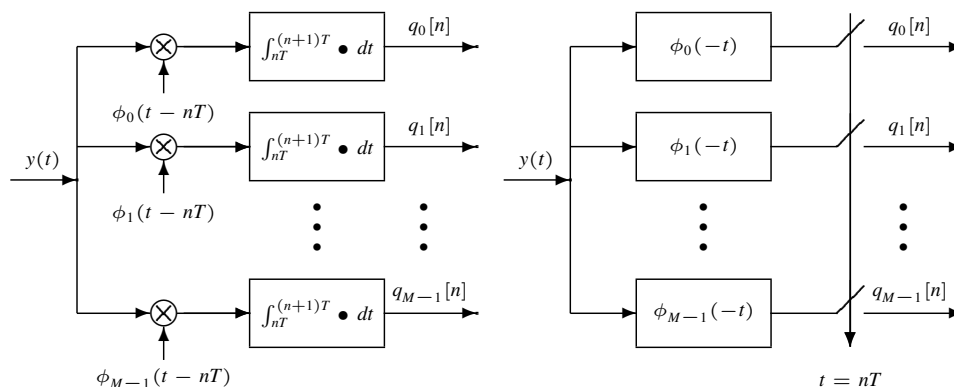
$$A[n] = 0 \equiv \mathbf{a}_0 = [\sqrt{E_s}, 0, 0, 0, \dots, 0]^T$$

$$A[n] = 1 \equiv \mathbf{a}_1 = [0, \sqrt{E_s}, 0, 0, \dots, 0]^T$$

$$A[n] = k \equiv \mathbf{a}_k = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k \sqrt{E_s}, 0, \dots, 0]^T$$

$$A[n] = M - 1 \equiv \mathbf{a}_{M-1} = [0, 0, \dots, 0, \sqrt{E_s}]^T$$

- ▶ Estructura del receptor



Receptores para CPFSK - Prestaciones

- Receptor coherente con filtros adaptados o correladores

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- Efecto de los errores de fase - Ejemplo: $n = 0$, $A[n] = i$, error de fase θ

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_i t + \theta) w_T(t)$$

Salida del demodulador de índice ℓ (producto escalar de $y(t)$ con $\phi_\ell(t)$)

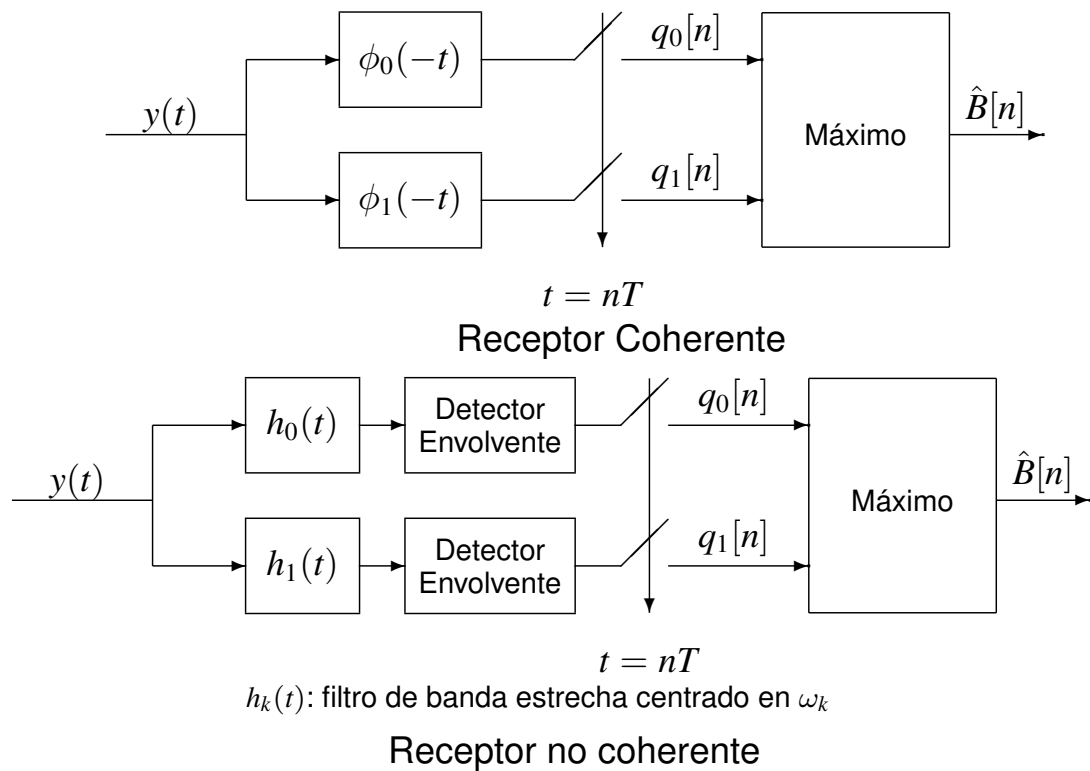
$$\begin{aligned} q_\ell[0] &= \int_0^T y(t) \phi_\ell(t) dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_i t + \theta) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{\sqrt{E_s}}{T} \int_0^T [\cos((\omega_i - \omega_\ell)t + \theta) - \cos((\omega_i + \omega_\ell)t + \theta)] dt \\ &= \sqrt{E_s} \cos(\theta) \delta[i - \ell] \end{aligned}$$

- ▶ Valor ideal: $\sqrt{E_s}$

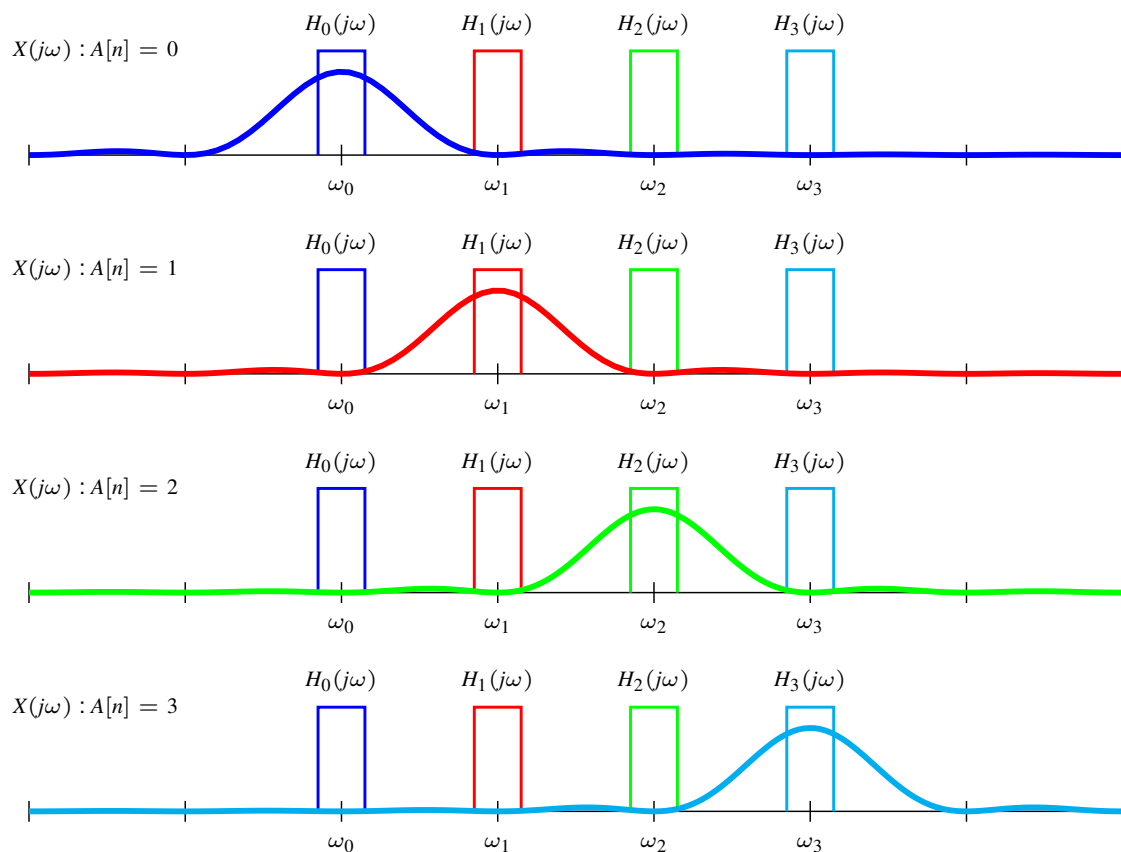
- ▶ Término de atenuación: $\cos(\theta)$

- ▶ Necesidad de receptores coherentes (síncronos)

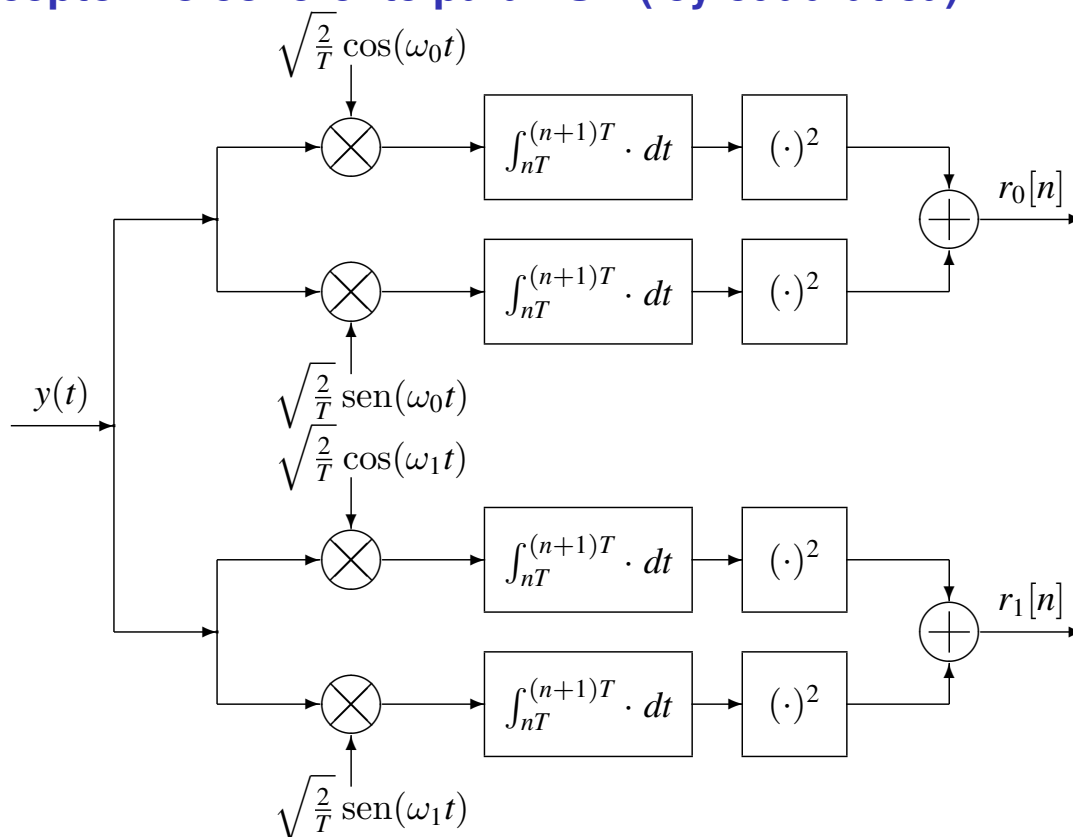
Receptor coherente/no-coherente FSK binaria ($M = 2$)



Detector CPFSK con filtros de banda estrecha ($M = 4$)



Receptor no coherente para FSK (ley cuadrática)



Receptor no coherente para FSK (ley cuadrática)

- Ejemplo: $n = 0$, $A[n] = i$, error de fase θ

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \text{sen}(\omega_i t + \theta) w_T(t)$$

Salida de los correladores de índice ℓ

$$\begin{aligned} q_{\ell,0}[0] &= \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \text{sen}(\omega_i t + \theta) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{\sqrt{E_s}}{T} \int_0^T [\text{sen}((\omega_i - \omega_\ell)t + \theta) + \text{sen}((\omega_i + \omega_\ell)t + \theta)] dt \\ &= \sqrt{E_s} \text{sen}(\theta) \delta[i - \ell] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\ell,1}[0] &= \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \text{sen}(\omega_i t + \theta) \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen}(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{\sqrt{E_s}}{T} \int_0^T [\cos((\omega_i - \omega_\ell)t + \theta) - \cos((\omega_i + \omega_\ell)t + \theta)] dt \\ &= \sqrt{E_s} \cos(\theta) \delta[i - \ell] \end{aligned}$$

Salida total de la rama de índice ℓ del demodulador

$$r_\ell[0] = (q_{\ell,0}[0])^2 + (q_{\ell,1}[0])^2 = E_s \delta[i - \ell]$$

- El ruido incluye la contribucion de los dos correladores por rama

FSK como desplazamiento en frecuencia

Definición de frecuencia central

$$\omega_c = \frac{\omega_0 + \omega_{M-1}}{2} = \frac{\pi}{T} C, \quad C \in \mathbb{Z}, \quad C \text{ impar}$$

- ▶ Valor de la frecuencia central ω_c : múltiplo impar de $\frac{\pi}{T}$
- ▶ Frecuencia del pulso del símbolo en el instante discreto n

$$\omega_c + I[n] \frac{\pi}{T}$$

Codificador

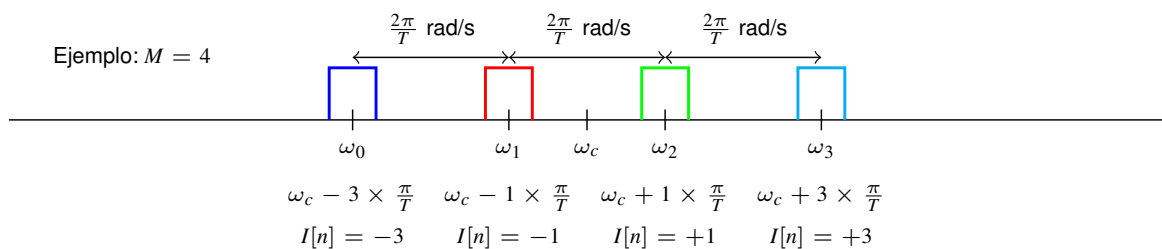
$$I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

Expresión FSK como desplazamientos desde ω_c

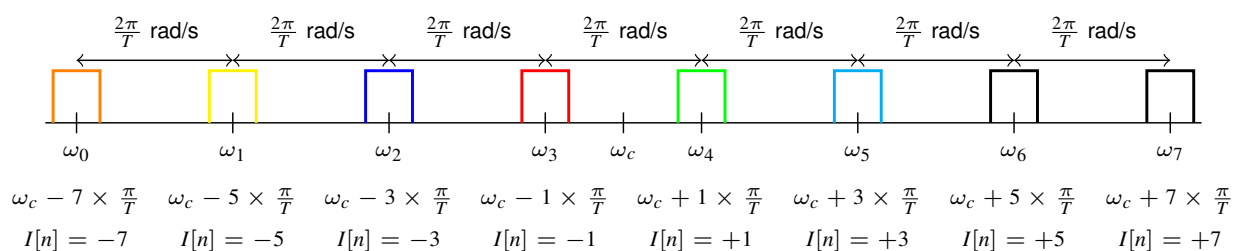
$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \sin\left(\omega_c t + I[n] \times \frac{\pi}{T} t\right) w_T(t - nT)$$

FSK como desplazamiento en frecuencia (II)

Ejemplo: $M = 4$



Ejemplo: $M = 8$



Espectro de la señal FSK

- La media de la señal es periódica
- Espectro discreto (espectro de la media periódica)

$$S_{Xd}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{(MT)^2} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \sum_k \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right)$$

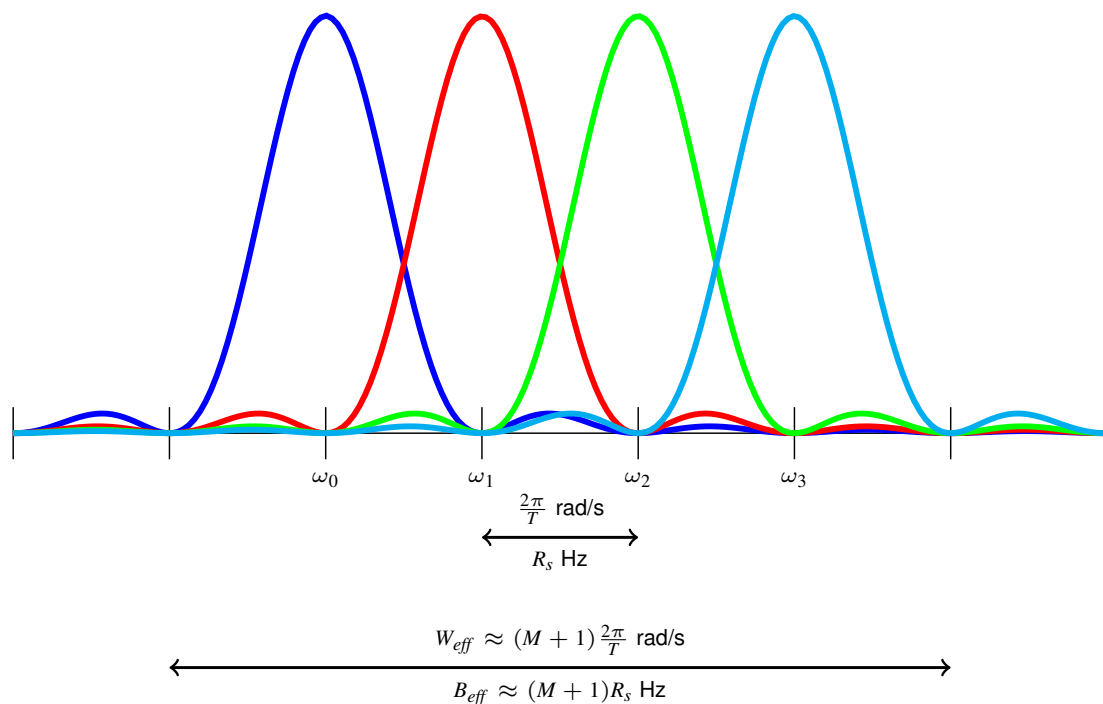
- Espectro continuo

$$S_{Xc}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{MT} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} |G_i(j\omega)|^2 - \frac{1}{M} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \right\}$$

- FSK - Densidad espectral de potencia

$$S_X(j\omega) = S_{Xc}(j\omega) + S_{Xd}(j\omega)$$

Espectro CPFSK, ejemplo $M = 4$



Modulación MSK (Minimum shift keying)

- Información: cambios de frecuencia en la frecuencia de una portadora
- Mínima separación de frecuencia entre portadoras (casi) ortogonales
- Producto escalar de pulsos $g_i(t)$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_\ell \rangle &= \int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_\ell t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i - \omega_\ell)t] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i + \omega_\ell)t] dt \\ &= \frac{T \sin[(\omega_i - \omega_\ell)T]}{2(\omega_i - \omega_\ell)} - \frac{T \sin[(\omega_i + \omega_\ell)T]}{2(\omega_i + \omega_\ell)}\end{aligned}$$

- Separación mínima (sistemas de banda estrecha)

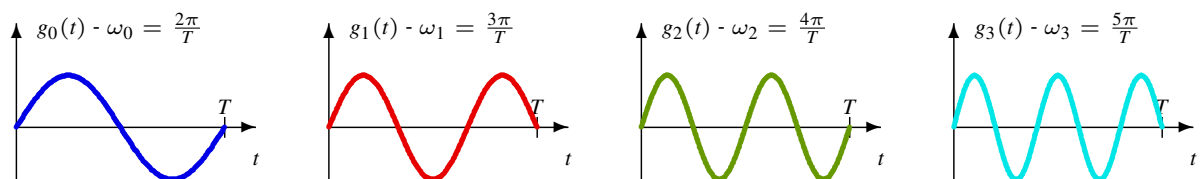
► Asunción: $\frac{\sin[(\omega_i + \omega_\ell)T]}{(\omega_i + \omega_\ell)}$ se puede despreciar (denominador elevado)

$$\omega_i - \omega_\ell = \frac{\pi}{T} \times N_{i,\ell} \text{ rad/s, con } N_{i,\ell} \in \mathbb{Z}, \quad i, \ell = 0, 1, \dots, M-1, \quad i \neq \ell$$

$$f_i - f_\ell = \frac{R_s}{2} \times N_{i,\ell} \text{ Hz}$$

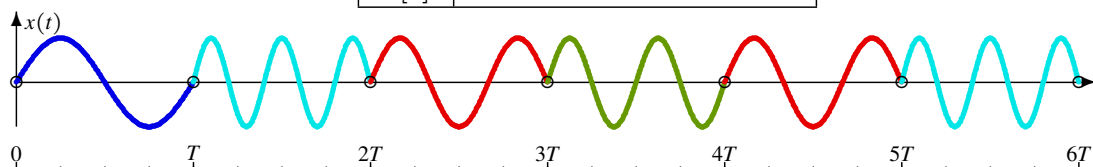
Formas de onda MSK - Ejemplo para $M = 4$

- Pulsos para $M = 4$ (un posible ejemplo)

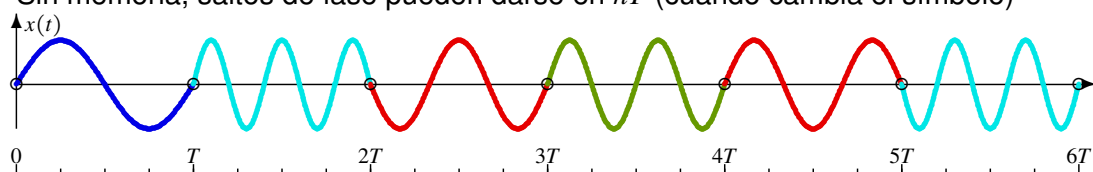


- Forma de onda para

n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



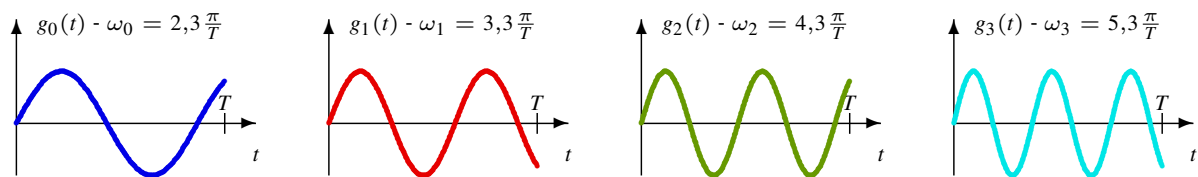
Sin memoria, saltos de fase pueden darse en nT (cuando cambia el símbolo)



Identificación de la fase al final de cada intervalo de símbolo ($\theta[n]$) permite la continuidad

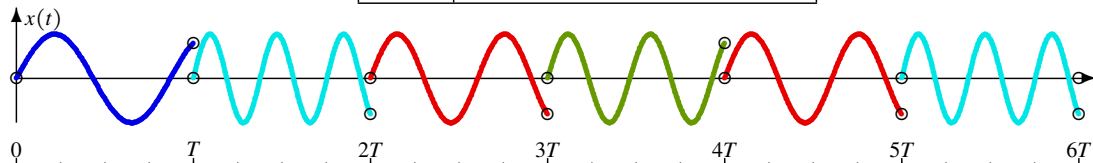
Formas de onda MSK - Ejemplo para $M = 4$ (II)

- Otro ejemplo con frecuencias que no son múltiplos enteros de $\frac{\pi}{T}$

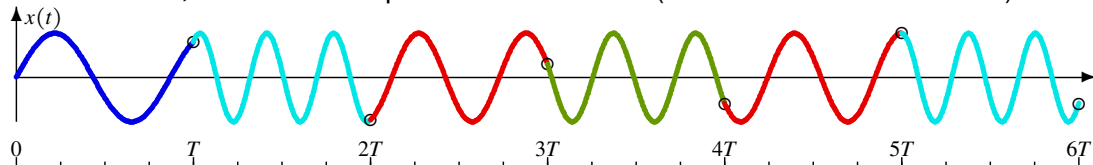


- Forma de onda para

n	0	1	2	3	4	5
$A[n]$	0	3	1	2	1	3



Sin memoria, saltos de fase pueden darse en nT (cuando cambia el símbolo)



Identificación de la fase al final de cada intervalo de símbolo ($\theta[n]$) permite la continuidad

Modulación MSK (II)

- Diferencias clave con la modulación CPFSK
 - Separación entre frecuencias consecutivas es la mitad para MSK
 - ★ MSK: $\Delta\omega = \omega_i - \omega_{i-1} = \frac{\pi}{T}$
 - ★ CPFSK: $\Delta\omega = \omega_i - \omega_{i-1} = \frac{2\pi}{T}$
 - Valores para ω_i no restringidos a múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}$ como en CPFSK (ni tampoco a ser múltiplos de $\frac{\pi}{T}$)
 - ★ Selección de frecuencias no garantiza automáticamente continuidad de fase
 - ★ Es preciso introducir memoria para tener continuidad de fase
- Señal MSK en notación con frecuencia central

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \sin\left(\omega_c t + I[n] \times \frac{\pi}{2T} t + \theta[n]\right) w_T(t - nT)$$

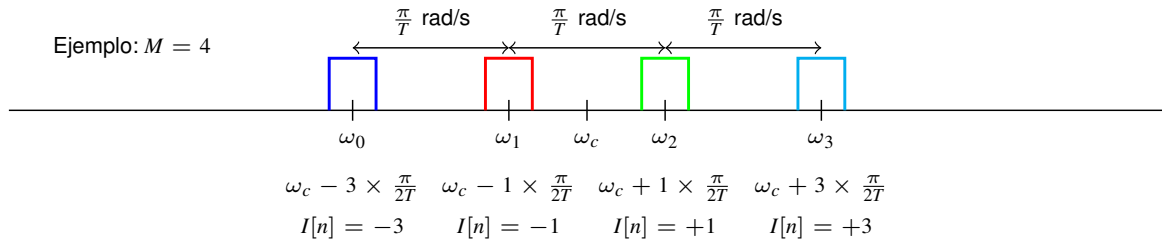
- Codificador: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$
- Continuidad de fase: se introduce el término de memoria $\theta[n]$

$$\theta[n] = \theta[n-1] + \frac{\pi n}{2} (I[n-1] - I[n]), \quad \text{mod } 2\pi$$

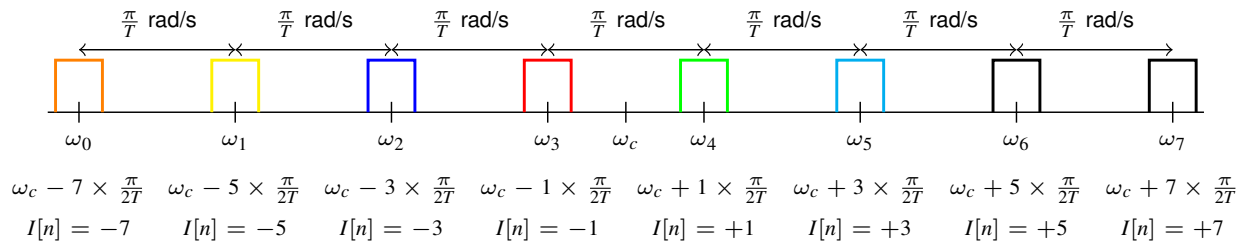
Estimación recursiva de la fase acumulada al final de cada intervalo de símbolo

MSK como desplazamiento en frecuencia

Ejemplo: $M = 4$

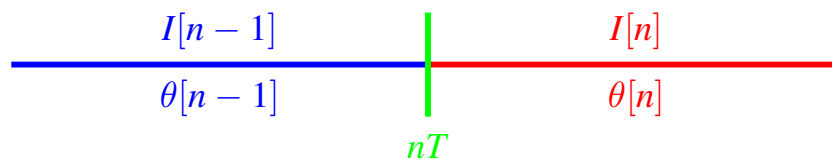


Ejemplo: $M = 8$



Memoria $\theta[n]$: cálculo recursivo

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi}{2T} t + \theta[n] \right) w_T(t - nT)$$



- Continuidad de fase en $t = nT$

$$\omega_c nT + I[n-1] \underbrace{\frac{\pi}{2T} nT}_{\frac{\pi n}{2}} + \theta[n-1] = \omega_c nT + I[n] \underbrace{\frac{\pi}{2T} nT}_{\frac{\pi n}{2}} + \theta[n]$$

$$\theta[n] = \theta[n-1] + \frac{\pi n}{2} (I[n-1] - I[n])$$

Espectro MSK

- Expresión alternativa para MSK

$$x(t) = \sqrt{2E_s} \cos(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} I[n] \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT) \\ + \sqrt{2E_s} \sin(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT + T)$$

- Similar a OQPSK

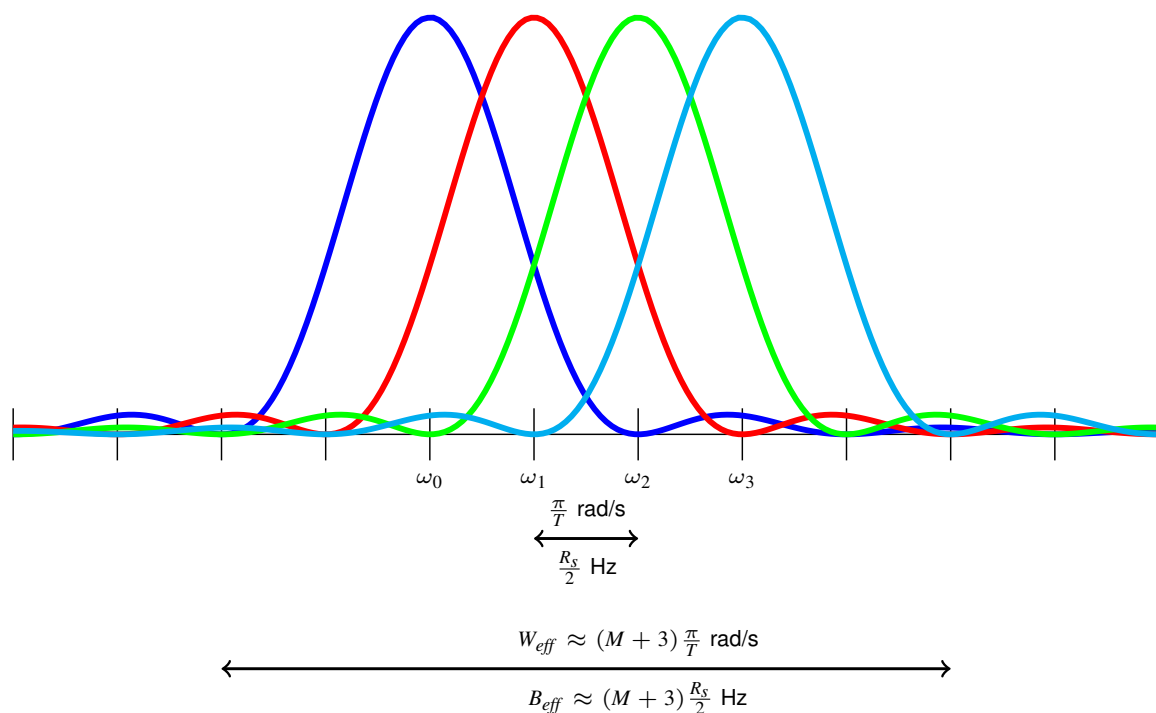
- ▶ Nuevos símbolos
- ▶ Pulso:

$$g(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_{2T}(t), \quad |G(j\omega)|^2 = 16T\pi^2 \left(\frac{\cos(\omega T)}{\pi^2 - 4\omega^2 T^2} \right)^2$$

- Espectro MSK

$$S_X(j\omega) = 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega - \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega - \omega_c)^2 T^2} \right)^2 + 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega + \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega + \omega_c)^2 T^2} \right)^2$$

Espectro MSK, ejemplo $M = 4$



Receptores para MSK

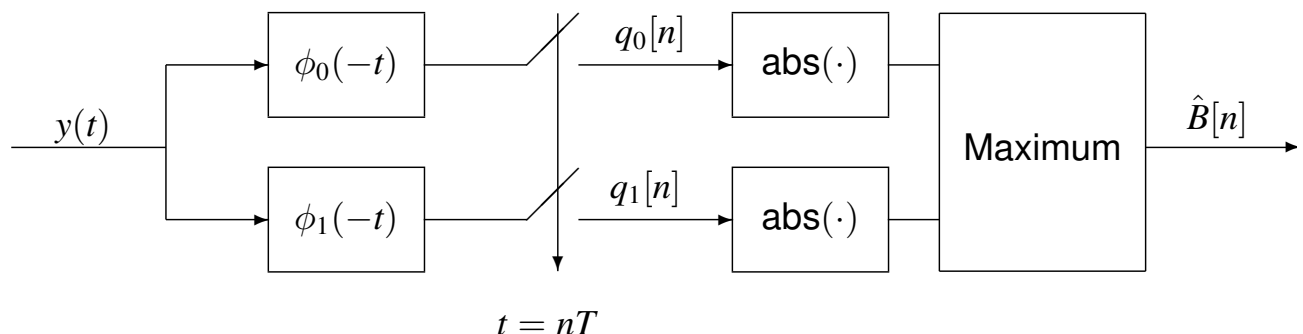
- Demodulador basado en el receptor ML para FSK
- Demodulador basado en el ML para OQPSK
- Probabilidad de error

$$P_e = 2Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right)$$

- ▶ No se tiene en cuenta la memoria del sistema
- ▶ Demodulador óptimo más complejo

Receptor MSK binario

- Receptor MSK sub-óptimo basado en receptor para FSK donde la evaluación del valor absoluto para cada posible frecuencia se introduce para considerar diferentes fases iniciales



Modulaciones de fase continua (CPM)

- Familia que incluye a la CPFSK y MSK
- Características básicas
 - ▶ Envolvente constante
 - ▶ Continuidad de fase
 - ▶ Reducción del ancho de banda:
 - ★ Suavizando la evolución de la fase instantánea
- Señal CPM: expresión analítica en el dominio temporal

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_c t + \theta_0 + \theta(t, \mathbf{I}))$$

- ▶ $\mathbf{I}$: Secuencia de símbolos transmitidos
- ▶ ω_c : frecuencia nominal de la portadora
- ▶ θ_0 : fase inicial de la portadora
- ▶ E_s : energía transmitida durante un período de símbolo

Frecuencia instantánea de una senoide

- Señal sinusoidal con argumento variable

$$\sin(\phi(t))$$

- ▶ Frecuencia instantánea

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \text{ rad/s}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \text{ Hz}$$

- Señal con frecuencia $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s + argumento variable

$$\sin(\omega_c t + \theta_0 + \theta(t))$$

- ▶ Frecuencia instantánea

$$\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ rad/s}$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ Hz}$$

Generación de la señal CPM de respuesta completa

- Codificador: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$
- Señal PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n I[n] g(t - nT)$$

- Respuesta completa:
 - ▶ Pulso $g(t)$ causal de duración máxima T seg.
 - ★ Habitualmente normalizado

$$g(t) = 0 \text{ si } t > T$$

$$\text{Normalización: } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \frac{1}{2}$$

- Señal CPM: frecuencia instantánea $\omega_c + 2 \omega_d T s(t)$ rad/s
- Fase instantánea para esa frecuencia (integral de la frecuencia)

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2 \omega_d T \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \text{ rad}$$

- ▶ ω_d : desviación de frecuencia de pico

Expresión CPM en el dominio temporal

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \left[\omega_c t + \theta_0 + \overbrace{2 \omega_d T \int_{-\infty}^t \underbrace{\sum_n I[n] g(\tau - nT)}_{s(\tau)} d\tau}_{\theta(t, \mathbf{I})} \right]$$

- Fase $\theta(t, \mathbf{I})$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$ (intervalo asociado a $I[n]$)

$$\theta(t, \mathbf{I}) = 2 \omega_d T \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \theta[n] + \theta(t, n) \text{ rad}$$

- ▶ $\theta[n]$: fase acumulada hasta $t = nT$:
 - ★ Debida a los símbolos transmitidos anteriormente (hasta $I[n-1]$)

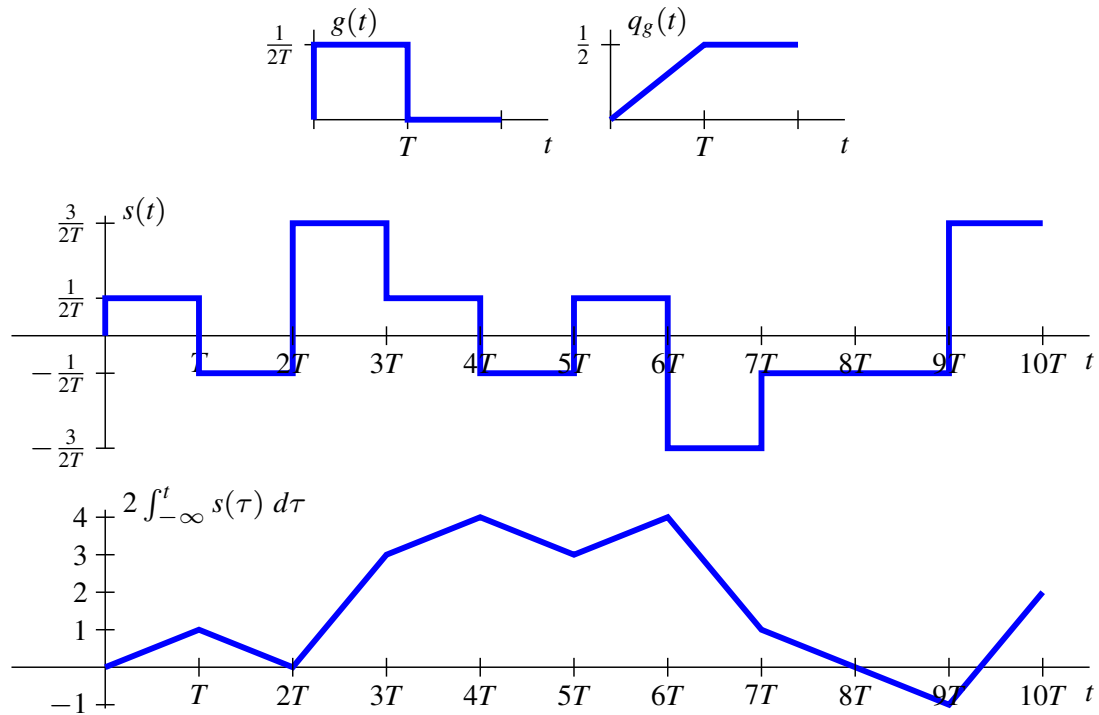
$$\theta[n] = \omega_d T \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m] \text{ rad}$$

- ▶ $\theta(t, n)$: fase incremental desde nT hasta t :
 - ★ Debida al símbolo actual $I[n]$

$$\theta(t, n) = 2 \omega_d T I[n] q_g(t - nT) \text{ rad, con } q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

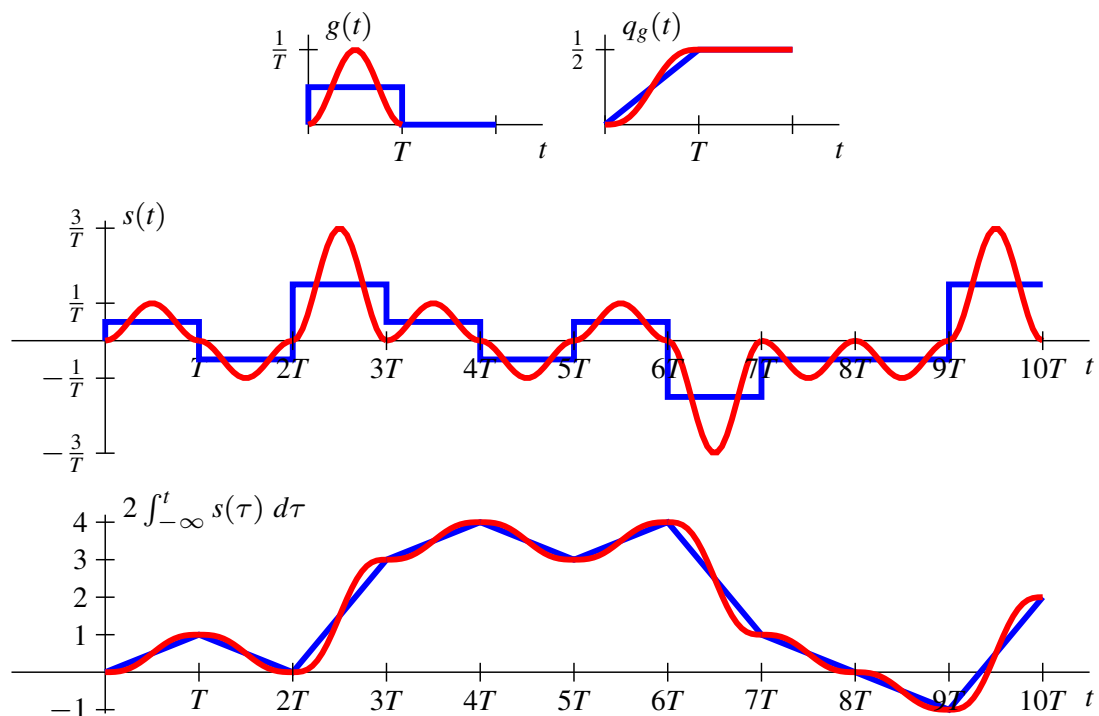
CPM - Un ejemplo de evolución de la fase

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I[n]$	+1	-1	+3	+1	-1	+1	-3	-1	-1	+3



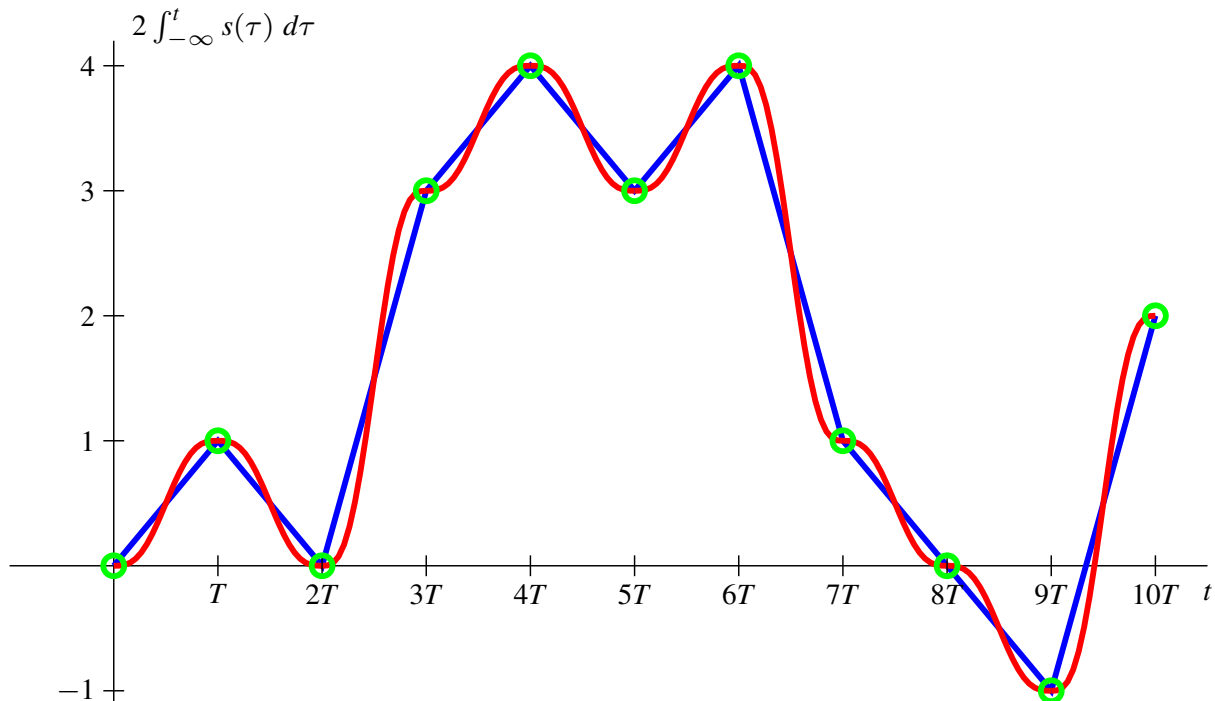
CPM - Un ejemplo de evolución de la fase (II)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I[n]$	+1	-1	+3	+1	-1	+1	-3	-1	-1	+3



CPM - Un ejemplo de evolución de la fase (III)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I[n]$	+1	-1	+3	+1	-1	+1	-3	-1	-1	+3



Expresión CPM en el dominio temporal - Índice de modulación

- Expresión alternativa introduciendo un parámetro diferente (que reemplaza a la desviación de frecuencia de pico)
- Definición del índice de modulación h :

$$h = \omega_d \frac{T}{\pi}$$

- Valor de fase asociado al intervalo para $I[n]$:

- ▶ $\theta[n]$: fase acumulada hasta $t = nT$:

$$\theta[n] = \pi h \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m] \text{ rad}$$

- ▶ $\theta(t, n)$: incremento de fase desde nT hasta t :

$$\theta(t, n) = 2 \pi h I[n] q_g(t - nT) \text{ rad}$$

Identificación de CPFSK binaria como CPM

- Expresión analítica para una CPFSK binaria

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{T} \right) w_T(t - nT).$$

- CPFSK binaria como CPM: $\omega_d = \frac{\pi}{T}$, $h = 1$
- Considerando $\theta[0] = 0$

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] + 2\pi I[n] \frac{(t - nT)}{2T} = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] + \frac{\pi t}{T} I[n]$$

- ▶ Considerando que la expresión

$$\pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] = K 2\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

- ▶ La fase $\theta(t, \mathbf{I})$ es, en módulo 2π

$$\theta(t, \mathbf{I}) = \frac{\pi t}{T} I[n] = \pm \frac{\pi t}{T}$$

Identificación de la MSK como una CPM

- Señal MSK

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \text{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{2T} + \theta[n] \right) w_T(t - nT).$$

- Identificación como CPM

$$\omega_d = \frac{\pi}{2T}, \quad h = \frac{1}{2}$$

Árbol de fase en modulaciones CPM

- Representa la posible evolución temporal de la fase
 - ▶ Un camino para cada posible secuencia de símbolos
- Transición en un intervalo de símbolo
 - ▶ Incremento de fase en el intervalo de índice n

$$\theta((n+1)T) - \theta(nT) = \theta[n+1] - \theta[n] = \pi h I[n] \text{ rad}$$

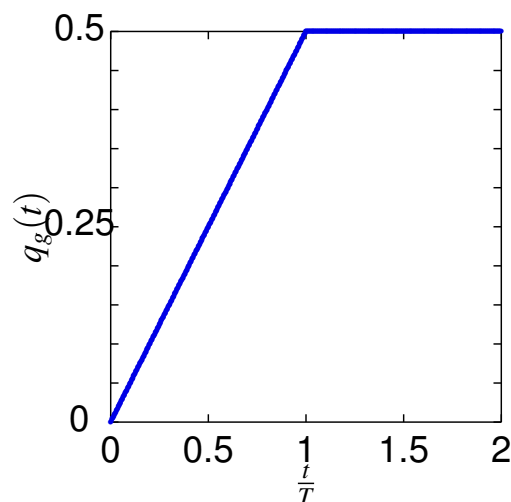
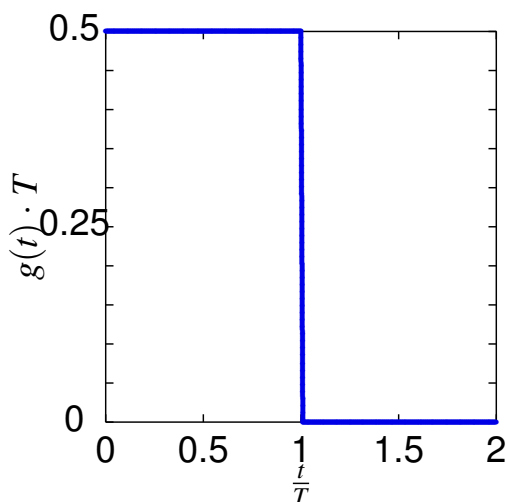
- ▶ Forma para moverse desde el valor de fase en el inicio del intervalo hasta el valor de fase al final del intervalo
 - ★ Proporcional a la integral del pulso $g(t)$, i.e., $q_g(t)$

$$\theta(t, n) = 2 \pi h I[n] q_g(t - nT) \text{ rad}$$

Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular

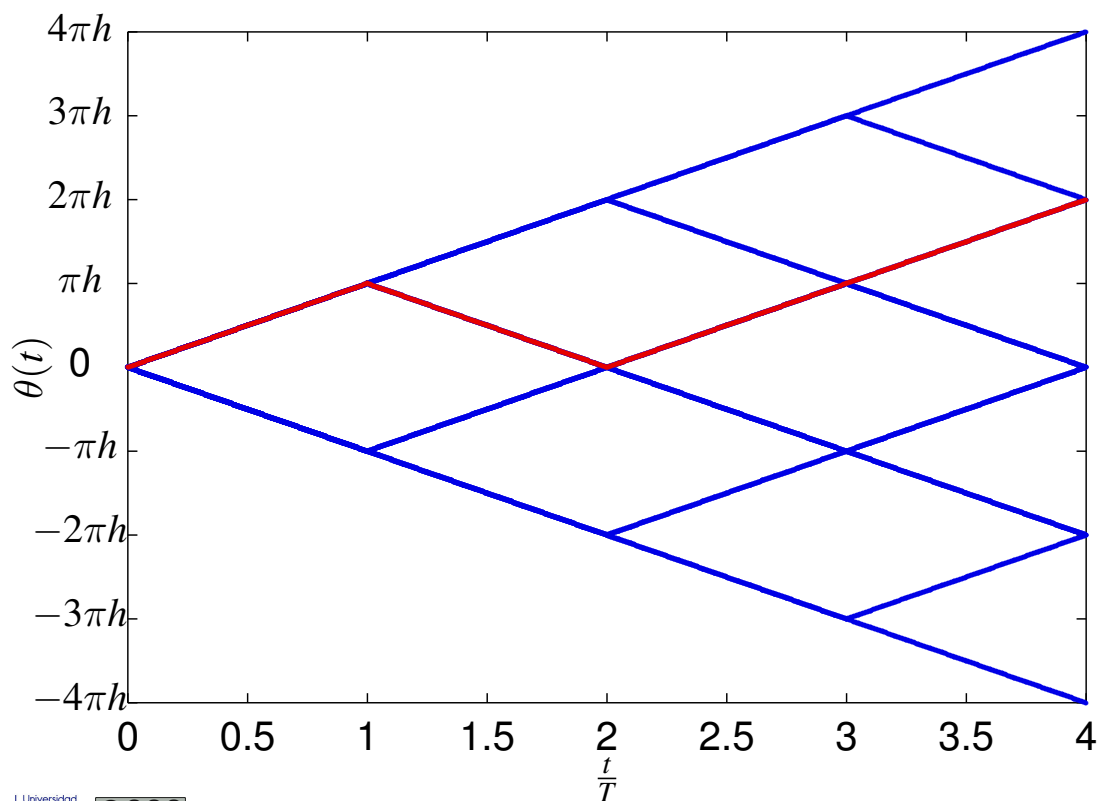
- Ejemplo: pulso rectangular

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2T}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



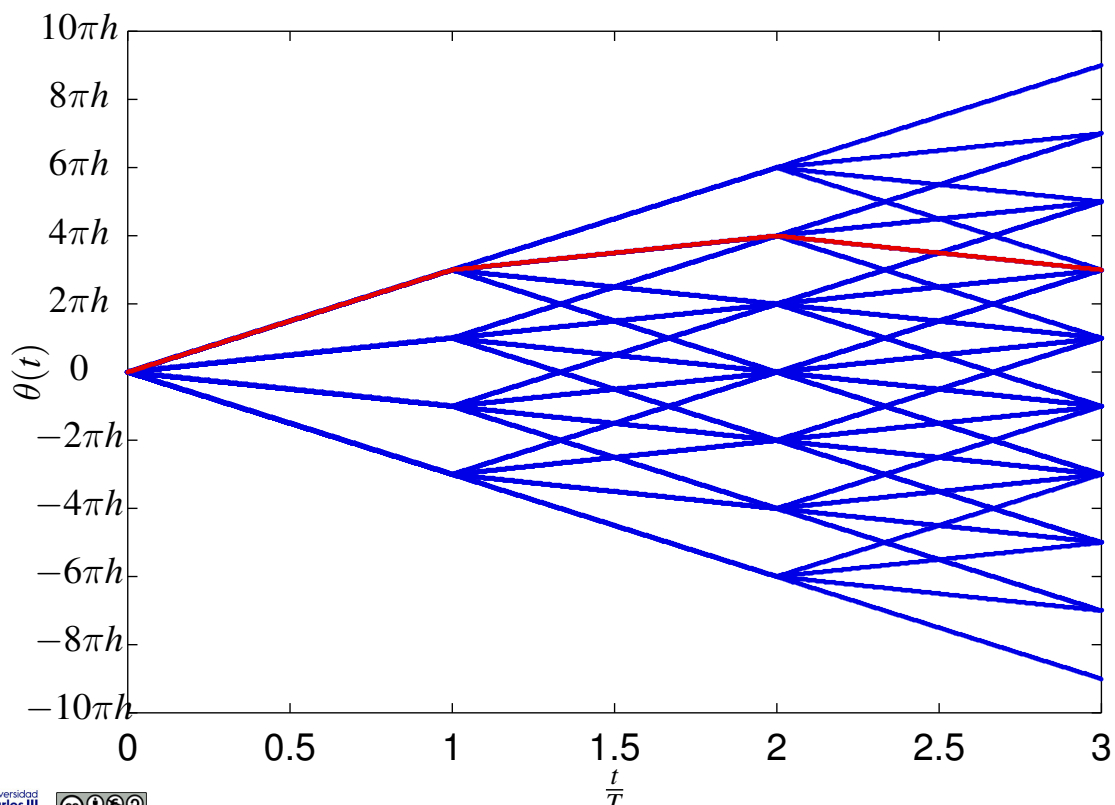
Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular - binario

- Secuencia resaltada: $I[0] = +1$, $I[1] = -1$, $I[2] = +1$, $I[3] = +1$



Ejemplo de árbol de fase - pulso rectangular - cuaternario

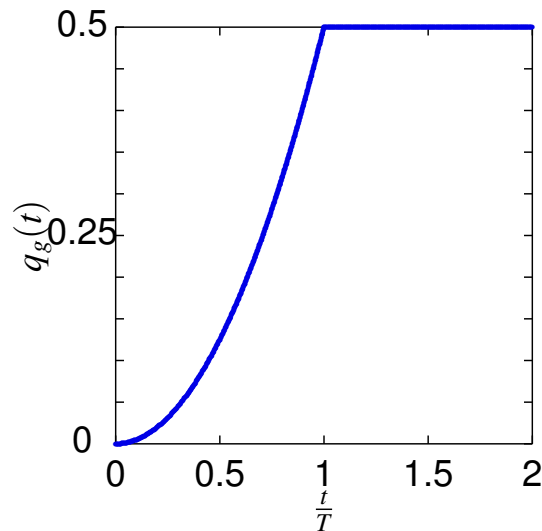
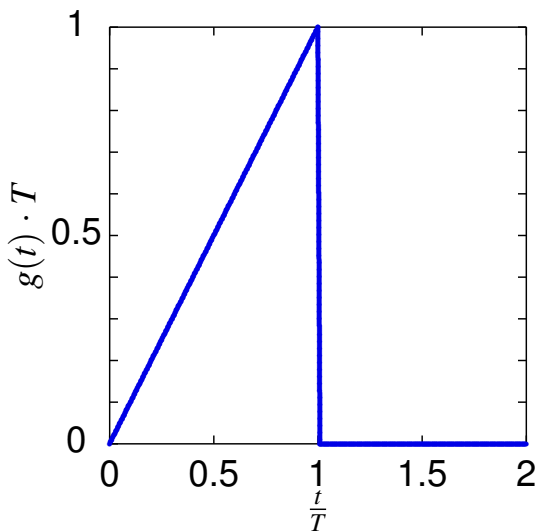
- Secuencia resaltada: $I[0] = +3$, $I[1] = +1$, $I[2] = -1$



Árbol de fase - Ejemplo - Pulso triangular

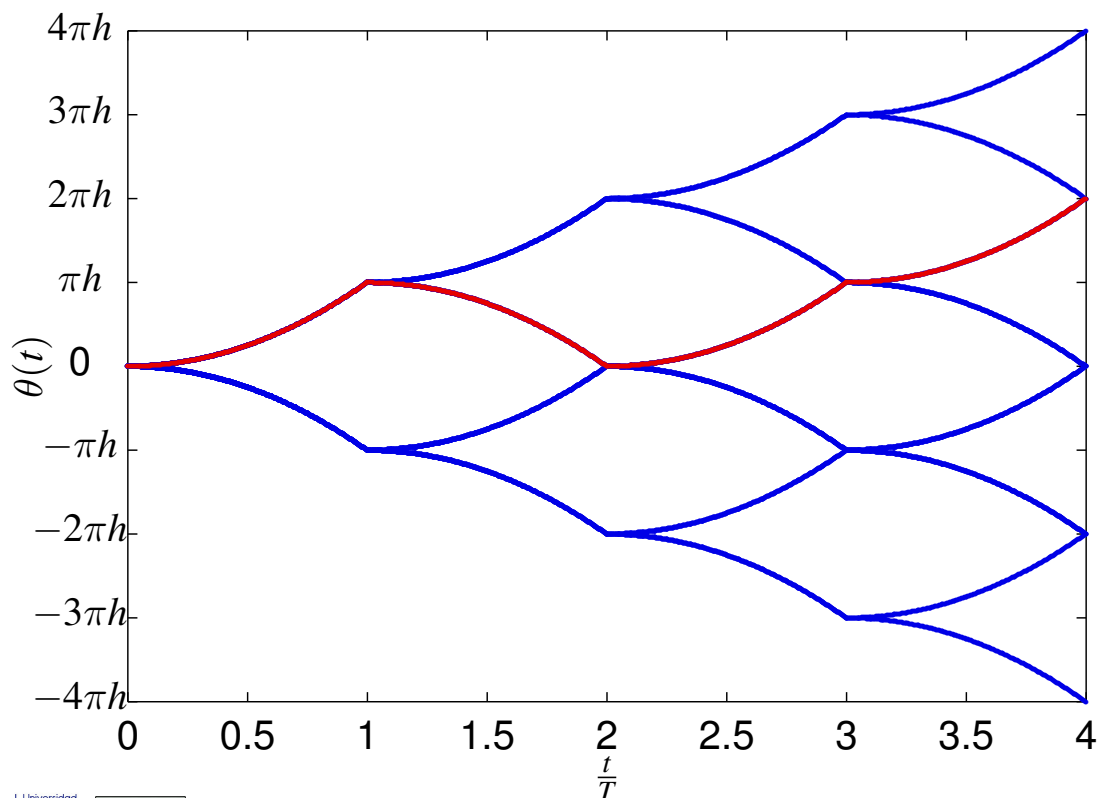
- Ejemplo: pulso triangular

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{T^2}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2T^2}, & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Árbol de fase - Ejemplo - Pulso triangular - binario

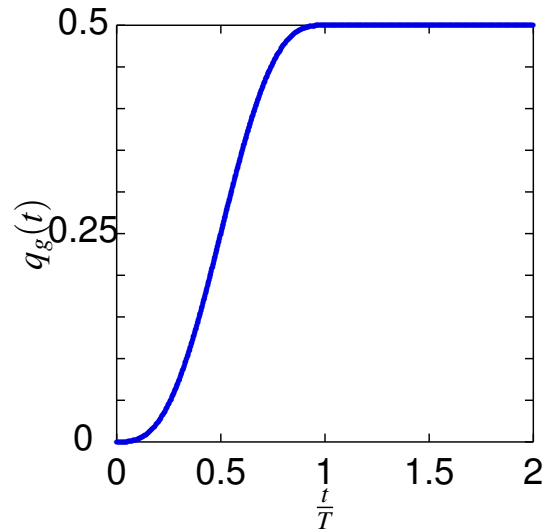
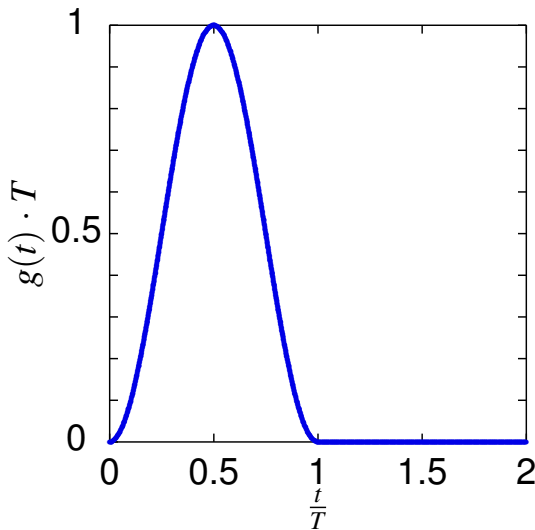
- Secuencia resaltada: $I[0] = +1$, $I[1] = -1$, $I[2] = +1$, $I[3] = +1$



Árbol de fases - Ejemplo - Pulsos más suaves

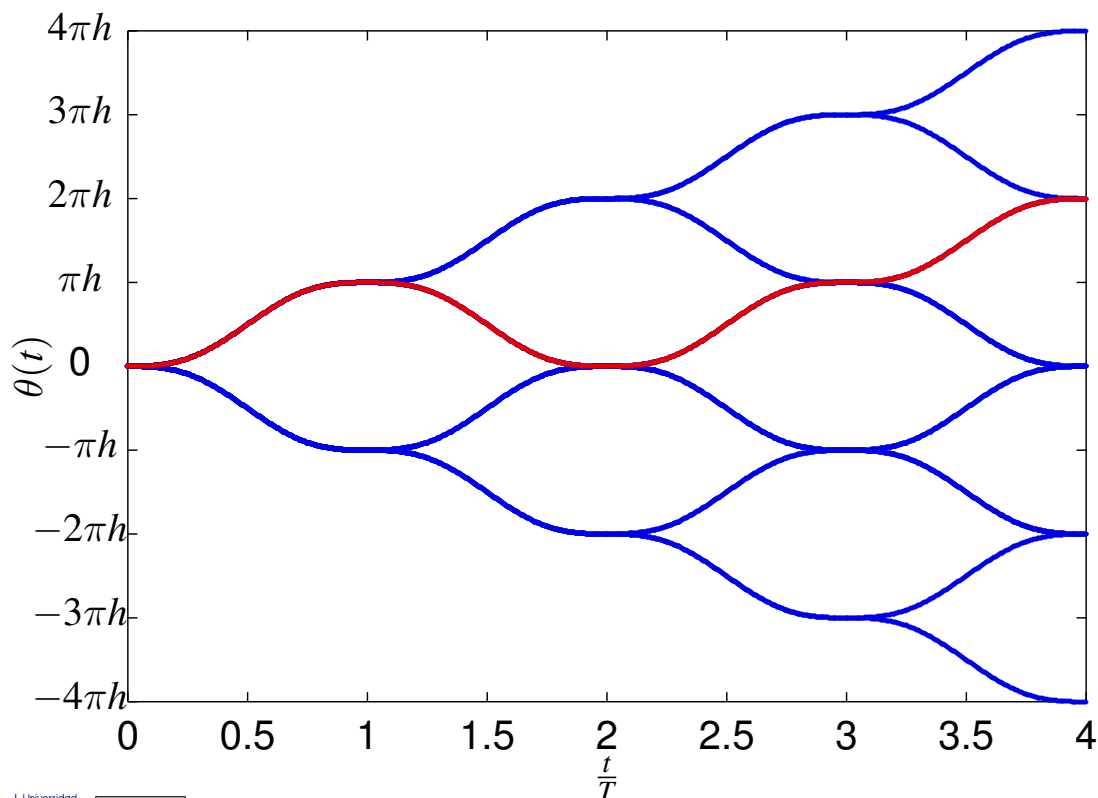
- Ejemplo: pulso en coseno alzado ($L = 1$)

$$g(t) = \frac{1}{2T} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right] w_T(t), \quad q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right], & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Árbol de fases - Ejemplo - Pulsos más suaves - binario

- Secuencia resaltada: $I[0] = +1$, $I[1] = -1$, $I[2] = +1$, $I[3] = +1$



CPM de respuesta parcial

- El pulso $g(t)$ dura L períodos de símbolo ($L > 1$)
- La fase $\theta(t, \mathbf{I})$ en el intervalo $[nT, (n+1)T]$

$$\begin{aligned}\theta(t, \mathbf{I}) &= 2\pi h \sum_{m=-\infty}^n I[m] q_g(t - mT) \\ &= \theta[n] + \theta(t, n) \text{ rad}\end{aligned}$$

- ▶ $\theta[n]$: fase acumulada hasta nT debida a los pulsos que han finalizado

$$\theta[n] = \pi h \sum_{m=-\infty}^{n-L} I[m] \text{ rad}$$

- ▶ $\theta(t, n)$: contribución de los pulsos que no han finalizado al inicio del intervalo

$$\theta(t, n) = 2\pi h \sum_{m=n-L+1}^n I[m] q_g(t - mT)$$

Pulsos para CPM de respuesta parcial

- Pulsos en coseno alzado

$$g(t) = \frac{1}{2LT} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{LT} \right) \right] w_{LT}(t)$$

- ▶ Suavizan las transiciones de fase

- Gaussian MSK (GMSK)

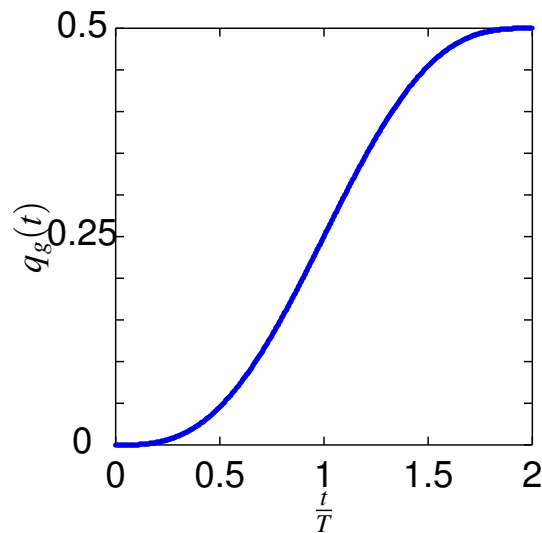
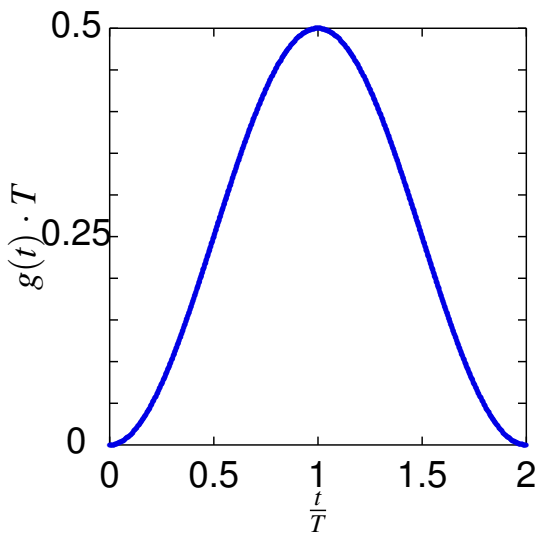
$$g(t) = \frac{1}{2T} \left[Q \left(\frac{2\pi\beta(t - T/2)}{\sqrt{\ln 2}} \right) - Q \left(\frac{2\pi\beta(t + T/2)}{\sqrt{\ln 2}} \right) \right]$$

- ▶ Empleado en GSM ($\beta = 0,3$) y DECT ($\beta = 0,2$)
- ▶ Pulso rectangular filtrado con respuesta gaussiana

Árbol de fases - CPM de respuesta parcial - Ejemplo

- Ejemplo: pulso en coseno alzado ($L = 2$)

$$g(t) = \frac{1}{4T} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{2T} \right) \right] w_{2T}(t), \quad q_g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4T} \left[t - \frac{2T}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{2T} \right) \right], & 0 \leq t < T \\ 1/2, & t \geq T \end{cases}$$



Árbol de fases - CPM de fase parcial - Ejemplo - binario

- Secuencia resaltada: $I[0] = +1, I[1] = -1, I[2] = +1, I[3] = +1$

