

Comunicaciones Digitales

Capítulo 4

Modulaciones multipulso

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid



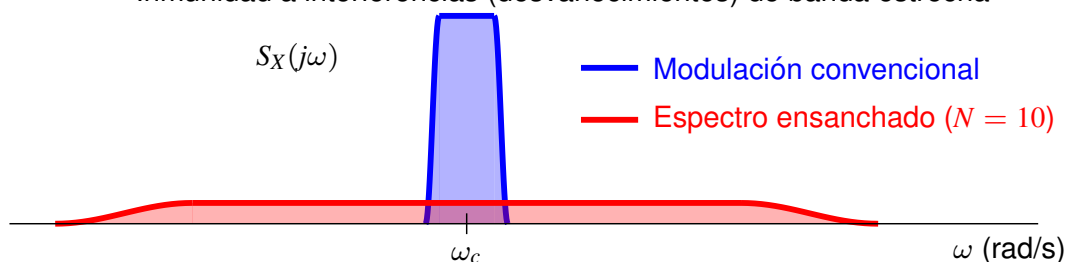
1/113

Índice de contenidos

- Modulaciones de espectro ensanchado (SS)
SS: *Spread Spectrum*
 - ▶ Modulaciones de espectro ensanchado por secuencia directa (DS-SS: *Direct Sequence - Spread Spectrum*)
 - ▶ Modulaciones de espectro ensanchado por salto en frecuencia (FH-SS: *Frequency Hopping - Spread Spectrum*)
 - ▶ Acceso múltiple y multiplexación basada en espectro ensanchado (CDMA)
 - ★ CDMA: *Code Division Multiplex Access*
- Modulaciones multiportadora
 - ▶ Modulación (multiplexación) por división en frecuencia
 - ★ FDM: *Frequency Division Multiplex*
 - ▶ Modulación por división en frecuencia ortogonal (OFDM)
 - ★ OFDM: *Orthogonal Frequency Division Multiplex*
 - ★ OFDM en tiempo continuo
 - ★ OFDM en tiempo discreto

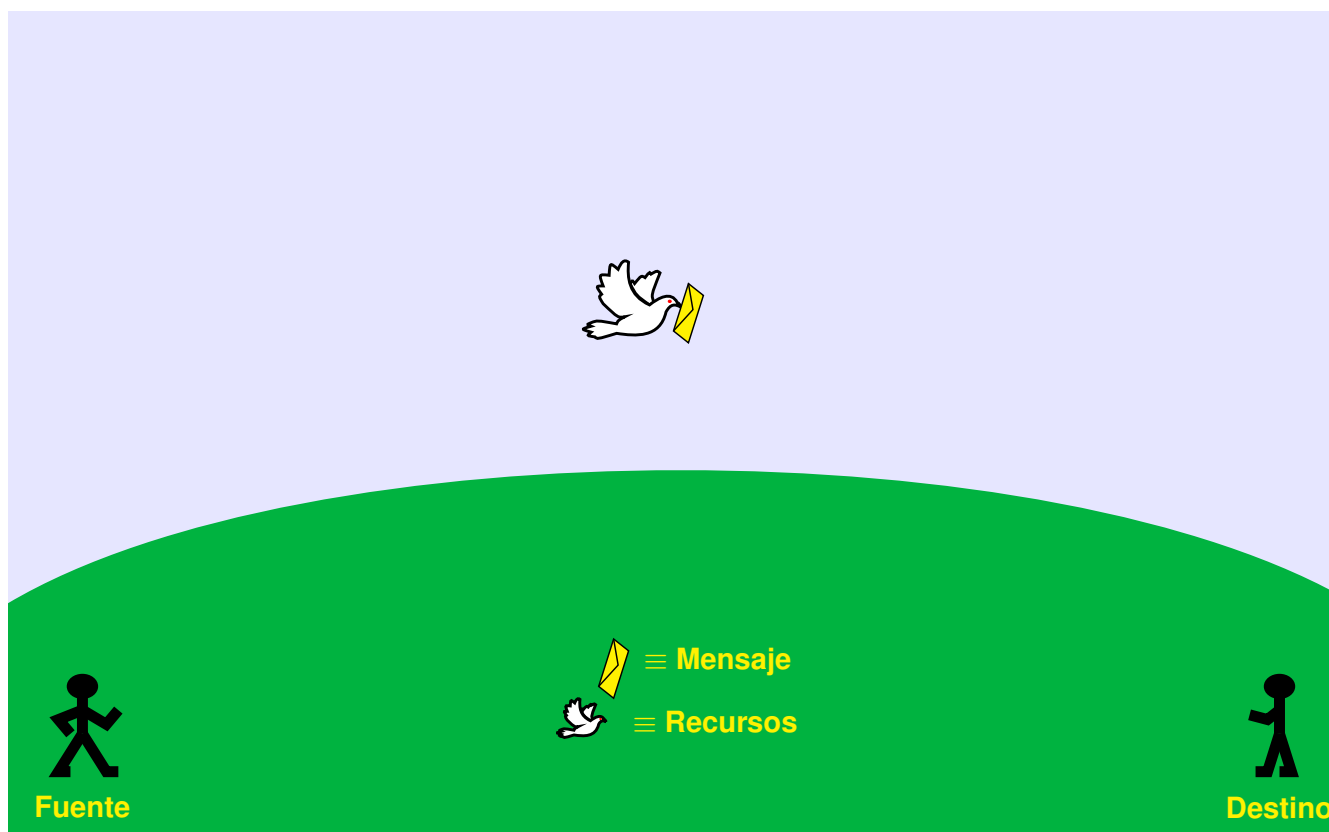
Modulaciones de espectro ensanchado

- Ancho de banda deliberadamente mayor que en modulaciones convencionales
 - ▶ Ancho de banda se incrementa (*ensancha*) por un factor N
 - ★ Inmunidad a interferencias (desvanecimientos) de banda estrecha

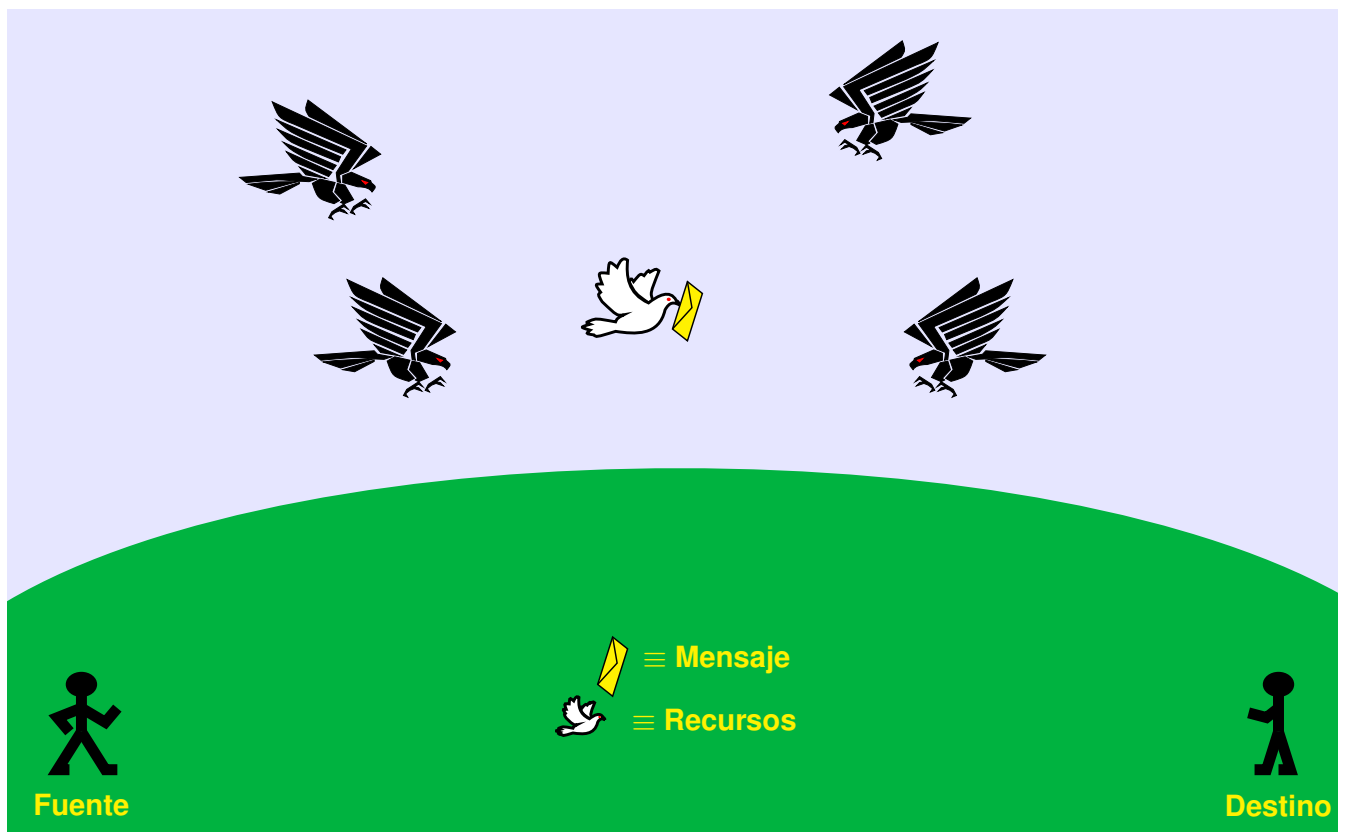


- Mito: espectro ensanchado incrementa la capacidad del sistema
 - ▶ Realidad:
 - ★ Proporciona baja sensibilidad a distorsión del canal (incluido *jamming*)
 - ★ Permite comunicaciones seguras
- Origen militar: combatir interferencias intencionadas (*jamming*)
 - ▶ Aplicaciones actuales
 - ★ Aplicaciones que requieran robustez contra atenuaciones locales (en frecuencia)
 - ★ Limita la densidad de flujo de potencia en enlaces descendentes de satélites
 - ★ Acceso múltiple o multiplexación
 - CDMA: *Code Division Multiple Access*

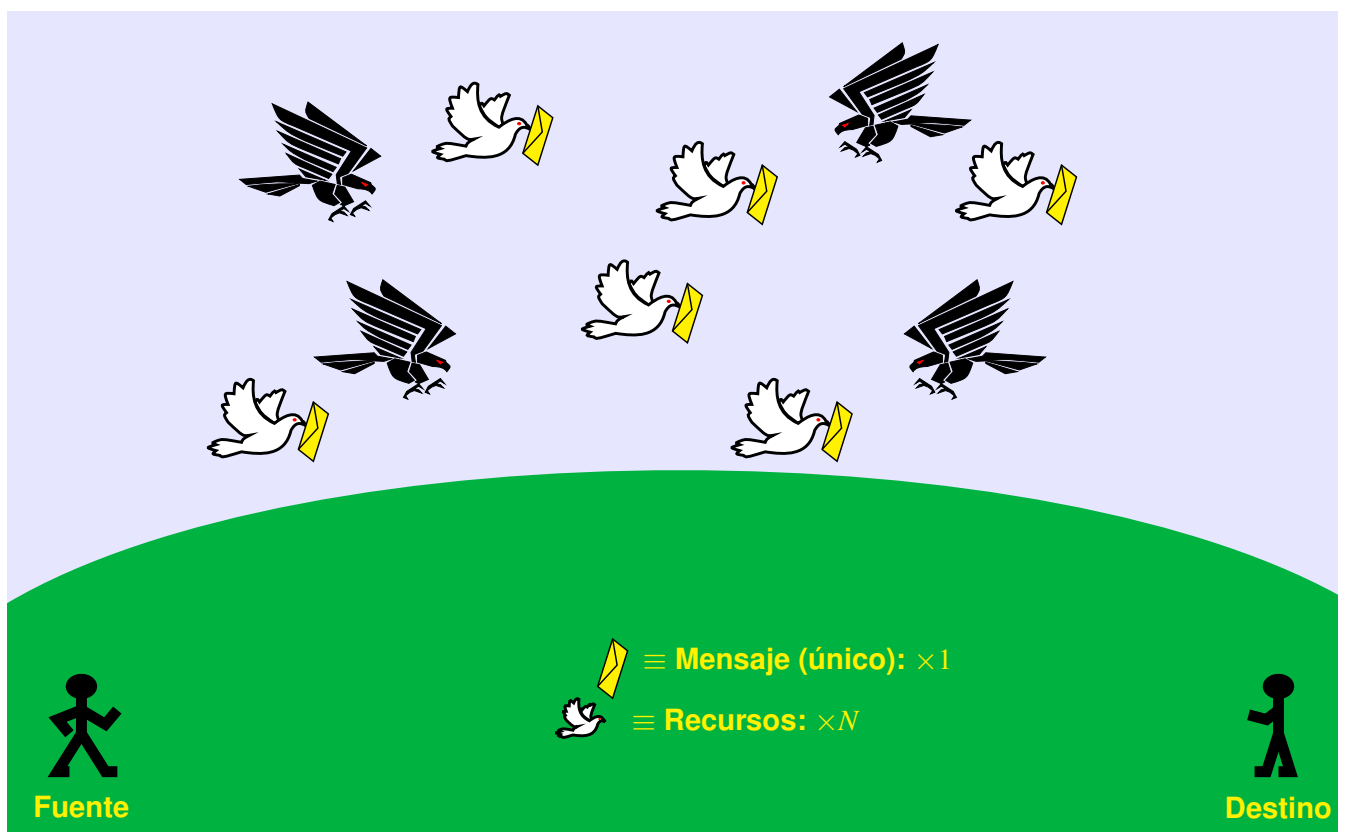
Canal ideal



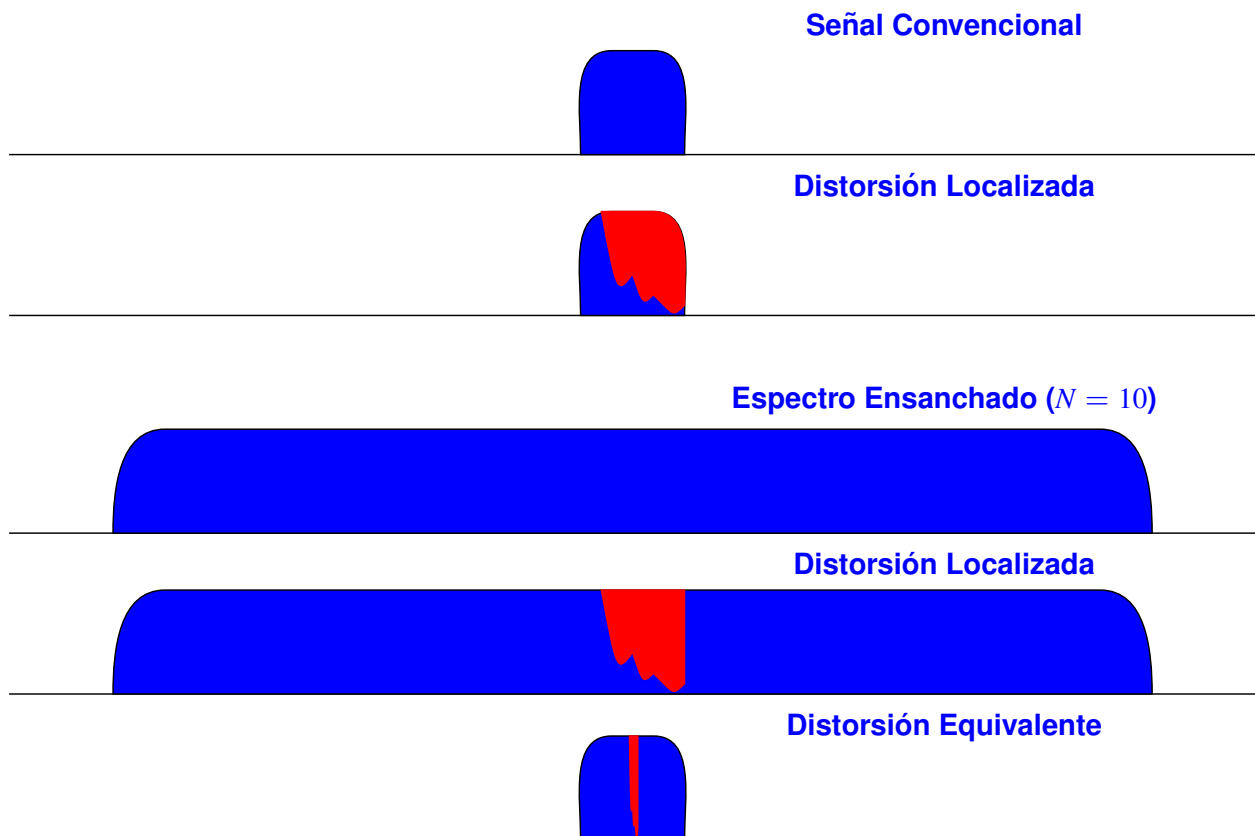
Canal “agresivo”



Canal “agresivo”: espectro ensanchado



Espectro ensanchado: idea intuitiva



Aumento del ancho de banda

- Señal PAM - Expresiones en tiempo y frecuencia ($R_s = \frac{1}{T}$ baudios)

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT), \quad S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2$$

$$\text{BB: } \begin{aligned} W &= \frac{\pi}{T} (1 + \alpha) \text{ rad/s} \\ B &= \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sqrt{2} \mathcal{R}e\{s(t) e^{j\omega_c}\}, \quad S_x(j\omega) = \frac{1}{2} [S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-j\omega - j\omega_c)]$$

$$\text{PB: } \begin{aligned} W &= \frac{2\pi}{T} (1 + \alpha) \text{ rad/s} \\ B &= R_s (1 + \alpha) \text{ Hz} \end{aligned}$$

- ▶ Ancho de banda usando $h_{RRC}^{\alpha, T}(t)$
 - ★ Transmisión a $R_s = \frac{1}{T}$ baudios con factor de caída α

- Objetivo: Aumentar el ancho de banda por un factor N

- ▶ Filtros transmisores en raíz de coseno alzado

$$\text{BB: } W = N \times \frac{\pi}{T} (1 + \alpha) \text{ rad/s}, \quad \text{PB: } W = N \times \frac{2\pi}{T} (1 + \alpha) \text{ rad/s}$$

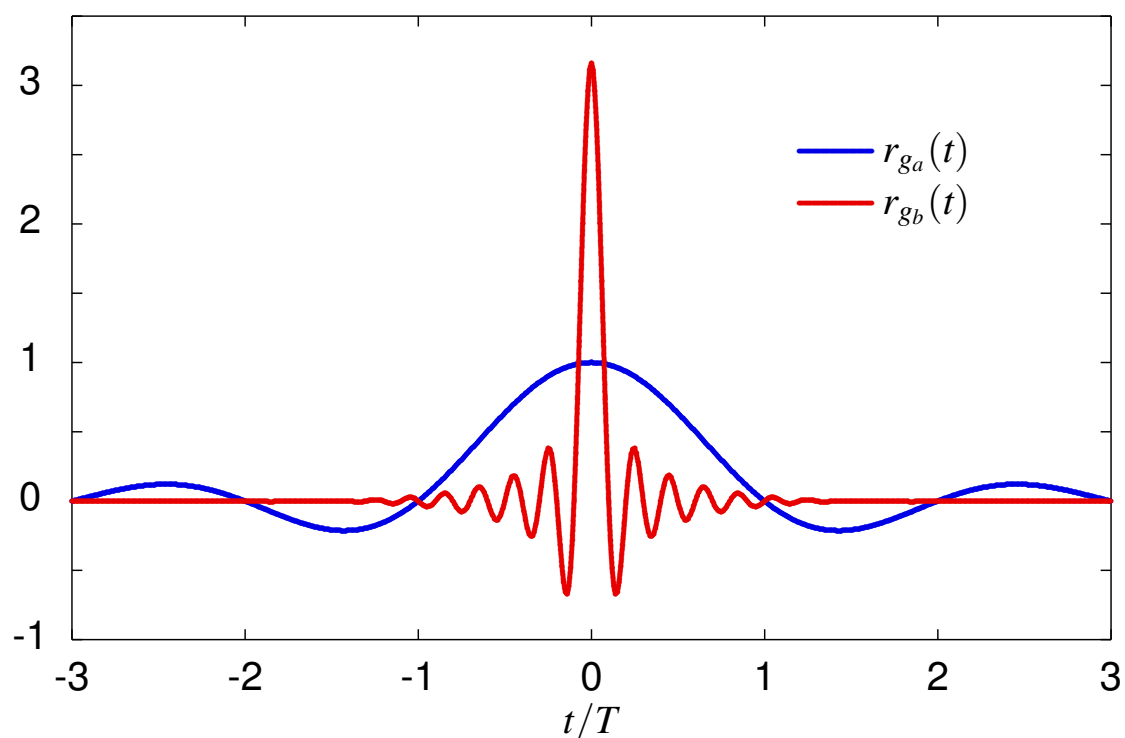
$$\text{BB: } B = N \times \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) \text{ Hz}, \quad \text{PB: } B = N \times R_s (1 + \alpha) \text{ Hz}$$

- Transmisión sin ISI - Posible opción: pulsos cumpliendo Nyquist a T/N

- ▶ Si se cumple Nyquist a T/N se cumple a T
- ▶ El ancho de banda aumenta por un factor N
- ▶ Problema: función de ambigüedad localizada en el tiempo
⇒ Potencia de la señal localizada en tiempo

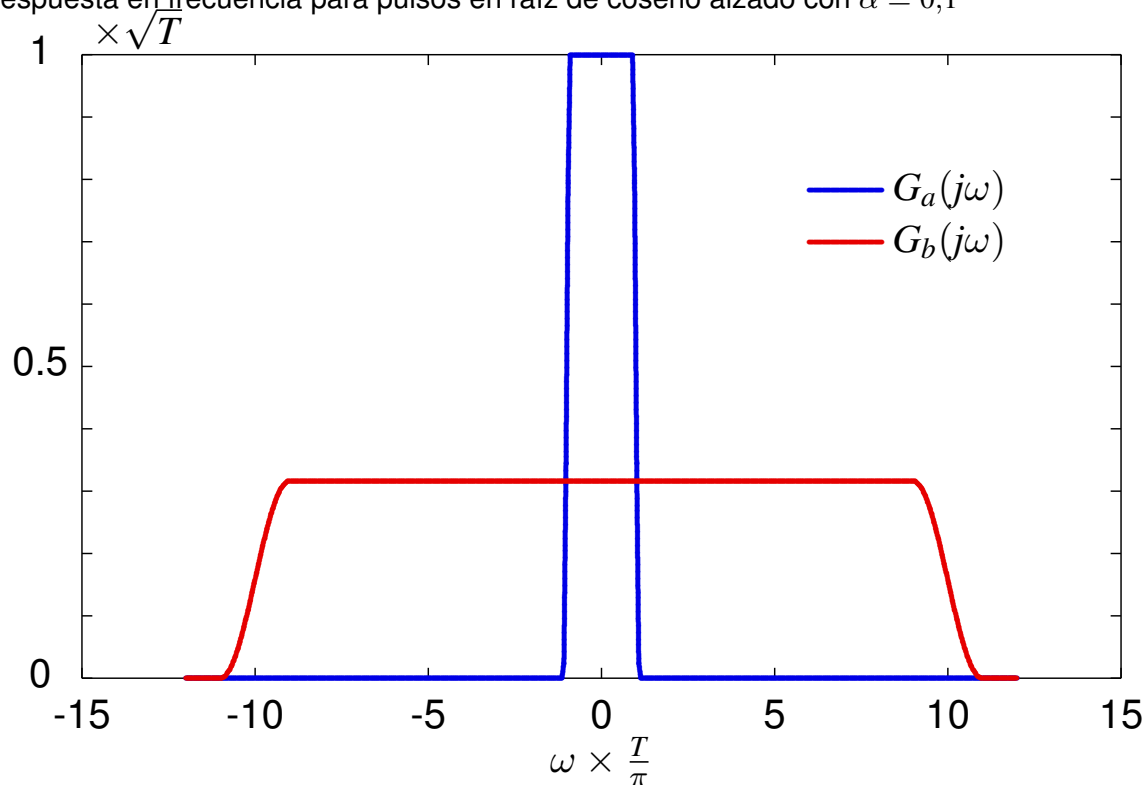
Pulsos coseno alzado: $g_a(t)$ a T y $g_b(t)$ a T/N ($N = 10, \alpha = 0,1$)

Función de ambigüedad para pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0,1$



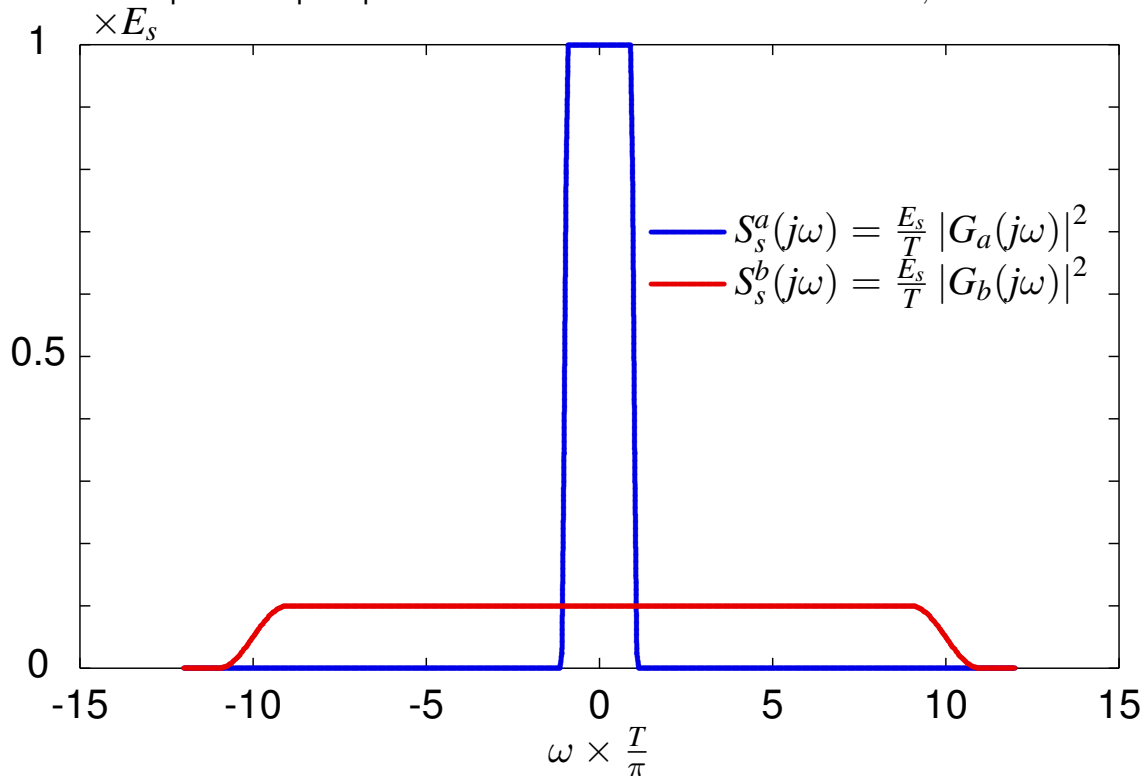
Respuesta en frecuencia a T y T/N ($N = 10, \alpha = 0,1$)

Respuesta en frecuencia para pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0,1$

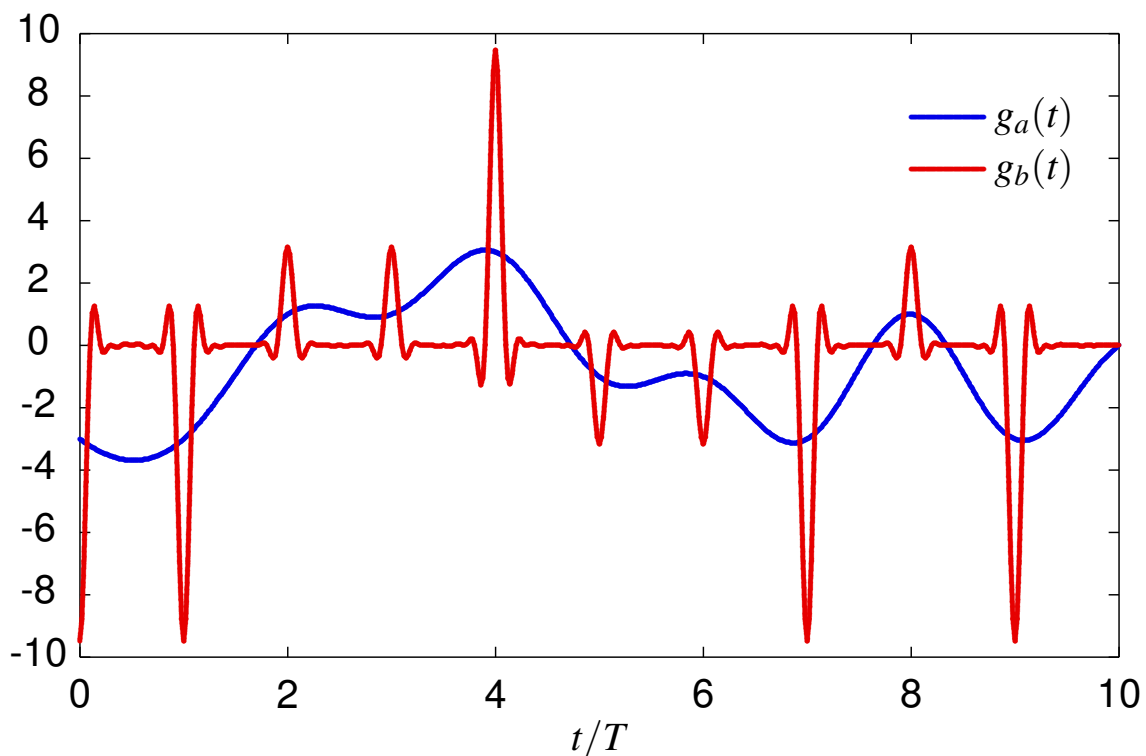


$S_s(j\omega)$ usando pulsos a T y T/N ($N = 10, \alpha = 0,1$)

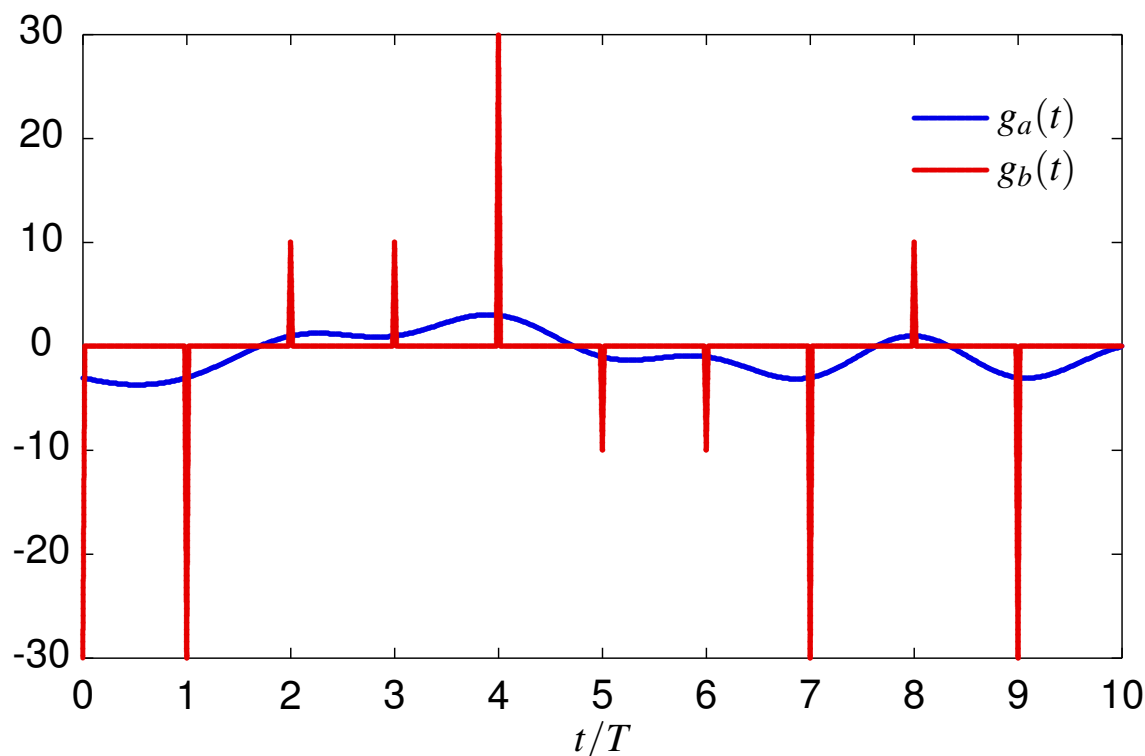
Densidades espectrales para pulsos en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0,1$



Forma de onda: 4-PAM, $N = 10, \alpha = 0,5$



Forma de onda: 4-PAM, $N = 100$, $\alpha = 0,5$



Espectro ensanchado por secuencia directa

DSSS: *Direct Sequence Spread Spectrum*

- Alternativa que evita la localización en tiempo de la potencia de la señal
- Familia de pulsos

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c)$$

Combinación lineal de N réplicas de un pulso, $g_c(t)$, desplazadas múltiplos de $T_c = \frac{T}{N}$ con coeficientes $x[m]$

- ▶ $x[m]$: secuencia ensanchadora (secuencia de *chip*)
 - ★ N valores: $\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$
- ▶ T_c : período de *chip* $T_c = \frac{T}{N}$
- ▶ $g_c(t)$: pulso tal que $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c

- Expresión analítica de la señal modulada

$$s(t) = \sum_n A[n] g(t - nT) = \sum_n A[n] \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t - nT)}$$

Ejemplo de pulso: rectangular $N = 4$

- Tiempo de chip: $T_c = \frac{T}{N} = \frac{T}{4}$
- Filtro a tiempo de chip

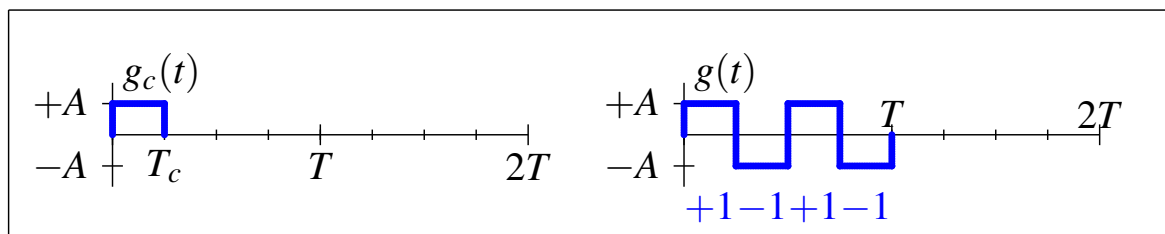
$$g_c(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < T_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Filtro transmisor (a tiempo de símbolo)

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c)$$

- Secuencia de ensanchado

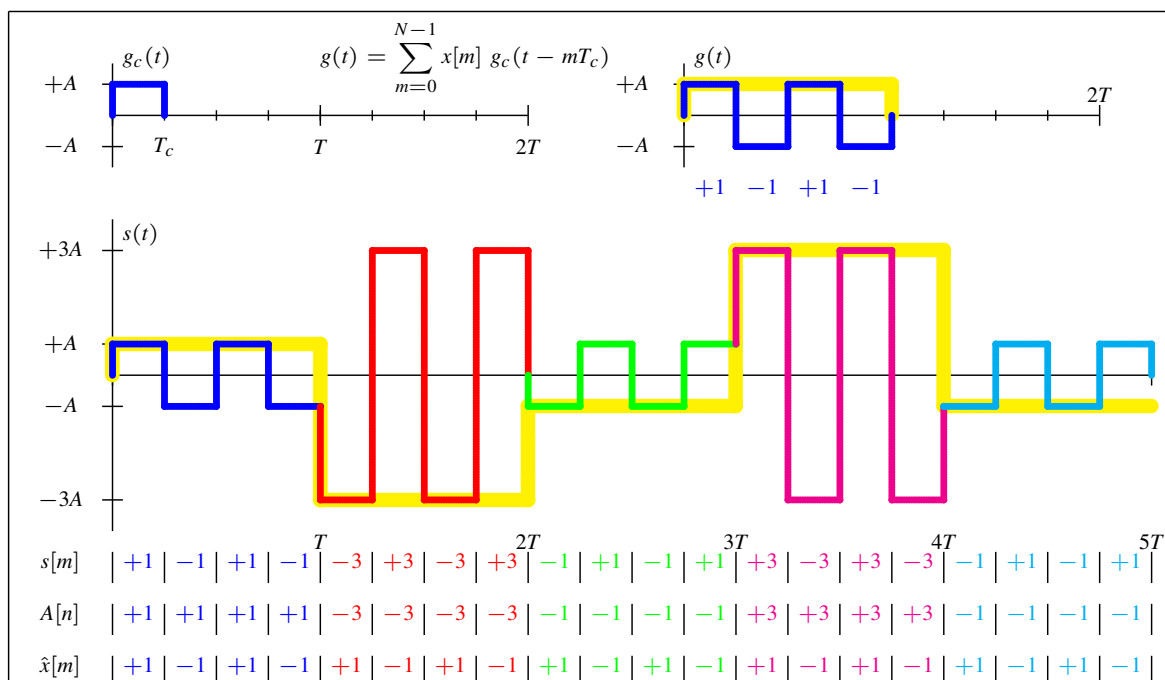
n	0	1	2	3
$x[n]$	+1	-1	+1	-1



Generación de las señales $s(t)$ (Ejemplo $N = 4$)

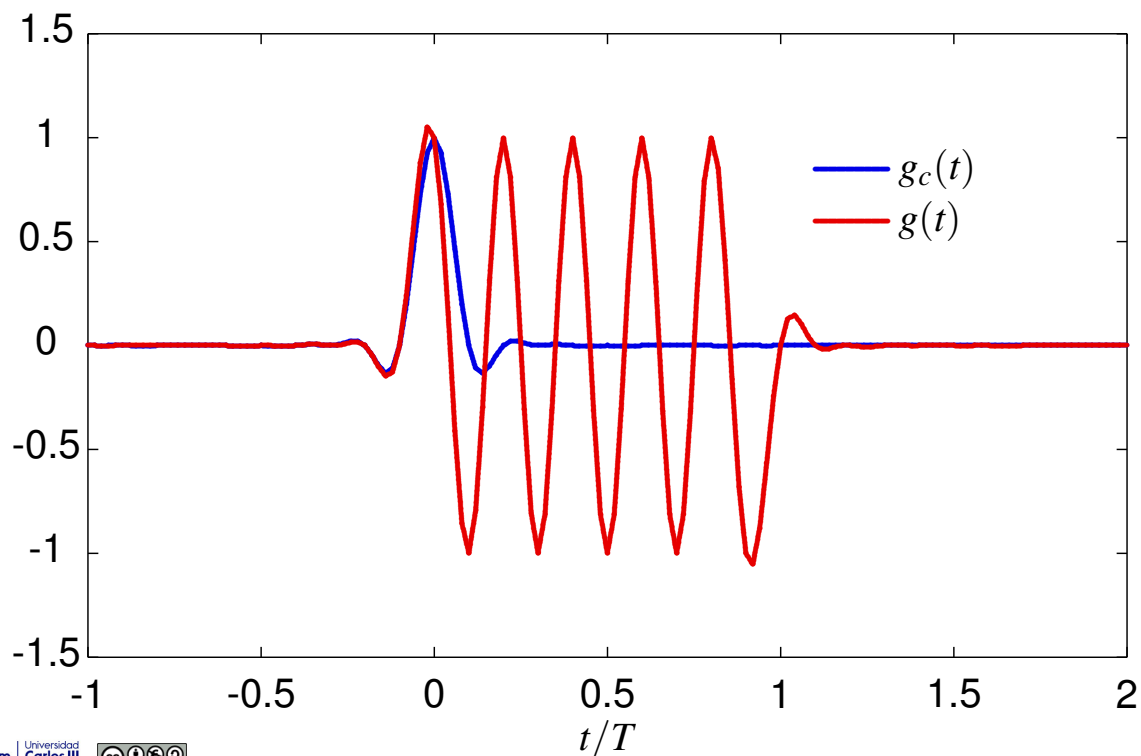
- Secuencia a transmitir:

n	0	1	2	3	4
$A[n]$	+1	-3	-1	+3	-1
- Secuencia de ensanchado ($N = 4$): $x[0] = +1$, $x[1] = -1$, $x[2] = +1$, $x[3] = -1$

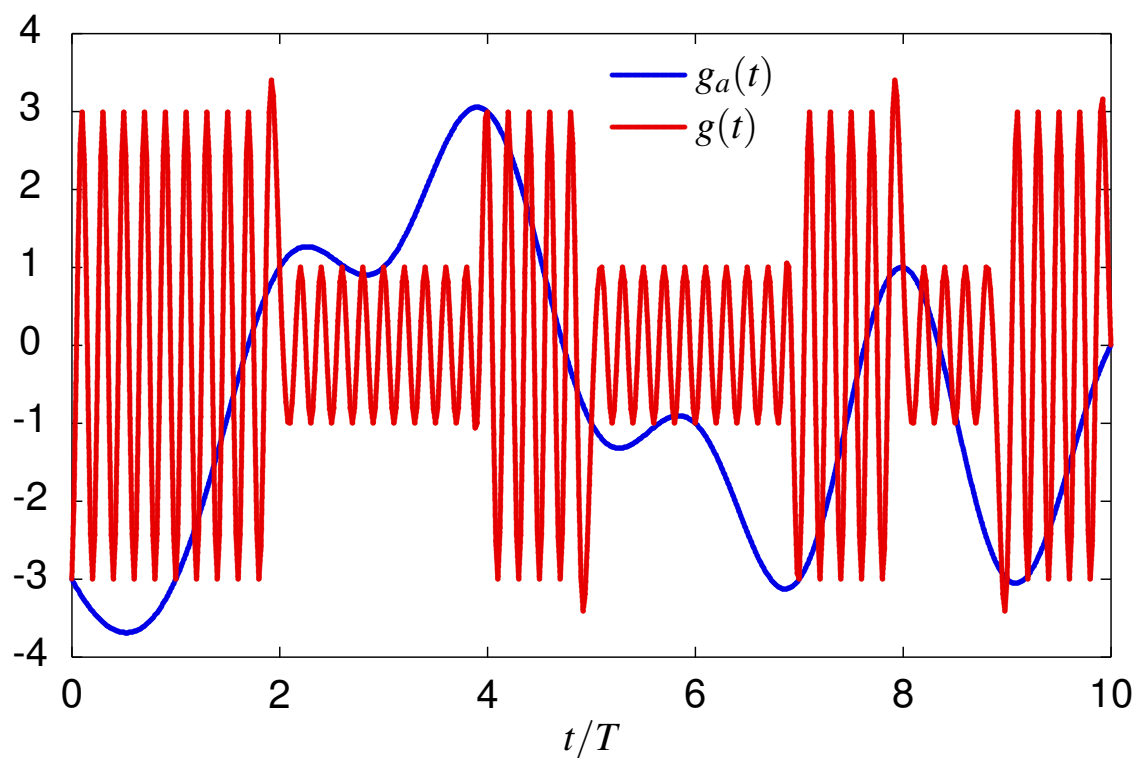


Ejemplo de pulso: coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1

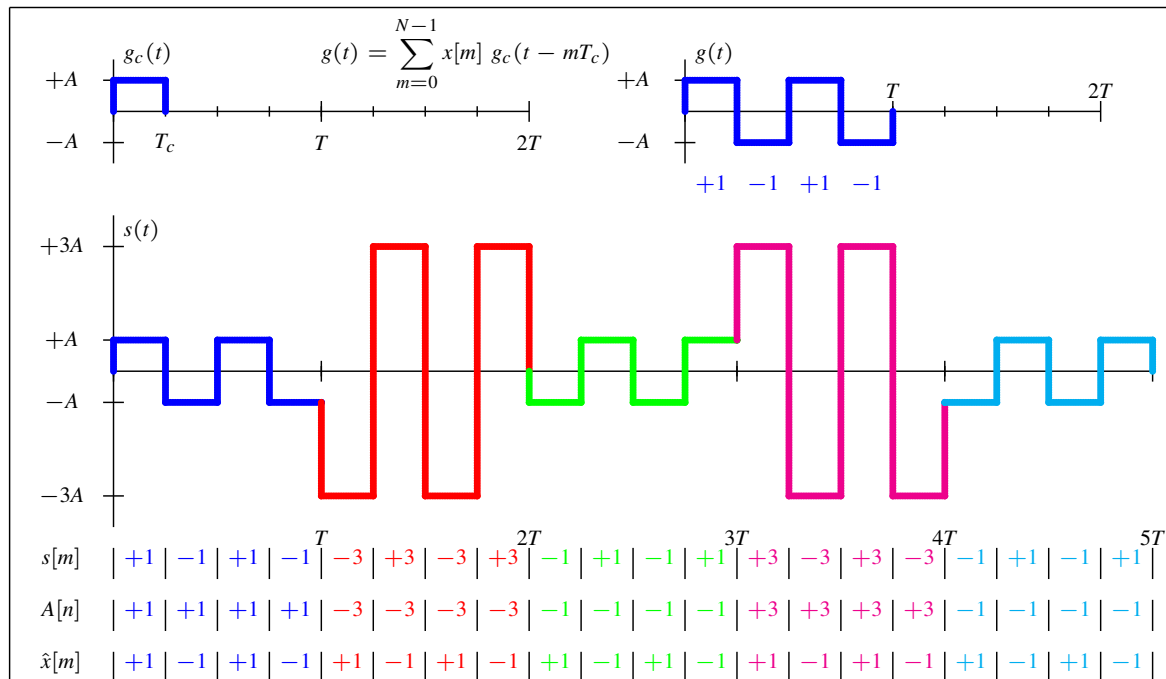


Ejemplo de forma de onda: Coseno alzado $N = 10, \alpha = 0,5$



Generación de las señales $s(t)$ (Ejemplo $N = 4$)

- Secuencia a transmitir: $\frac{n}{A[n]} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline +1 & -3 & -1 & +3 & -1 \\ \hline \end{array}$
- Secuencia de ensanchado ($N = 4$): $x[0] = +1, x[1] = -1, x[2] = +1, x[3] = -1$



DSSS - Notación alternativa

- Algunas definiciones
 - ▶ Secuencia periódica $\tilde{x}[m]$ a partir de la secuencia de ensanchado

$$\tilde{x}[m] = \sum_k x[m - kN]$$

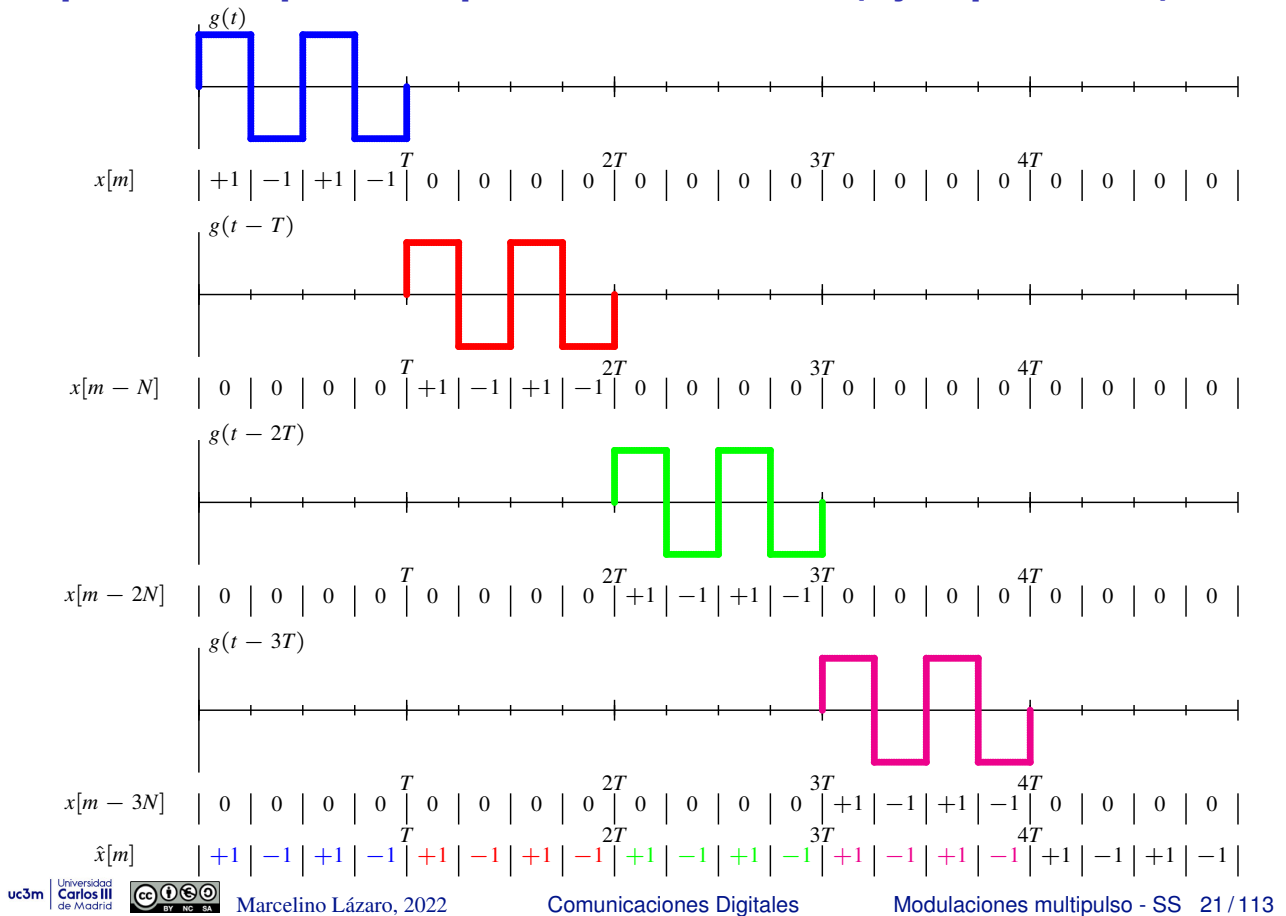
- ▶ Ventana causal discreta de N muestras

$$w_N[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Se reescribe la ecuación para $s(t)$, reescribiendo $g(t - nT)$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_n A[n] \times \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c - nT)}_{g(t-nT)} \\ &= \sum_n A[n] \times \sum_{m=nN}^{nN+N-1} x[m - nN] g_c(t - mT_c) \\ &= \sum_n A[n] \times \sum_m \tilde{x}[m] w_N[m - nN] g_c(t - mT_c) \end{aligned}$$

Expresiones para los pulsos retardados (Ejemplo $N = 4$)



DSSS - Notación alternativa (II)

- Se reordena la expresión anterior

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_n A[n] \sum_m \tilde{x}[m] w_N[m - nN] g_c(t - mT_c) \\ &= \sum_m \tilde{x}[m] \underbrace{\sum_n A[n] w_N[m - nN]}_{s[m]} g_c(t - mT_c) \\ &= \sum_m s[m] g_c(t - mT_c) \end{aligned}$$

- Interpretación de la expresión analítica resultante

- Generación de la señal $s(t)$ transmitiendo la secuencia de muestras $s[m]$ a tiempo de chip, T_c , con filtro transmisor a T_c
- Generación de la secuencia de muestras a tiempo de chip, $s[m]$

$$s[m] = \tilde{x}[m] \sum_n A[n] w_N[m - nN]$$

Transmisor DSSS - Generación de muestras y señal

- Muestras de la señal a T_c (muestras $s[m]$)

$$s[m] = \tilde{x}[m] \sum_n A[n] w_N[m - nN], \quad s[m] = A[n] \otimes x[m]$$

- Generación de $s[m]$ por bloques de tamaño N muestras

$$s[m] = \underbrace{\{s[0], s[1], \dots, s[N-1]\}}_{s^{(0)}[m]}, \underbrace{\{s[N], s[N+1], \dots, s[2N-1]\}}_{s^{(1)}[m]}, \dots, \underbrace{\{s[nN], s[nN+1], \dots, s[(n+1)N-1]\}}_{s^{(n)}[m]}, \dots$$

Bloque de índice n : $s^{(n)}[m]$, N muestras $\{s^{(n)}[0], s^{(n)}[1], \dots, s^{(n)}[N-1]\}$

Muestras del bloque de índice n : $s^{(n)}[m] = s[nN + m]$, $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Secuencia de muestras en el transmisor: $s[m] = \sum_n s^{(n)}[m - nN]$

- Cada símbolo $A[n]$ genera las N muestras de un bloque (índice n)

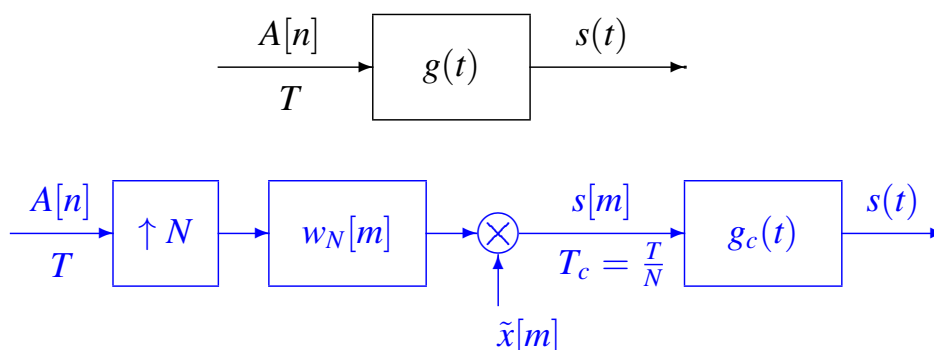
- El valor de $A[n]$ se multiplica por la secuencia de ensanchado

$$s^{(n)}[m] = A[n] \times x[m]$$

$$\left\{ s^{(n)}[m] \right\}_{m=0}^{N-1} \equiv \underbrace{A[n] \times x[0]}_{s[nN]}, \underbrace{A[n] \times x[1]}_{s[nN+1]}, \underbrace{A[n] \times x[2]}_{s[nN+2]}, \dots, \underbrace{A[n] \times x[N-1]}_{s[nN+N-1]}$$

Transmisor DSSS - Diagrama de bloques

- Diagramas de bloques del transmisor



- Las dos estructuras son equivalentes

- Modular la secuencia de símbolos (a tiempo de símbolo T) con un filtro $g(t)$ definido a tiempo de símbolo T
- Modular la secuencia de muestras (a tiempo de chip T_c) con un filtro $g_c(t)$ definido a tiempo de chip T_c

- La implementación de la segunda opción es más simple

- La implementación del filtro transmisor $g(t)$ puede ser compleja
 - ★ Combinación lineal de N filtros con $r_{g_c}(t)$ cumpliendo Nyquist
- La implementación del filtro transmisor $g_c(t)$ es simple
 - ★ Generación de las muestras $s[m]$ a partir de $A[n]$ eficiente vía software

Espectro de la señal DSSS en banda base

- Densidad espectral de potencia de la señal en banda base $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2$$

- Respuesta en frecuencia del pulso $g(t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c)$$

$$G(j\omega) = G_c(j\omega) \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\omega m T_c} = G_c(j\omega) X(e^{j\omega T_c})$$

- Densidad espectral de potencia de la señal DSSS

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |X(e^{j\omega T_c})|^2 |G_c(j\omega)|^2$$

Ancho de banda de las señales DSSS

- Ancho de banda de la señal en banda base

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |X(e^{j\omega T_c})|^2 |G_c(j\omega)|^2$$

- ▶ El ancho de banda lo define el filtro a tiempo de chip
 - ★ Filtros de la familia del coseno alzado (raíz)

$$B = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) \times N \text{ Hz}$$

- Ancho de banda de la señal paso banda

$$S_X(j\omega) = \frac{1}{2} [S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-(j\omega + j\omega_c))]$$

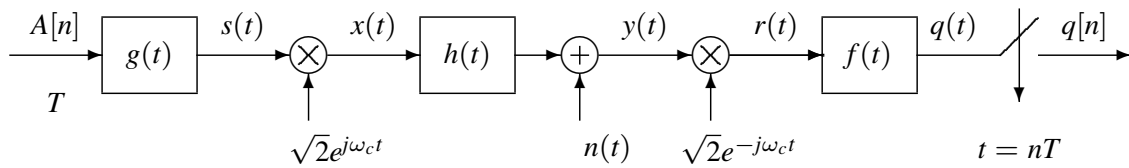
- ▶ Para una tasa de símbolo dada, se dobla el ancho de banda

$$B = R_s (1 + \alpha) \times N \text{ Hz}$$

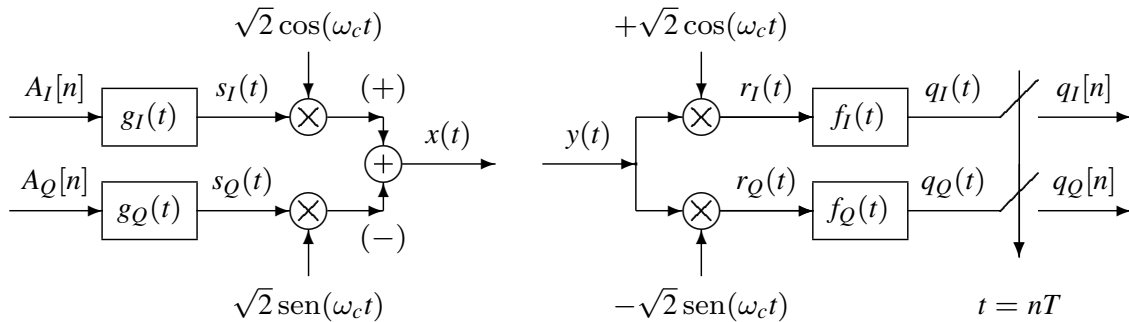
- ★ Cada T seg. ahora se transmiten dos símbolos ($A_I[n]$ y $A_Q[n]$)
 - Se mantiene la eficiencia espectral

Transmisión paso banda

Modulación paso banda - Representación compleja



Representación en componentes en fase y cuadratura



Secuencia de ensanchado y filtro $g(t)$ complejos

$$x[m] = x_I[m] + jx_Q[m], \quad g(t) = g_I(t) + jg_Q(t)$$

- Habitualmente, $x_I[m] = x_Q[m]$ (aunque no es necesario)

Receptor (complejo) en banda base

Filtro receptor $f(t) = g^*(-t)$ y señal recibida en banda base $r(t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c) \Rightarrow g^*(-t) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] g_c^*(-t - mT_c) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] g_c(-t - mT_c)$$

NOTA: $g_c^*(-t) = g_c(-t)$, ya que $g_c(t)$ es un filtro real

$$\begin{aligned} q[n] &= (r(t) * g^*(-t)) \Big|_{t=nT} = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \left(r(t) * g_c(\underbrace{-t - mT_c}_{-(t+mT_c)}) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] \left(\underbrace{r(t) * g_c(-t)}_{v(t)} \right) \Big|_{t=nT + mT_c} \\ &\quad \underbrace{(nN+m)T_c} \end{aligned}$$

- Señal de salida del filtro receptor a tiempo de chip: $v(t) = r(t) * g_c(-t)$
- Señal en tiempo discreto muestreada a T_c : $v[m] = v(t) \Big|_{t=mT_c = m \frac{T}{N}} = v(mT_c)$

La salida del demodulador se puede escribir como

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] v[nN + m]$$

Proceso por bloques de N muestras

- Procesando por bloques de N muestras de la secuencia $v[m]$

$$v[m] = \underbrace{\{v[0], v[1], \dots, v[N-1]\}}_{v^{(0)}[m]} \underbrace{\{v[N], v[N+1], \dots, v[2N-1]\}}_{v^{(1)}[m]} \dots \underbrace{\{v[nN], v[nN+1], \dots, v[(n+1)N-1]\}}_{v^{(n)}[m]} \dots$$

Bloque de índice n : $v^{(n)}[m]$, N muestras $\{v^{(n)}[0], v^{(n)}[1], \dots, v^{(n)}[N-1]\}$

Muestras del bloque de índice n : $v^{(n)}[m] = v[nN + m]$, $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Secuencia de muestras en el receptor: $v[m] = \sum_n v^{(n)}[m - nN]$

- Obtención de $q[n]$: procesamiento del bloque de índice n

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] v[nN + m] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] v^{(n)}[m]$$

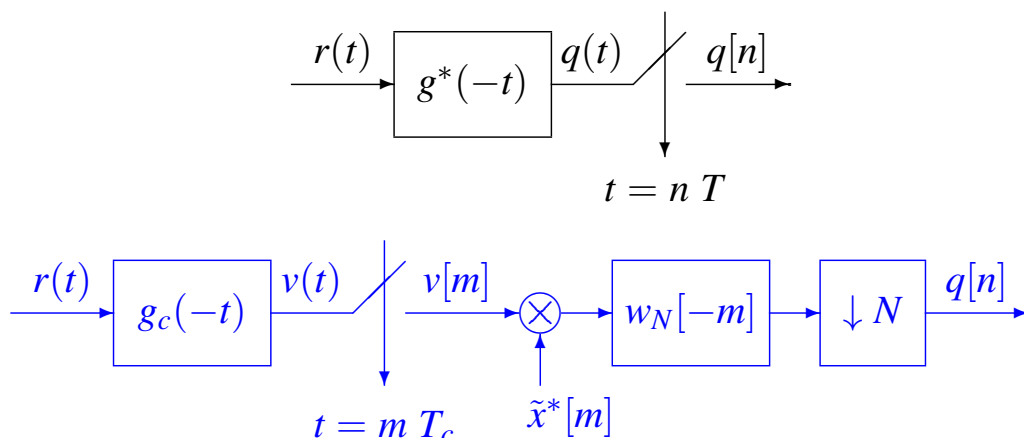
$$q[n] = \underbrace{v^{(n)}[0]}_{v[nN]} \times x^*[0] + \underbrace{v^{(n)}[1]}_{v[nN+1]} \times x^*[1] + \underbrace{v^{(n)}[2]}_{v[nN+2]} \times x^*[2] + \dots + \underbrace{v^{(n)}[N-1]}_{v[nN+N-1]} \times x^*[N-1]$$

Receptor en banda base - Diagrama de bloques

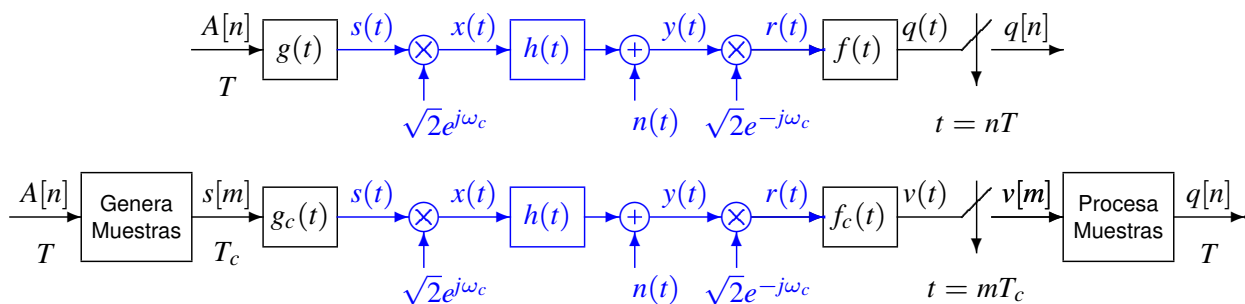
- Expresión para la salida del demodulador

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] v[nN + m] \\ = (v[m] \tilde{x}^*[m]) * w_N[-m - nN]$$

- Diagrama de bloques del receptor



Canales discretos equivalentes



- Filtros receptores - filtros adaptados: $f(t) = g^*(-t)$, $f_c(t) = g_c(-t)$
- Respuestas conjuntas transmisor/receptor/canal
 - ▶ Transmisión de $A[n]$ a tiempo de símbolo: $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) = r_g(t) * h_{eq}(t)$
 - ▶ Transmisión de $s[m]$ a tiempo de chip: $d(t) = g_c(t) * h_{eq}(t) * f_c(t) = r_{g_c}(t) * h_{eq}(t)$

Canales discretos equivalentes

- ▶ A tiempo de símbolo

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} = p(nT) \text{ relaciona } q[n] \text{ con } A[n]: q[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$

- ▶ A tiempo de chip

$$d[m] = d(t)|_{t=mT_c} = d(mT_c) \text{ relaciona } v[m] \text{ con } s[m]: v[m] = s[m] * d[m] + z_c[m]$$

Características de ruido del receptor (paso banda)

- El canal introduce ruido aditivo blanco y gaussiano $n(t)$ con DEP $S_n(j\omega)$
- Si se cumplen las siguientes condiciones
 - ▶ $f(t) = g^*(-t)$
 - ▶ $n(t)$ es blanco y $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz

$z[n]$ es blanco y gaussiano con varianza

$$\sigma_z^2 = N_0 \mathcal{E} \{g(t)\}$$

Parte real e imaginaria independientes y con varianzas $\frac{N_0}{2} \mathcal{E} \{g(t)\}$

$z_c[m]$ es blanco y con varianza

$$\sigma_{z_c}^2 = N_0 \mathcal{E} \{g_c(t)\}$$

Parte real e imaginaria independientes y con varianzas $\frac{N_0}{2} \mathcal{E} \{g_c(t)\}$

Energía de los pulsos $g_c(t)$ y $g(t)$

- Definición del pulso a tiempo de símbolo

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c)$$

- Energía del pulso $g(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c) \right) \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] g_c(t - \ell T_c) \right) dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t - mT_c) g_c(t - \ell T_c) dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} g_c(\tau) \underbrace{g_c(\tau - \ell T_c + mT_c)}_{r_{g_c}([\ell - m]T_c)} d\tau \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \right] \times \mathcal{E} \{g_c(t)\} \end{aligned}$$

NOTA: Si $r_{g_c}(t)$ cumple Nyquist a T_c , $r_{g_c}([\ell - m]T_c)$ es nulo para $\ell \neq m$, y para $\ell = m$ (propiedad de una función de ambigüedad temporal) vale la energía de $g_c(t)$, es decir $r_{g_c}([\ell - m]T_c) = \mathcal{E} \{g_c(t)\} \delta[\ell - m]$

Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo, $p[n]$

- El filtro receptor es $f(t) = g^*(-t)$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c), \quad f(t) = g^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] g_c(-t - \ell T_c)$$

- Canal discreto equivalente

$$p[n] = (g(t) * h_{eq}(t) * f(t)) \Big|_{t=nT}$$

$$\begin{aligned} p[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] \left(g_c(t - mT_c) * h_{eq}(t) * g_c(\underbrace{-t - \ell T_c}_{-(t + \ell T_c)}) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] \left(\underbrace{g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c(-t)}_{d(t)} \right) \Big|_{t=\underbrace{nT + \ell T_c - mT_c}_{(nN + \ell - m)T_c}} \end{aligned}$$

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] d[nN + \ell - m]$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo

- Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] d[nN + \ell - m]$$

- Factor de ensanchado $N = 10$

- ▶ Secuencia de ensanchado

$$x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6], x[7], x[8], x[9]$$

- Canal discreto equivalente a tiempo de chip

$$d[m] = a \delta[m] + b \delta[m - 2] + c \delta[m - 14]$$

- ▶ Valores no nulos de $d[nN + \ell - m]$

- ★ $nN + \ell - m = 0$

- ★ $nN + \ell - m = 2$

- ★ $nN + \ell - m = 14$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (II)

- Caso $nN + \ell - m = 0 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = a$

- ▶ $n = 0 \rightarrow \ell - m = 0 \rightarrow \ell = m$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m] = \sum_{m=0}^9 |x[m]|^2 = a_1$$

- Caso $nN + \ell - m = 2 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = b$

- ▶ $n = 0 \rightarrow \ell - m = 2 \rightarrow \ell = m + 2$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m + 2] = \sum_{m=0}^7 x[m] x^*[m + 2] = b_1$$

- ▶ $n = 1 \rightarrow N + \ell - m = 2 \rightarrow \ell = m - 8$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m - 8] = \sum_{m=8}^9 x[m] x^*[m - 8] = b_2$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (III)

- Caso $nN + \ell - m = 14 \Rightarrow d[nN + \ell - m] = c$

► $n = 1 \rightarrow N + \ell - m = 14 \rightarrow \ell = m + 4$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m+4] = \sum_{m=0}^5 x[m] x^*[m+4] = c_1$$

► $n = 2 \rightarrow 2N + \ell - m = 14 \rightarrow \ell = m - 6$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m-6] = \sum_{m=6}^9 x[m] x^*[m-6] = c_2$$

- Canal discreto equivalente

$$\begin{aligned} p[n] = & (a \times a_1 + b \times b_1) \delta[n] \\ & + (b \times b_2 + c \times c_1) \delta[n-1] \\ & + (c \times c_2) \delta[n-2] \end{aligned}$$

Canal discreto equivalente - Ejemplo (IV)

- Secuencia de ensanchado

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[m]$	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1

- Valores relacionados con $p[n]$, para $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$

$$a_1 = 10, b_1 = -2, b_2 = 0, c_1 = +2, c_2 = 0$$

$$p[n] = 11 \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1]$$

- Términos relacionados con la ISI

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m-k_a], \quad \sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m+k_b]$$

Condiciones para evitar la ISI

- No hay interferencia intersimbólica si $d[m] = C \delta[m]$
 - ▶ Si no hay interferencia sobre $s[m]$ no hay interferencia sobre $A[n]$
- Si $d[m] \neq C \delta[m]$, la ISI se evita si

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] x^*[m \pm k] = C \delta[k]$$

Esta condición se cumple cuando

- ▶ La función de ambigüedad de $x[m]$ es una delta
- ▶ Espectro de $x[m]$ constante $|X(e^{j\omega})|^2 = C$
- Ejemplos de secuencias con espectro (casi) plano
 - ▶ $x[m] = e^{j\theta} \delta[m - k]$ (problema: localización)
 - ▶ Secuencias de pseudo-ruido: $|X(e^{j\omega})|^2 \approx C$

Energía de los pulsos $g_c(t)$ y $g(t)$ - Implicación práctica

- Transmisión sobre un canal ideal ($h_{eq}(t) = \delta(t)$)
- Canal discreto equivalente a tiempo de chip

$$d[m] = d(t)|_{t=mT_c} = (g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c(-t))|_{t=mT_c} = r_{g_c}(t)|_{t=mT_c} = \mathcal{E}\{g_c(t)\} \delta[m]$$

- Canal discreto equivalente a tiempo de símbolo

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] d[nN + \ell - m]$$

- ▶ Dado $d[m]$, términos no nulos sólo para $nN + \ell - m = 0$
 - ★ Esto sólo es posible si $n = 0$ y $\ell = m$

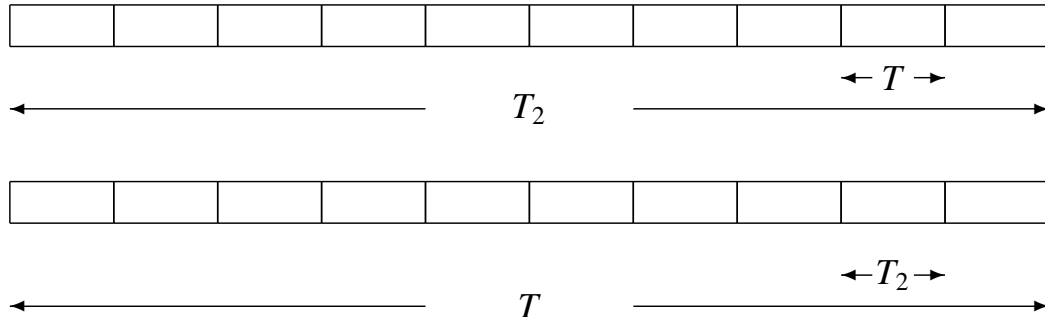
$$p[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \times \mathcal{E}\{g_c(t)\} \right] \delta[n] = \mathcal{E}\{g(t)\} \delta[n]$$

NOTA: $p[n] = p(t)|_{t=nT} = (g(t) * h_{eq}(t) * g(-t))|_{t=nT} = r_g(t)|_{t=nT} = \mathcal{E}\{g(t)\} \delta[n]$

Espectro ensanchado por salto en frecuencia

FHSS: *Frequency Hopping Spread Spectrum*

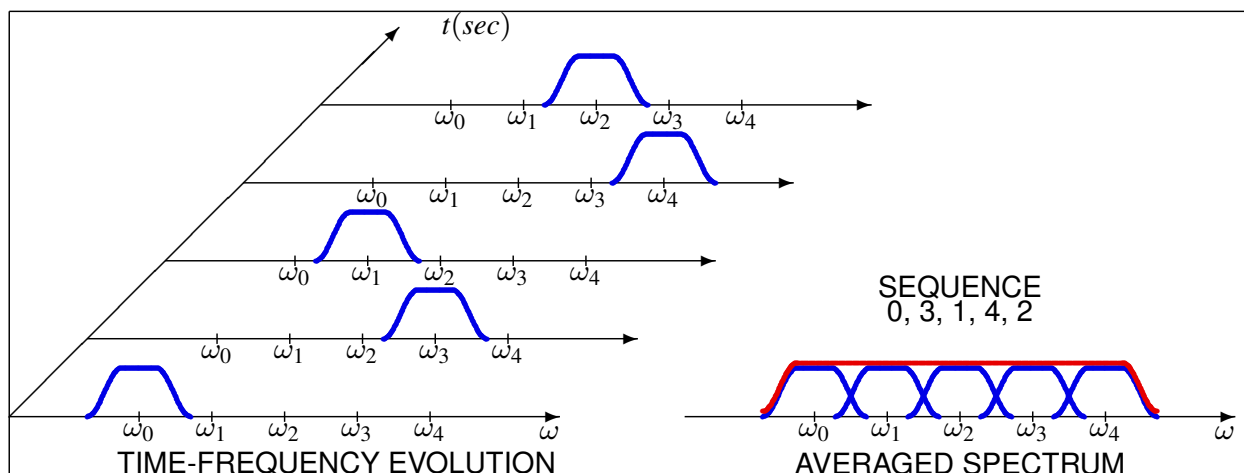
- Canal con “valles” de atenuación
 - ▶ Repartir casos favorables y desfavorables
 - ★ Frecuencia portadora con cambios periódicos
 - ★ Período de salto T_2
- Clasificación
 - ▶ De salto lento: $T_2/T = N \in \mathbb{Z} > 1$
 - ▶ De salto rápido: $T/T_2 = N \in \mathbb{Z} > 1$



- Se puede implementar para múltiples modulaciones
 - ▶ Opción más utilizada: FSK de fase continua (CPFSK)

Espectro FHSS - Evolución cíclica en el tiempo

- Saltos en frecuencia guiados por una secuencia de ensanchado
 - ▶ Secuencia pseudoaleatoria que define el orden de portadoras en los saltos
 - ▶ Debe ser conocida por transmisor y receptor
- Ejemplo usando 5 portadoras



Expresiones para una CPFSK

- Señal CPFSK M -aria: $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \sin\left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi}{T} t\right) w_T(t - nT)$$

- Señal de espectro ensanchado de salto lento

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_m \sum_{n=0}^{T_2/T-1} \sin\left(\omega_c t + x[m] \frac{\pi}{T} t + I[n + mN] \frac{\pi}{T} t\right) w_T(t - nT - mT_2)$$

- Señal de espectro ensanchado de salto rápido

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \sum_{m=0}^{T/T_2-1} \sin\left(\omega_c t + x[m + nN] \frac{\pi}{T_2} t + I[n] \frac{\pi}{T_2} t\right) w_{T_2}(t - nT - mT_2)$$

- $x[m]$: secuencia determinista que hace variar la frecuencia ($2kM$)

Acceso al medio de múltiples usuarios - CDMA

- Una de las aplicaciones del espectro ensanchado es el acceso múltiple
 - ▶ Varios usuarios acceden simultáneamente al sistema utilizando la misma banda de frecuencias
 - ★ Acceso por división de código
- Cada usuario utiliza una secuencia de ensanchado diferente
 - ▶ Código de usuario
- Las condiciones para seleccionar secuencias de ensanchado apropiadas dependen de la variante particular de espectro ensanchado

CDMA - DSSS

- Parámetros idénticos para todos los usuarios

- ▶ $g_c(t), T, T_c$

- Señales multiusuario CDMA: L usuarios

- ▶ Cada usuario tiene una secuencia de ensanchado $x_i[m]$
 - ▶ Filtro transmisor a tiempo de símbolo para el usuario i -ésimo

$$g_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] g_c(t - m T_c)$$

- ▶ Señal compleja en banda base

$$s(t) = \sum_{i=0}^{L-1} s_i(t)$$

$$s_i(t) = \sum_n A_i[n] g_i(t - nT) = \sum_n A_i[n] \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] g_c(t - mT_c - nT)$$

- Separación de las señales de cada usuario

- ▶ Filtros transmisores ortogonales: $\langle g_i(t), g_j(t) \rangle = 0, \quad \forall i \neq j$

Condición de ortogonalidad de los pulsos

- Producto escalar de dos filtros distintos a período de símbolo

$$\langle g_i(t), g_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) g_j^*(t) dt$$

$$g_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] g_c(t - m T_c)$$

$$g_j(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_j[\ell] g_c(t - \ell T_c)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[\ell] \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t - mT_c) g_c^*(t - \ell T_c) dt$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[\ell] (g_c(t - mT_c) * g_c^*(-t - \ell T_c))_{t=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[m]$$

- Condición de ortogonalidad sobre las secuencias de código

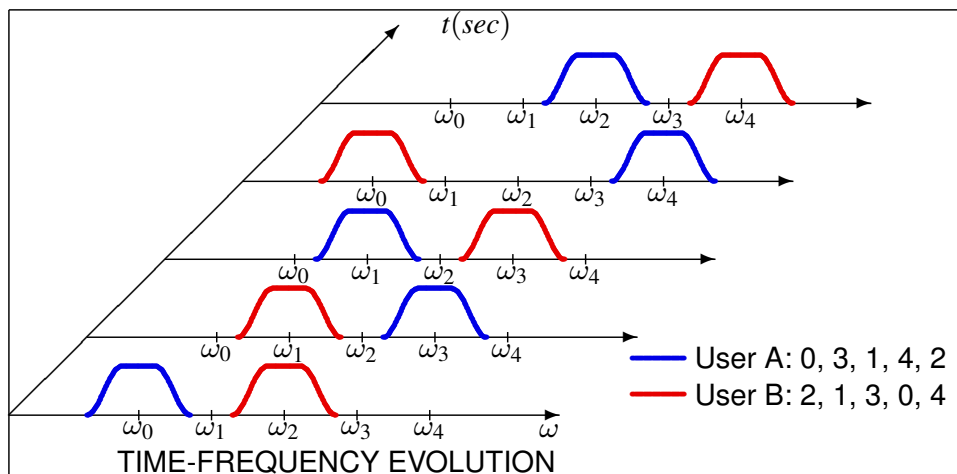
$$\sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[m] = \begin{cases} C, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = C \delta[i - j], \quad i, j = 0, \dots, L-1$$

- Varios tipos de secuencias se usan en la práctica

- ▶ Secuencias de Gold (1967), código de Kasami, secuencias de Welch,...

CDMA - FH-SS

- Usuarios diferentes usan distintas secuencias de ensanchado
 - ▶ Las secuencias no deben producir solapamiento espectral en ningún instante
- Ejemplo simple con 5 portadoras y dos usuarios



Modulación con múltiples portadoras - FDM

FDM - Frequency division multiplex

- Ancho de banda disponible para el sistema FDM: W^{FDM} rad/s
- División del ancho de banda disponible en N subcanales
 - ▶ Ancho de banda de cada subcanal: $W = \frac{W^{FDM}}{N}$ rad/s
 - ▶ Secuencia de datos $A[n]$ dividida en N secuencias
 - ★ Transmisión de una señal en cada subcanal (p.e. PAM)
 - ▶ Tasa de cada subcanal: $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
 - ▶ Relación ancho de banda / tasa de transmisión en cada subcanal
 - ★ Utilizando filtros de la familia coseno alzado: $W = \frac{2\pi}{T} (1 + \alpha)$ rad/s
- Tasa total del sistema FDM:

$$R_s^{FDM} = \frac{1}{T^{FDM}} = N \times R_s \text{ baudios}$$

$$T^{FDM} = \frac{T}{N} \text{ segundos}$$

Modulación con múltiples portadoras - FDM (II)

● Transmisor

- ▶ Conversión serie a paralelo: $A[m] \rightarrow \{A_0[n], \dots, A_{N-1}\}$

★ Conversión de tasas:

$$R_s^{FDM} \text{ baudios (sistema FDM)} \rightarrow R_s \text{ baudios (por canal)}$$

- ▶ N ramas con señales PAM paso banda

- ★ Filtro transmisor en la rama k -ésima: $\phi_k(t)$, $k = 0, \dots, N-1$
 - Parámetros: filtro transmisor $g_k(t)$, frecuencia central $\omega_{c,k}$
- ★ Señal modulada en la rama k -ésima: $x_k(t)$

● Receptor

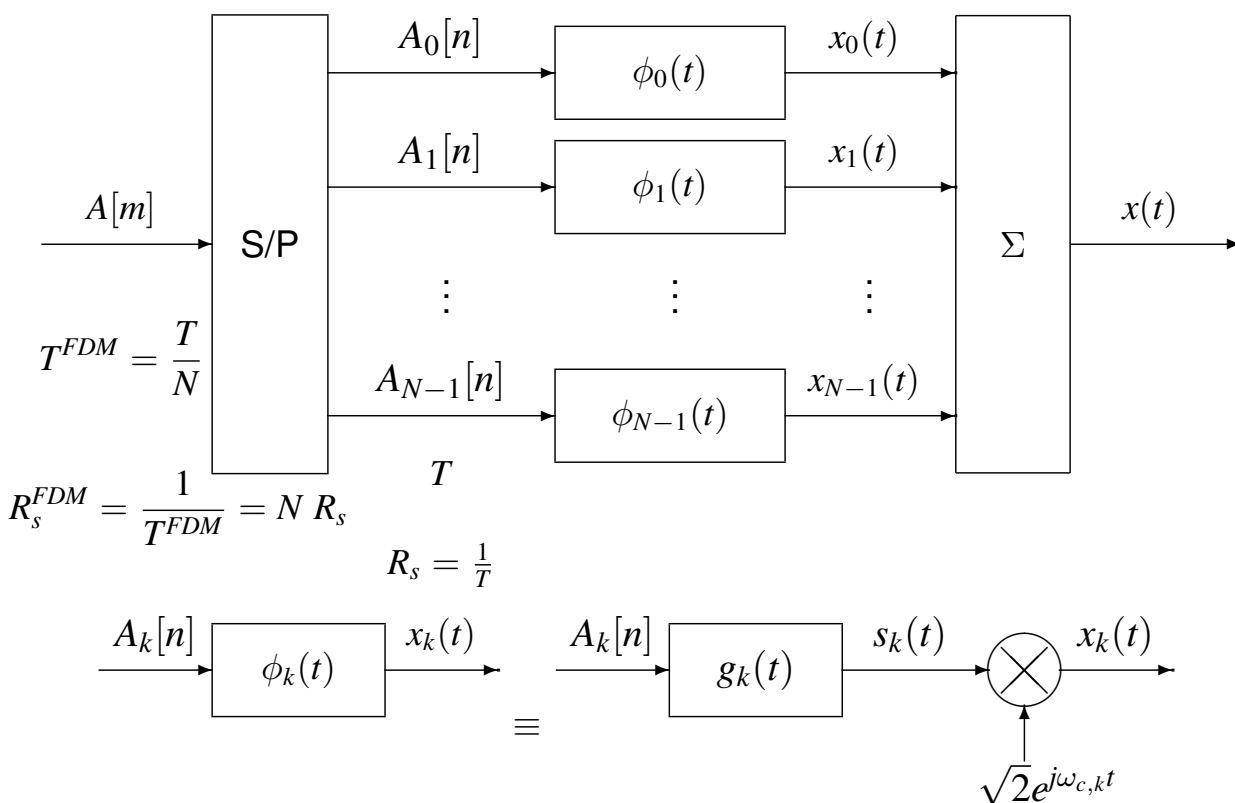
- ▶ N filtros adaptados al transmisor

- ▶ Conversión paralelo a serie: $\{\hat{A}_0[n], \dots, \hat{A}_{N-1}\} \rightarrow \hat{A}[m]$

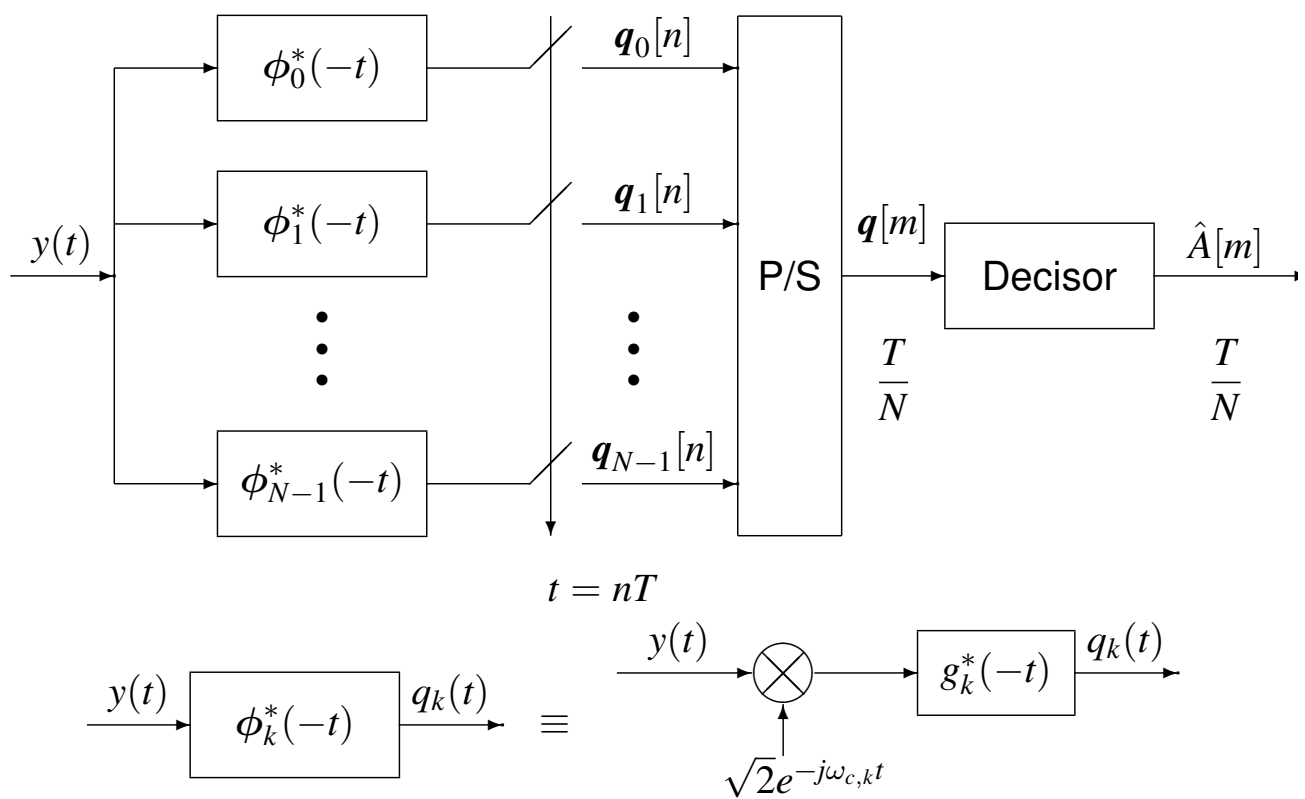
★ Conversión de tasas

$$R_s \text{ baudios (por canal)} \rightarrow R_s^{FDM} \text{ baudios (sistema FDM)}$$

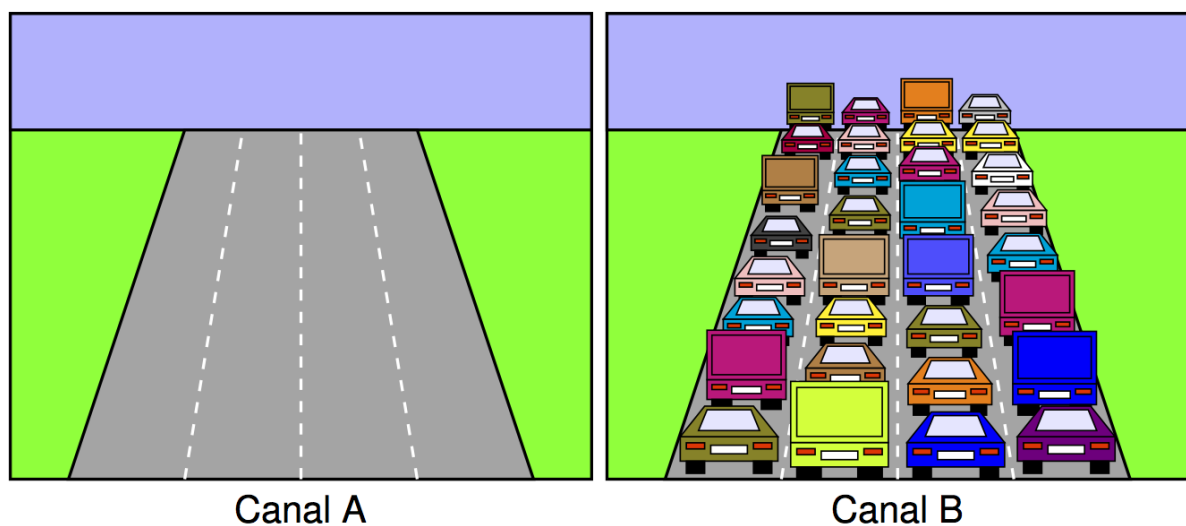
Modulador FDM



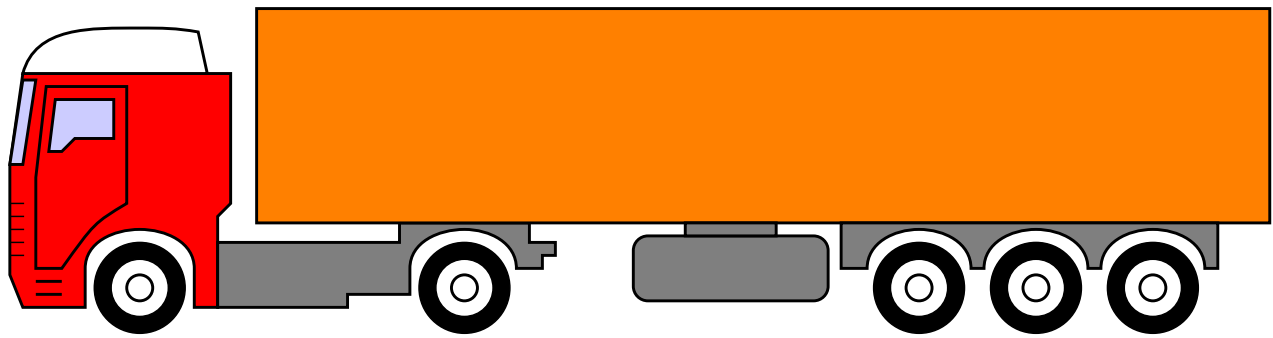
Demodulador FDM



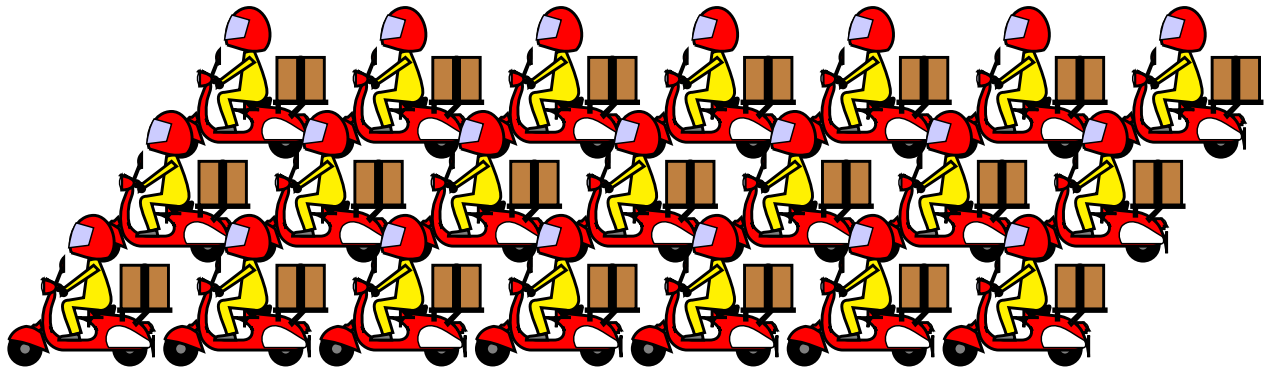
Algunos tipos de “canal”



Posibles soluciones

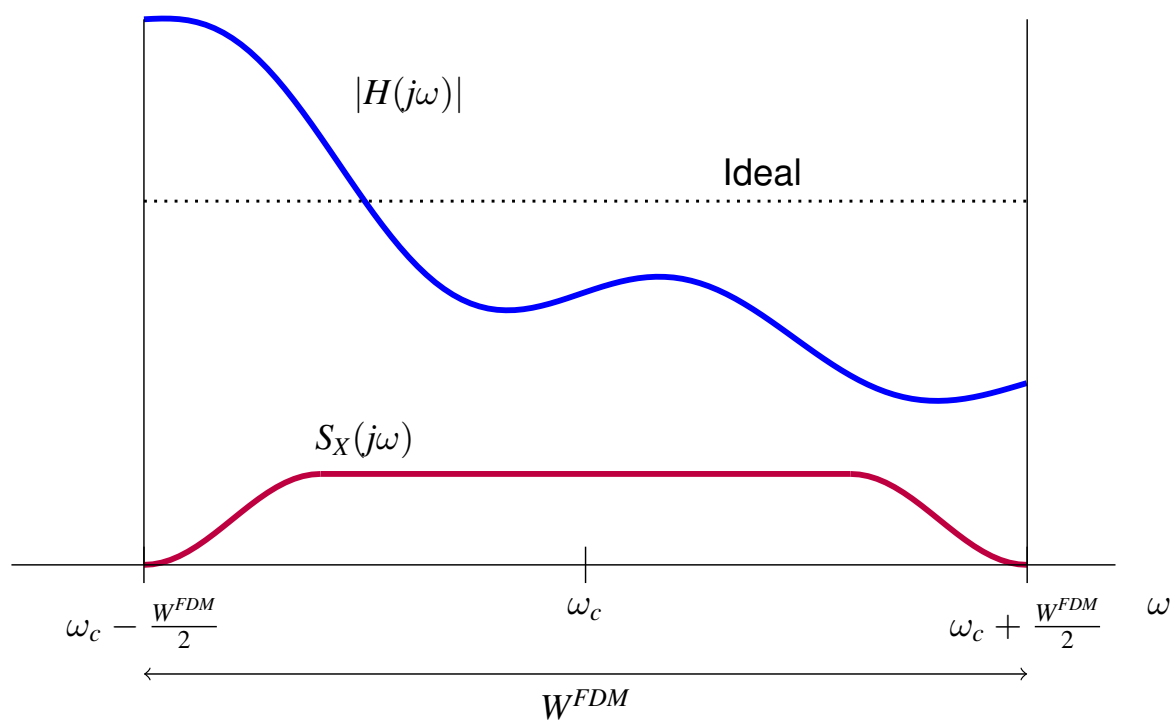


Portadora Única

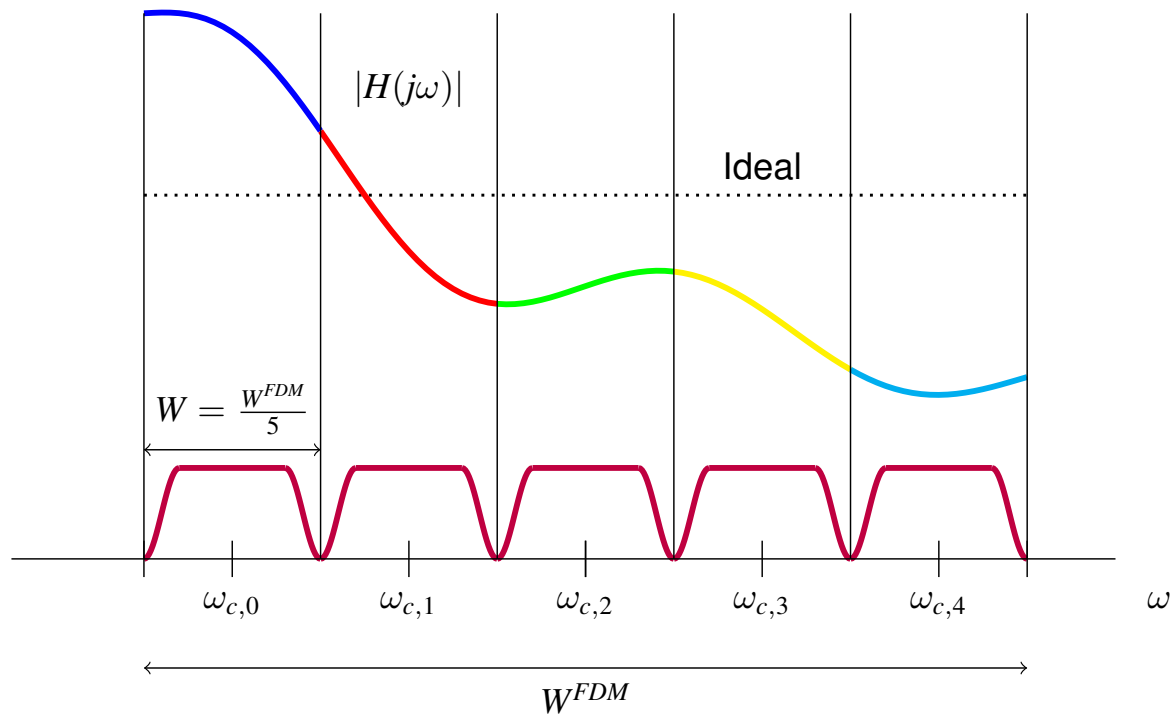


Múltiples Portadoras

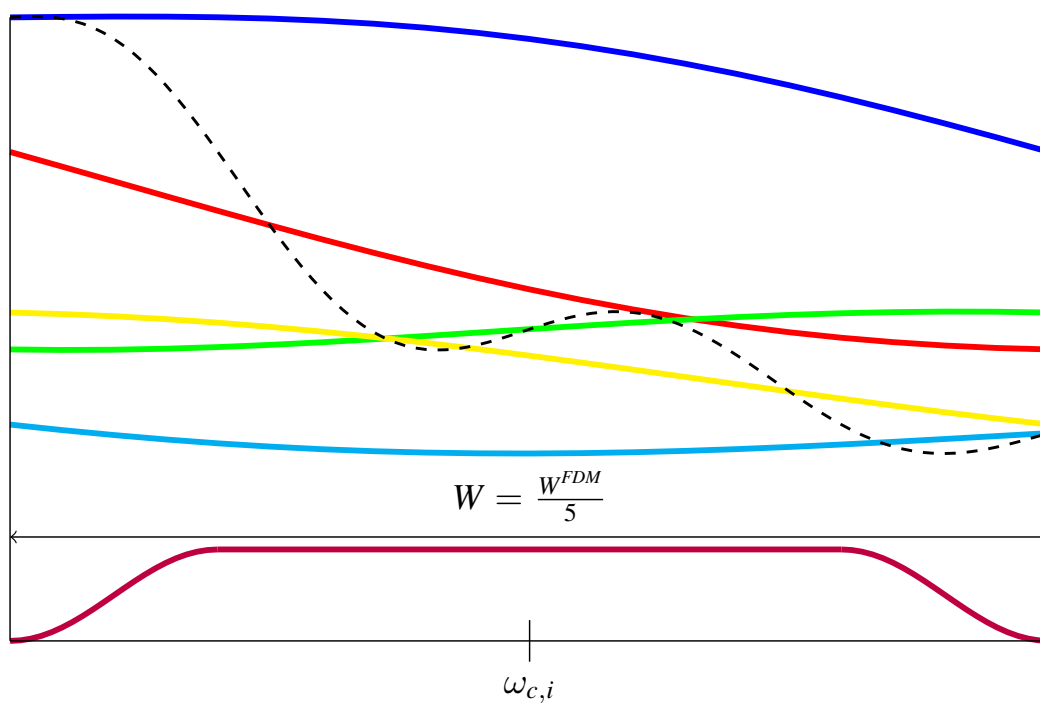
FDM - Distorsión del canal



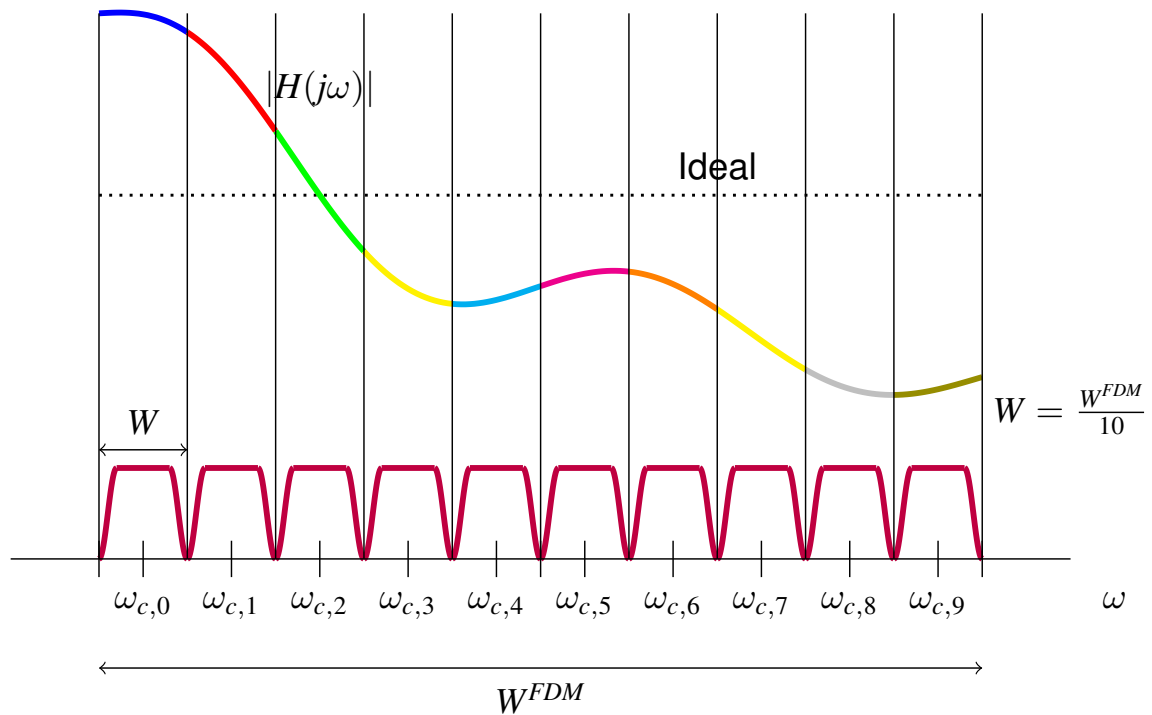
FDM - Distorsión del canal (II)



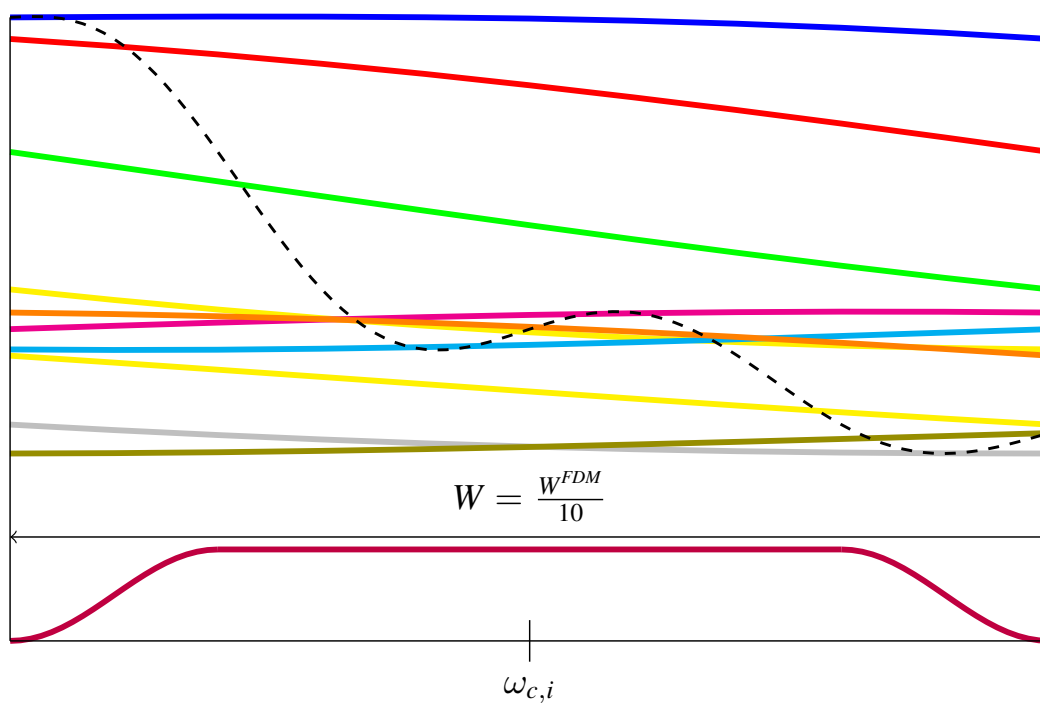
FDM - Distorsión del canal (III)



FDM - Distorsión del canal (IV)



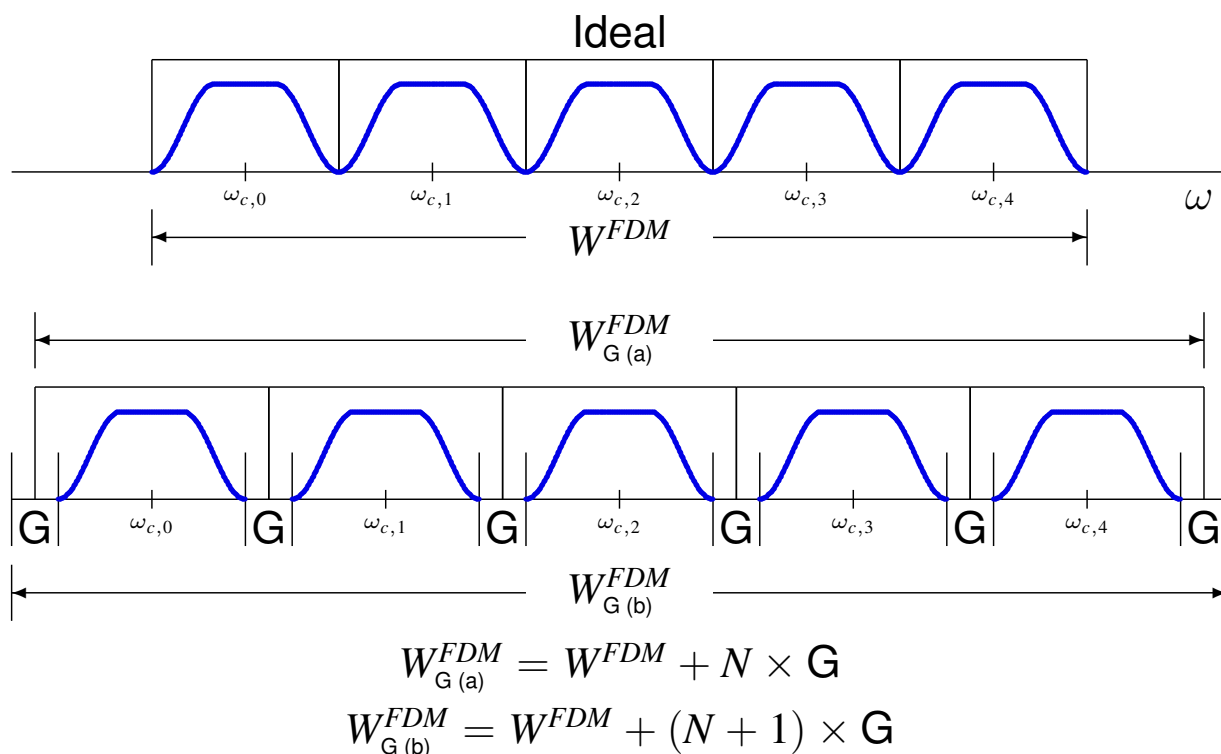
FDM - Distorsión del canal (V)



Inconvenientes solución FDM

- Complejidad hardware del sistema
 - ▶ N filtros transmisores (paso banda: componentes en fase y cuadratura)
 - ▶ N moduladores / demoduladores (paso banda)
 - ▶ N filtros complejos
 - ▶ N muestreadores síncronos (paso banda)
- Se necesitan filtros ideales para optimizar el uso del ancho de banda disponible
 - ▶ Sin filtros ideales, hay que introducir intervalos de guarda para separar los canales
 - ★ Pérdida de eficiencia espectral
- Solución alternativa:
 - ▶ Modulación FDM ortogonal (OFDM)
 - ★ N pulsos ortogonales (con solapamiento espectral)
 - ★ Uso eficiente del ancho de banda disponible
 - ★ Implementación eficiente: baja complejidad hardware

FDM - Bandas de guarda



NOTA: en algunos sistemas, las guardas en ambos extremos son de la mitad (a)

Modulación OFDM en tiempo continuo

- Señal modulada en términos de la señal compleja en banda base

$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{s(t) e^{j\omega_c t}\}$$

Notación habitual para señales moduladas paso banda

- Señal compleja en banda base

- ▶ Suma de N señales, una para cada secuencia de datos $A_k[n]$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_n A_k[n] \phi_k(t - nT)}_{s_k(t)}$$

Cada señal $s_k(t)$ es una señal PAM con filtro transmisor $\phi_k(t)$

- N pulsos: pulso prototipo $\times N$ diferentes portadoras

- ▶ Pulso $\phi_k(t)$: k períodos de una exponencial compleja normalizada en T seg.

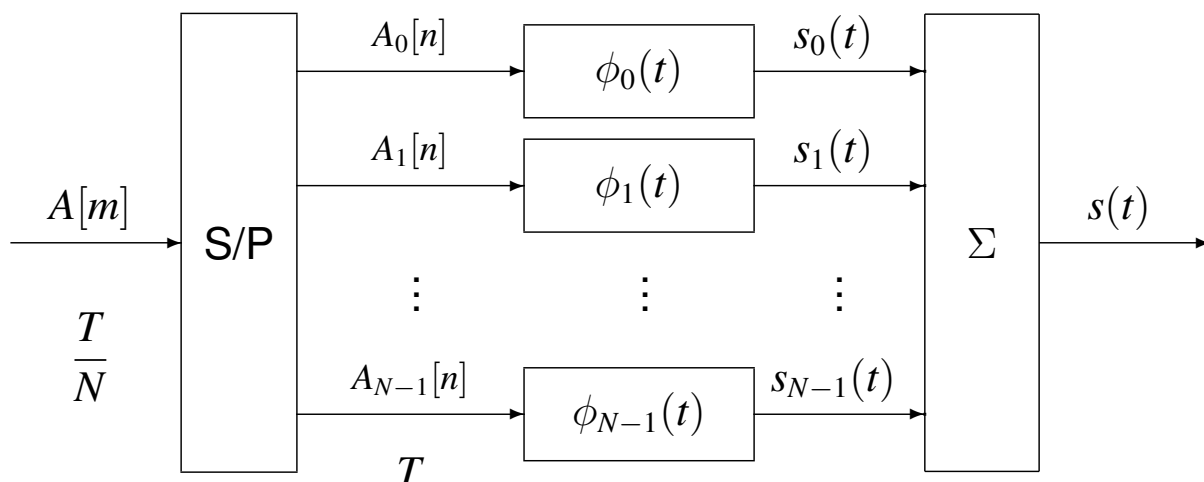
$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_T(t) e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$$

$w_T(t)$: ventana temporal causal de duración T segundos $w_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Modulador OFDM en tiempo continuo

- Conversión serie paralelo de secuencia de símbolos $A[m]$

- ▶ Secuencias $A_k[n]$, $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$
- ▶ Tiempo de símbolo OFDM
 - ★ Tiempo de símbolo de cada secuencia $A_k[n]$: T seg.
 - ★ Tasa por portadora OFDM: $R_s = \frac{1}{T}$ baudios
- ▶ Tasa de transmisión total
 - ★ Tasa total: $R_s^{TOTAL} = N \times R_s$ baudios
 - ★ Tiempo de símbolo total (sobre $A[m]$): $T^{TOTAL} = \frac{T}{N}$ seg.



Ortonormalidad de los pulsos

- Los pulsos OFDM forman una base ortonormal
 - ▶ Producto escalar

$$\begin{aligned}\langle \phi_k, \phi_\ell \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\frac{2\pi k}{T} t} e^{-j\frac{2\pi \ell}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T} t\right) dt + j\frac{1}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k-\ell)}{T} t\right) dt \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases} = \delta[k - \ell]\end{aligned}$$

- Relación de los pulsos con el pulso prototipo $\phi_0(t)$

$$\phi_k(t) = \phi_0(t) \times e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$$

$$\phi_k(t - nT) = \phi_0(t - nT) e^{j\frac{2\pi k}{T} (t - nT)} = \phi_0(t - nT) e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$$

Espectro de la OFDM en tiempo continuo

- Respuesta en frecuencia de los pulsos

$$|\Phi_k(j\omega)|^2 = T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{T}) T}{2\pi}\right), \quad k = 0, \dots, N-1$$

- $A_k[n]$ y $A_\ell[n]$ no están correladas y $A_k[n]$ es blanca $\forall k$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} |\Phi_k(j\omega)|^2$$

$E_{s,k}$: Energía media por símbolo de la constelación de la secuencia $A_k[n]$

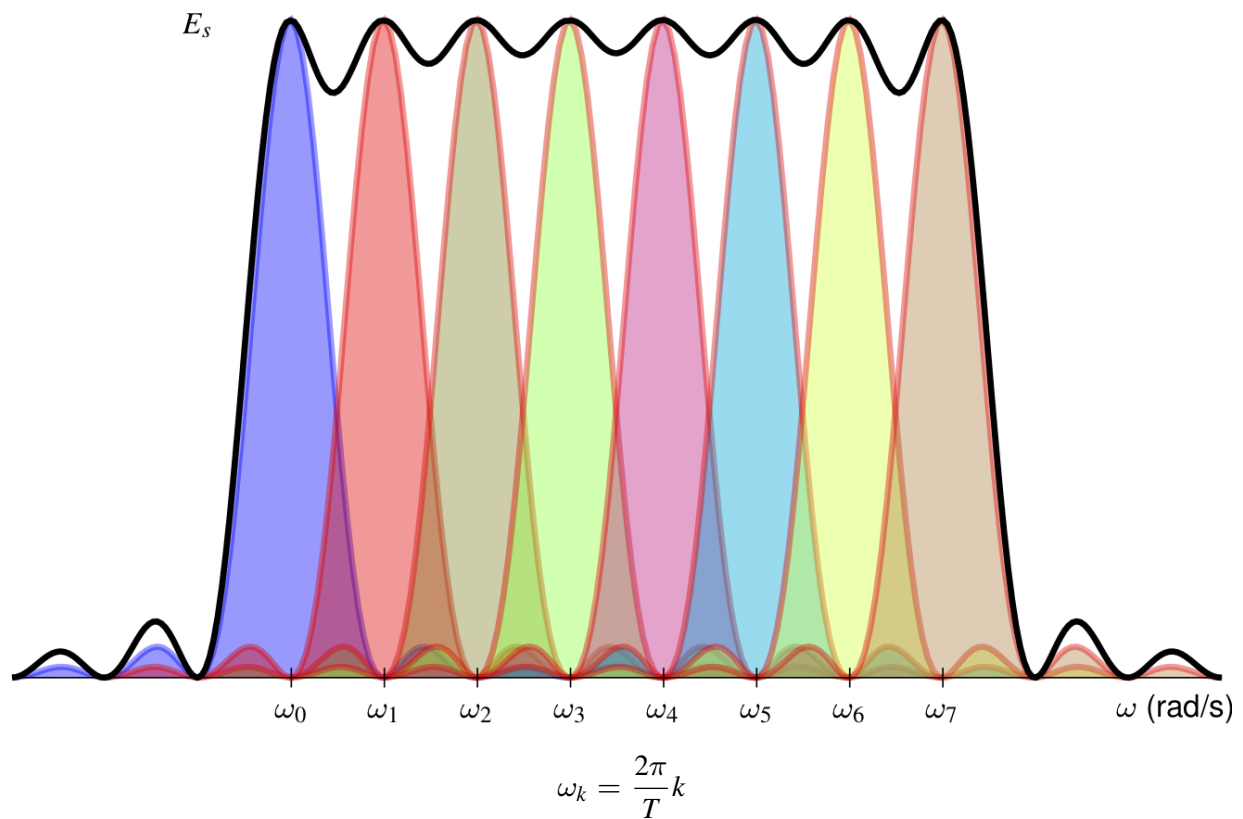
- Potencia de la señal transmitida

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k}$$

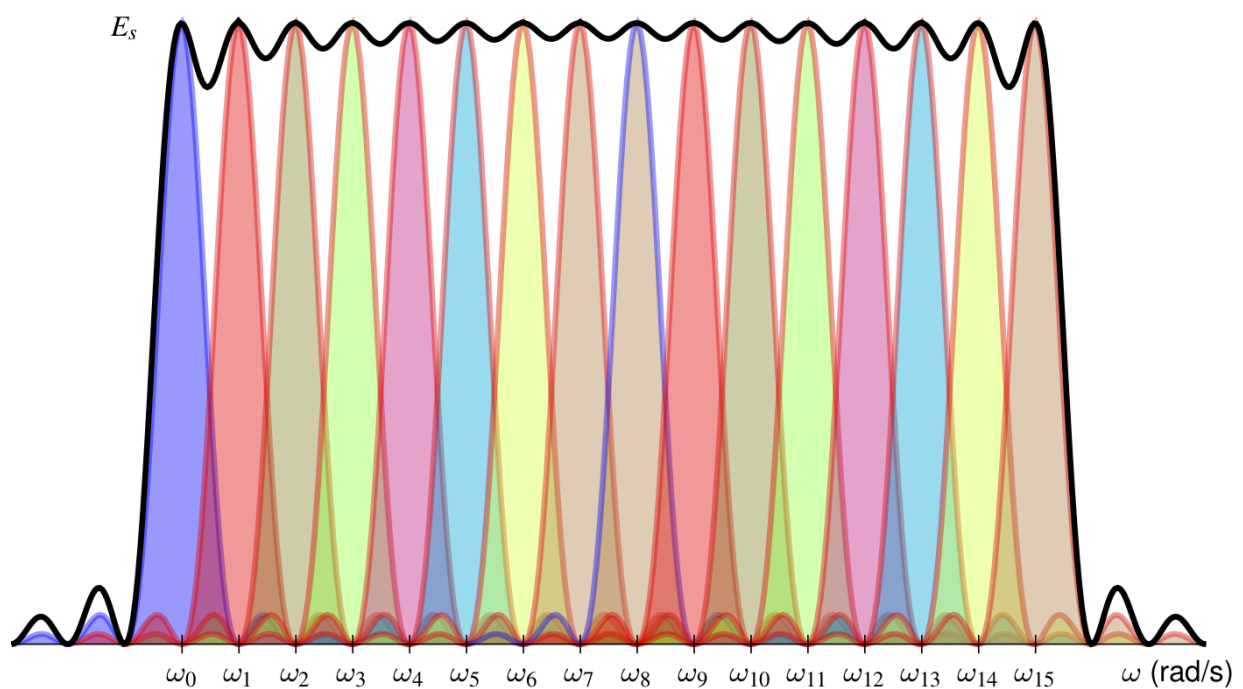
- Cuando las constelaciones de las N secuencias son idénticas

$$P_S = \frac{E_s}{T} \times N = E_s \times R_s \times N \text{ Watts}$$

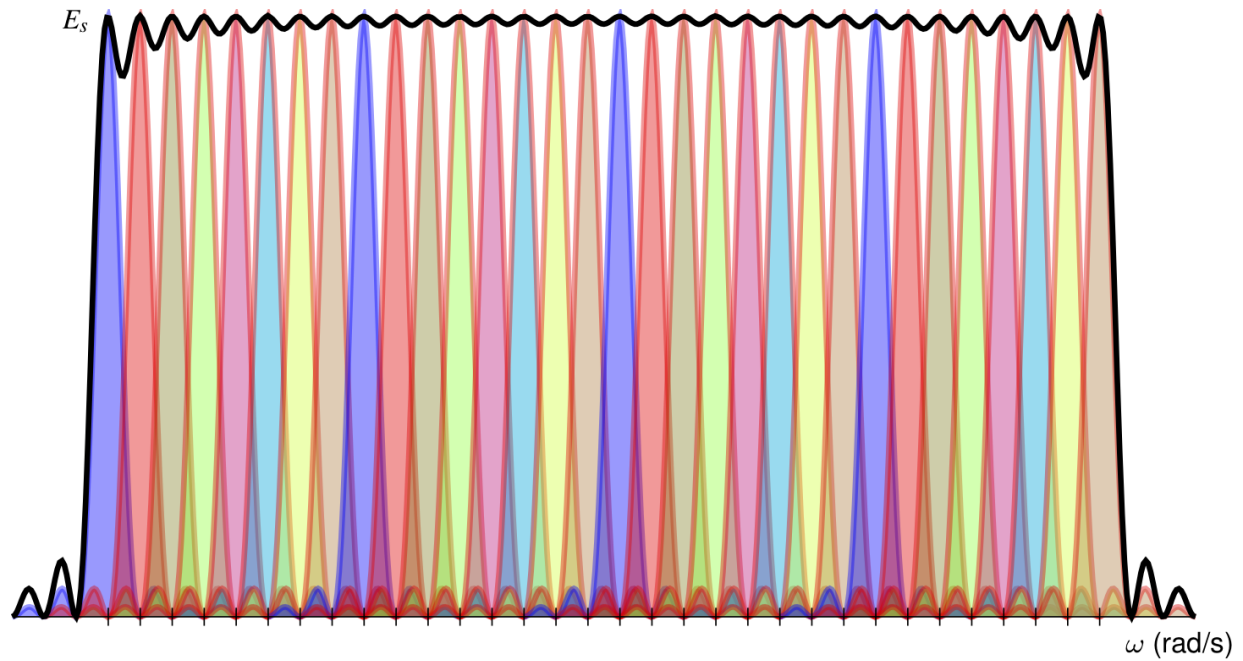
Espectro OFDM - $N = 8$



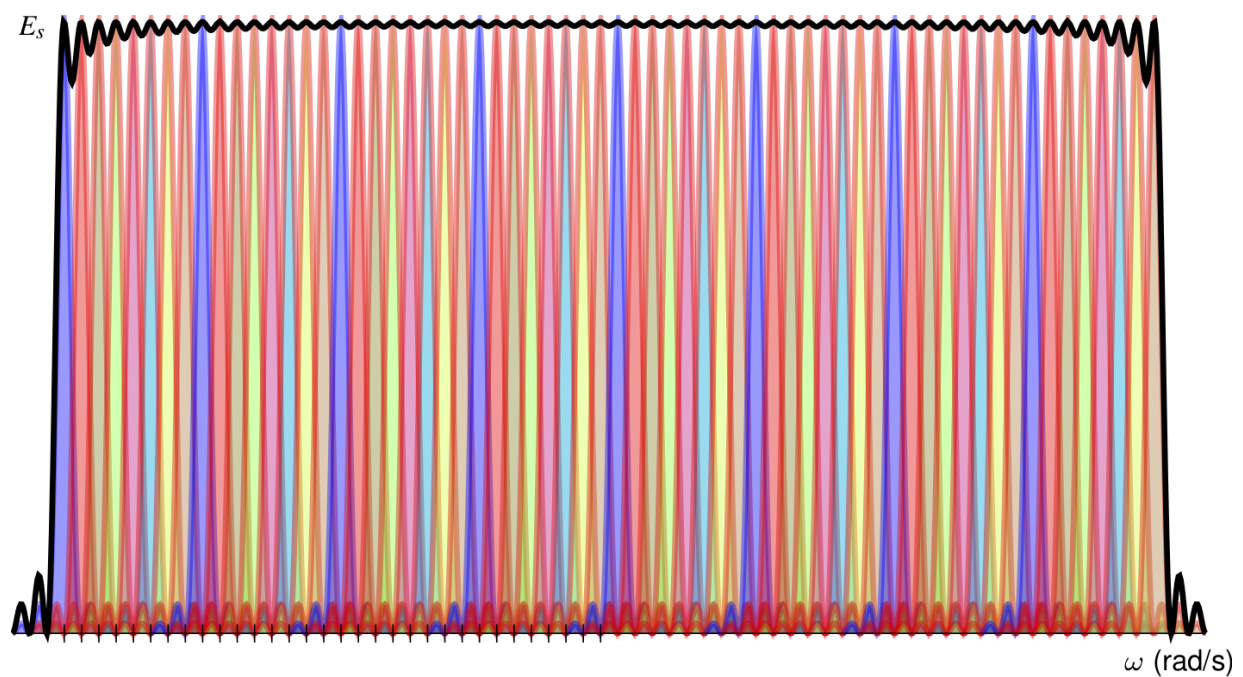
Espectro OFDM - $N = 16$



Espectro OFDM - $N = 32$



Espectro OFDM - $N = 64$



Espectro asintóticamente plano

- Si se consideran infinitas portadoras y constelaciones idénticas

$$S_s(j\omega) = E_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{T}) T}{2\pi} \right) \\ = E_s \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right)$$

- La densidad espectral de potencia es plana si se cumple

$$\frac{E_s}{T} (\phi_0(t) * \phi_0(-t)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = C \delta(t)$$

Modulación OFDM en tiempo discreto

- Aproximación: se considera ancho de banda limitado

▶ Ancho de banda aproximado $W^{OFDM} \approx \frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad./s}$

- Alternativa para la generación de la señal

- ▶ Síntesis de muestras de la señal a la velocidad de muestreo dada por Nyquist
Con la aproximación, significa tomar muestras cada T/N s
- ▶ Conversión Digital / Analógica (reconstrucción a T/N)

- Procedimiento de generación de la señal

- ▶ Obtención de las muestras de la señal (generación *software*)
 - ★ Dependerán de los símbolos transmitidos

$$s[m] = s(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}} = s \left(m \frac{T}{N} \right)$$

- ▶ Reconstrucción de la señal (conversión D/A)

- ★ Filtro de reconstrucción ideal (interpolación con sincs a $\frac{T}{N}$)

$$g_r(t) = \text{sinc} \left(\frac{N}{T} t \right) \xleftrightarrow{\mathcal{TF}} G_r(j\omega) = \frac{T}{N} \Pi \left(\frac{\omega T}{2\pi N} \right)$$

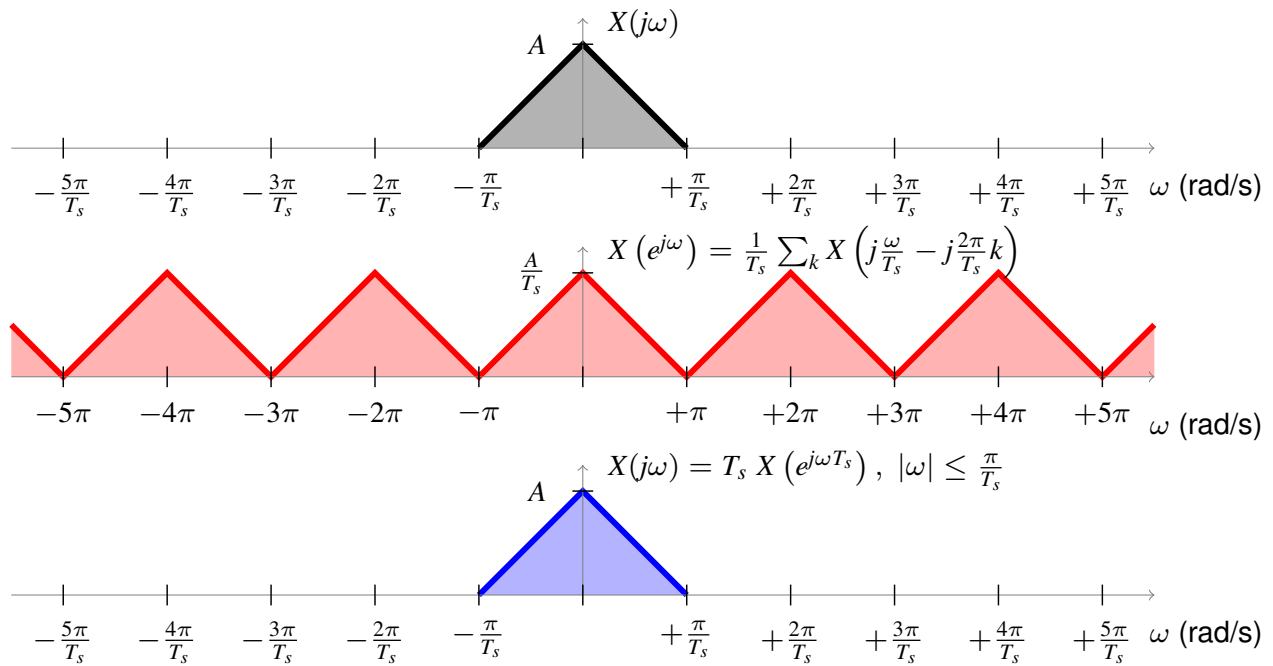
$$\begin{array}{c} A[m] \\ \downarrow \frac{T}{N} \end{array} \rightarrow \boxed{\text{Generación muestras}} \rightarrow \begin{array}{c} s[m] \\ \downarrow \frac{T}{N} \end{array} \rightarrow \boxed{g_r(t)} \rightarrow s_r(t) = \sum_m s[m] g_r \left(t - m \frac{T}{N} \right)$$

NOTA: La señal reconstruida $s_r(t) \neq s(t)$ ($s_r(t)$ tiene ancho de banda $\frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad/s}$)

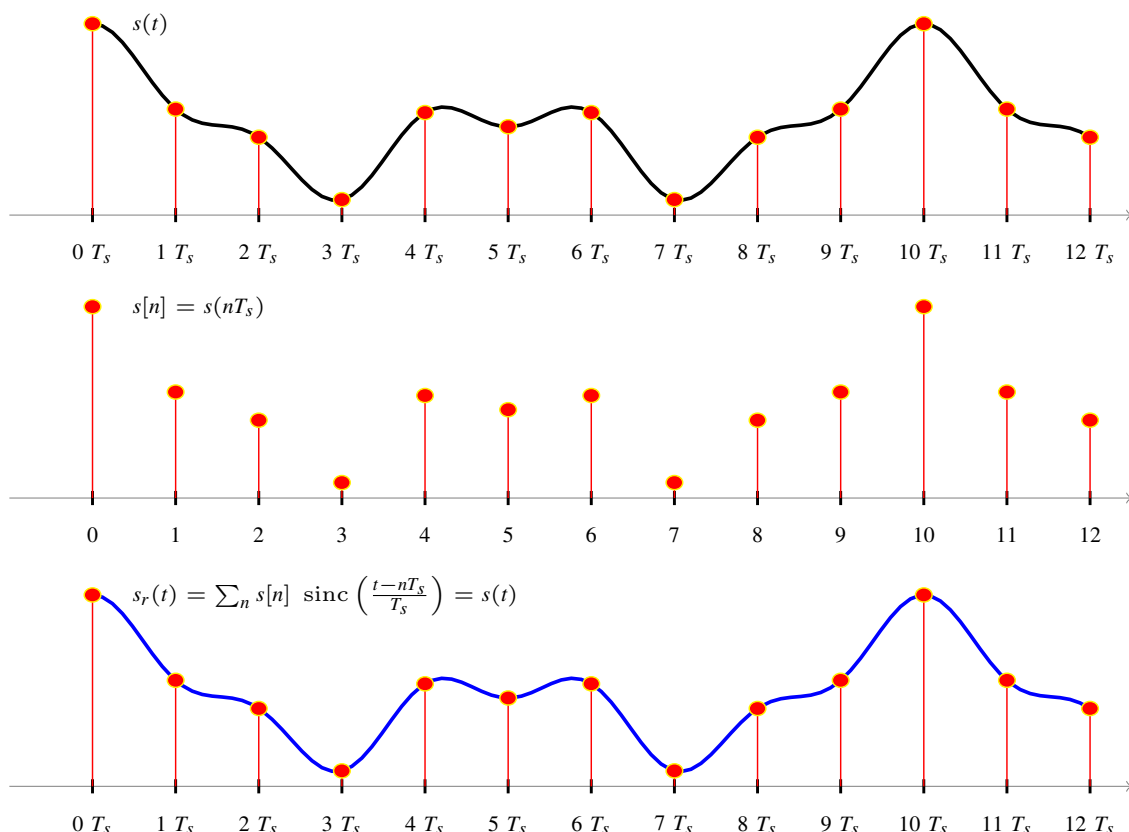
Muestreo en el dominio de la frecuencia cumpliendo Nyquist

- Muestreo de una señal real en banda base con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B = \frac{W}{\pi} \text{ samples/s (Nyquist)}$$



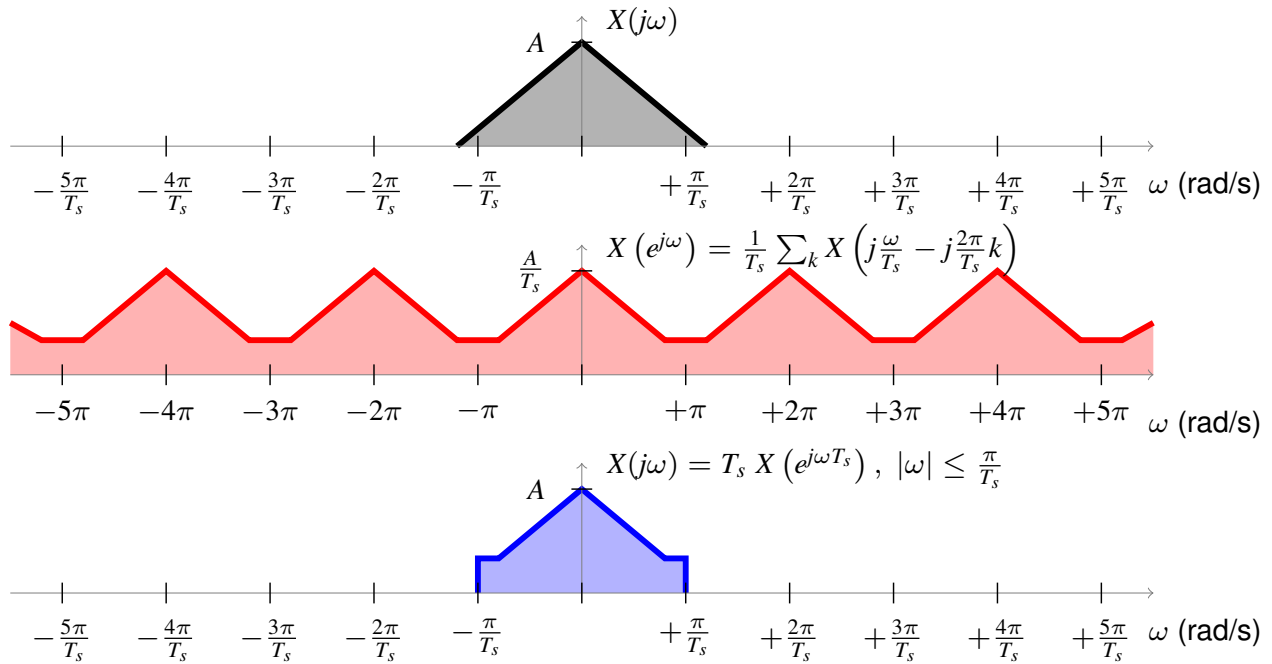
Reconstrucción a partir de muestras cumpliendo Nyquist



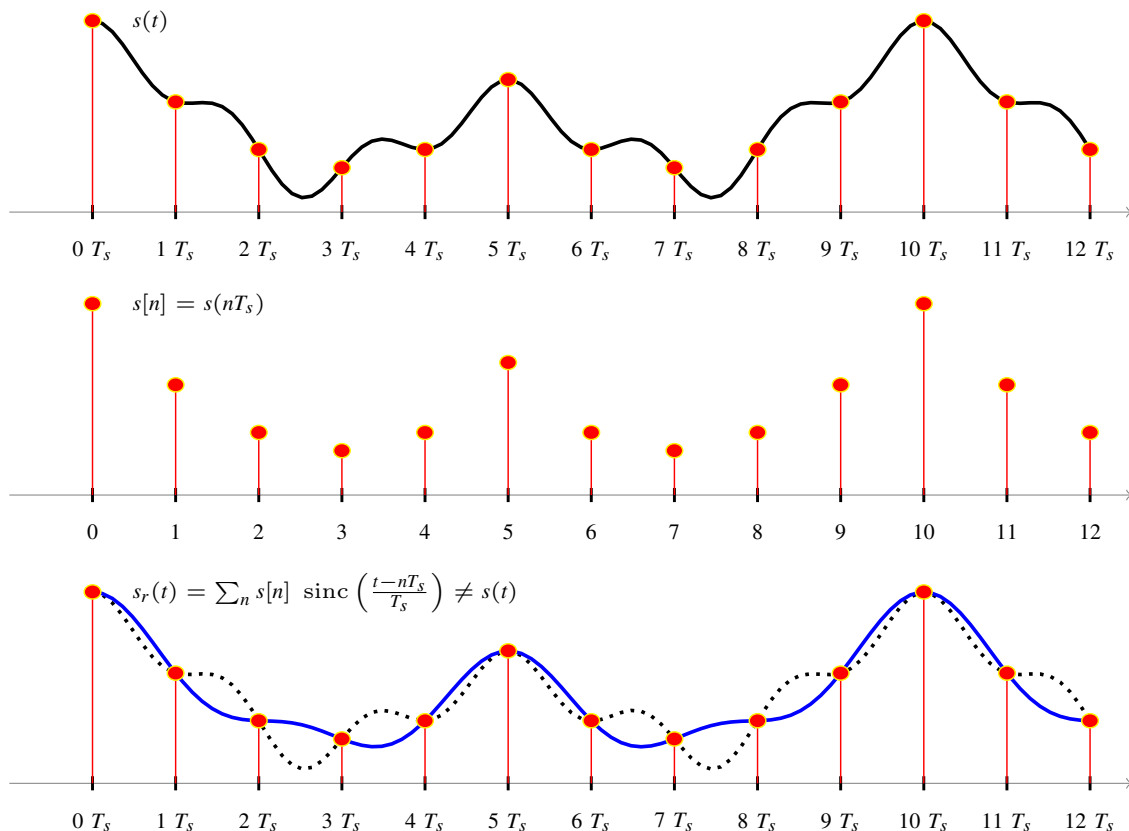
Muestreo en frecuencia con solapamiento espectral

- Muestreo de una señal real con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)

$$f_s = \frac{1}{T_s} < 2B = \frac{W}{\pi} \text{ muestras/s (aliasing)}$$



Reconstrucción de muestras con solapamiento espectral



Tasas de muestreo de Nyquist para señales complejas

- Señal con ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)
- Tasa de muestreo para reconstrucción perfecta a partir de muestras (Nyquist sampling rate)
 - ▶ Señales reales en banda base

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B = \frac{W}{\pi} \text{ muestras/s}$$

- ▶ Señales complejas paso banda

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq B = \frac{W}{2\pi} \text{ muestras/s}$$

Muestras de la señal en el primer intervalo de símbolo

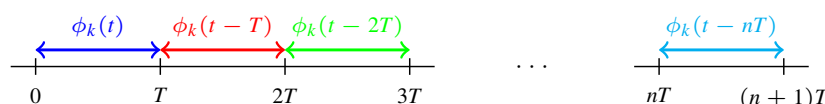
- Expresión analítica de las muestras en el intervalo $0 \leq t < T$
 - ▶ Primeras N muestras: $m \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$: Instantes de tiempo asociados

$$t = m \frac{T}{N} \rightarrow \left\{ 0, \frac{T}{N}, 2\frac{T}{N}, \dots, (N-1)\frac{T}{N} \right\}$$

- Expresión de la señal OFDM en tiempo continuo

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_n A_k[n] \phi_k(t - nT), \quad \phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_T(t) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

NOTA: Soporte funciones base: en $0 \leq t < T$, $\phi_k(t - nT)$ es sólo distinto de cero para $n = 0$



- Señal y muestras de la señal en ese primer intervalo de símbolo

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \phi_k(t), \quad s[m] = s\left(m \frac{T}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \phi_k\left(m \frac{T}{N}\right)$$

- ▶ Expresión equivalente para estas muestras

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] e^{j \frac{2\pi k}{T} m \frac{T}{N}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] e^{j \frac{2\pi k}{N} m}$$

Muestras de la señal a través de la DFT inversa

- DFT y DFT inversa (IDFT) de secuencias de N muestras

Para $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$X[k] = \text{DFT}_N\{x[m]\}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{2\pi k}{N} m}$$

$$x[m] = \text{IDFT}_N\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N} m}$$

- Muestras de la señal (en el primer intervalo de símbolo)

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] e^{j\frac{2\pi k}{N} m}$$

- Identificación de términos en la IDFT

$X[k] \equiv A_k[0]$, distintos factores de escala $\frac{1}{N}$ vs $\frac{1}{\sqrt{T}}$

Por tanto

$$\{s[m]\}_{m=0}^{N-1} = \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N\{A_k[0]\}_{k=0}^{N-1}$$

Expresión general para las muestras

- Muestras de la señal OFDM

$$\begin{aligned} s[m] &= \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \phi_k(mT/N - nT) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] e^{j\frac{2\pi k}{N} (m-nN)} w_N[m - nN] \end{aligned}$$

$w_N[m]$: ventana causal en tiempo discreto de N muestras $w_N[m] = \begin{cases} 1 & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

- ▶ Generación de secuencia $s[m]$ por bloques de N muestras

$$\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N(\{A_0[n], A_1[n], \dots, A_{N-1}[n]\}) \rightarrow \{s[nN], s[nN+1], \dots, s[(n+1)N-1]\}$$

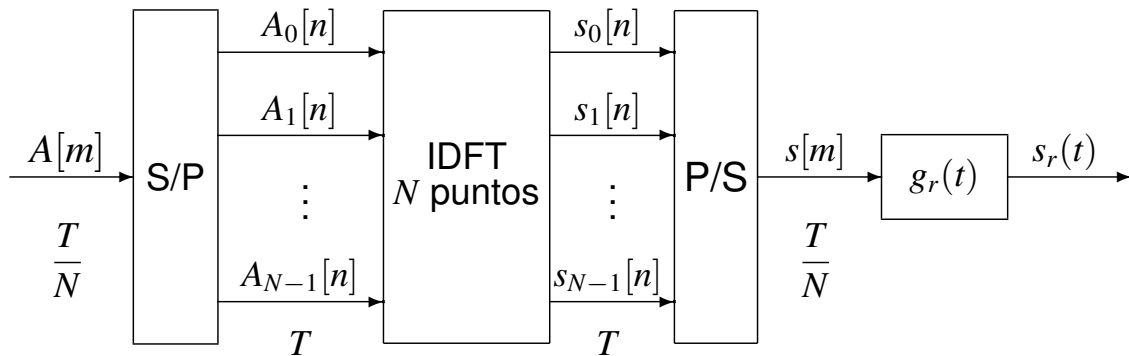
Notación: bloque de índice n : $s^{(n)}[m] = s[nN + m]$

$$\frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N(\{A_k[n]\}_{k=0}^{N-1}) \rightarrow \{s^{(n)}[m]\}_{m=0}^{N-1}$$

Modulador OFDM en tiempo discreto

Generación de muestras

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{A_0[0], A_1[0], \dots, A_{N-1}[0]}_{A_k[0]} & \underbrace{A_0[1], A_1[1], \dots, A_{N-1}[1]}_{A_k[1]} & \dots & \underbrace{A_0[n], A_1[n], \dots, A_{N-1}[n]}_{A_k[n]} & \dots \\ \downarrow \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N & \downarrow \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N & \dots & \downarrow \frac{N}{\sqrt{T}} \times \text{IDFT}_N & \dots \\ s^{(0)}[m] & s^{(1)}[m] & \dots & s^{(n)}[m] & \dots \\ \underbrace{s[0], s[1], \dots, s[N-1]} & \underbrace{s[N], s[N+1], \dots, s[2N-1]} & \dots & \underbrace{s[nN], s[nN+1], \dots, s[nN+N-1]} & \dots \end{array} \right\}$$



$$s_r(t) = \sum_m s[m] g_r(t - mT/N)$$

Ejemplo síntesis OFDM tiempo discreto: $N = 4$

● Secuencia de símbolos

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A[m]$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>L</i>

● Conversión Serie a Paralelo

n	0	1	2
$A_0[n]$	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>I</i>
$A_1[n]$	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>J</i>
$A_2[n]$	<i>C</i>	<i>G</i>	<i>K</i>
$A_3[n]$	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>L</i>

● Muestras OFDM

$$n = 0 : s^{(0)}[m] = \{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A, B, C, D\}$$

$$n = 1 : s^{(1)}[m] = \{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{E, F, G, H\}$$

$$n = 2 : s^{(2)}[m] = \{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4\{I, J, K, L\}$$

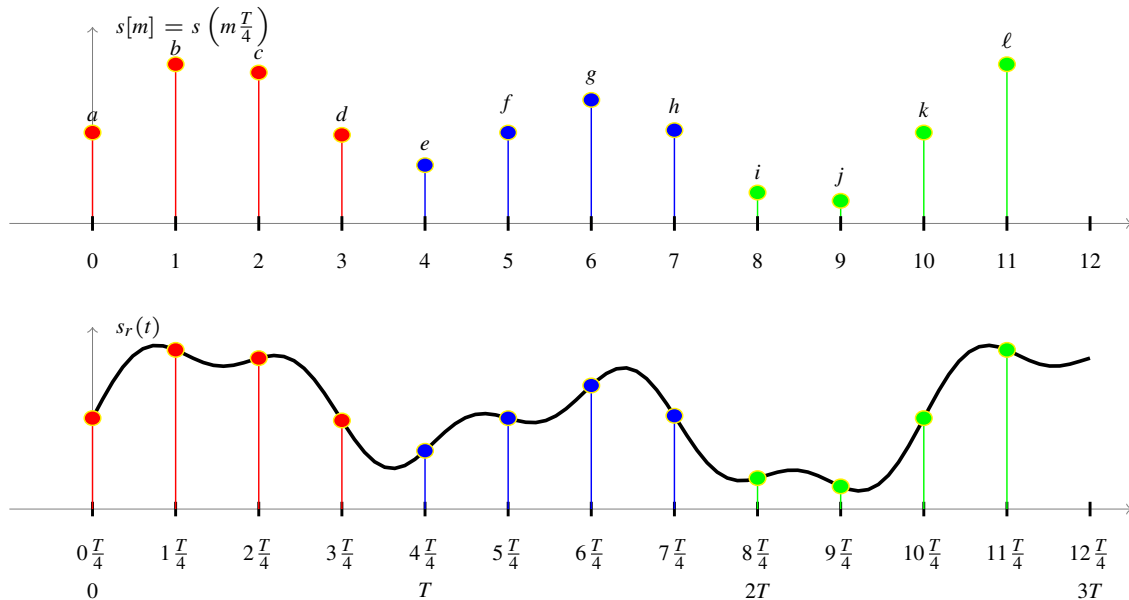
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s[m]$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>

Ejemplo síntesis OFDM tiempo discreto: $N = 4$

$$n = 0 : s^{(0)}[m] = \{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A, B, C, D\}$$

$$n = 1 : s^{(1)}[m] = \{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{E, F, G, H\}$$

$$n = 2 : s^{(2)}[m] = \{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{I, J, K, L\}$$



Base ortonormal en tiempo discreto

- Funciones base en tiempo discreto

$$\xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} w_N[m] e^{j\frac{2\pi k}{N} m}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Base ortonormal

$$\langle \xi_k, \xi_\ell \rangle = \sum_m \xi_k[m] \xi_\ell^*[m] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{N} m} = \delta[k - \ell]$$

- Muestras de la señal: expansión sobre la base ortonormal

$$s[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \xi_k[m - nN]$$

Base ortonormal equivalente en tiempo continuo

- Expresión de la señal reconstruida

$$s_r(t) = \sum_m s[m] g_r(t - mT/N)$$

$$s_r(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \sum_m \xi_k[m - nN] g_r(t - mT/N)$$

$$s(t) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \phi_k(t - nT)$$

$$s_r(t) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \hat{\phi}_k(t - nT)$$

- Funciones base equivalentes en tiempo continuo

$$\hat{\phi}_k(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k[m] g_r(t - mT/N) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N} m} \text{sinc}\left(\frac{N}{T} \left(t - m\frac{T}{N}\right)\right)$$

Ortonormalidad de las funciones base equivalentes

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_k, \hat{\phi}_\ell \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k(t) \hat{\phi}_\ell^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N} m} e^{-j\frac{2\pi \ell}{N} i} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(t - mT/N) g_r(t - iT/N) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\tau - mT/N) g_r(\tau - iT/N) d\tau = (g_r(t) * g_r(-t))|_{t=(m-i)T/N} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $g(t)$ cumple el criterio de Nyquist a T/N

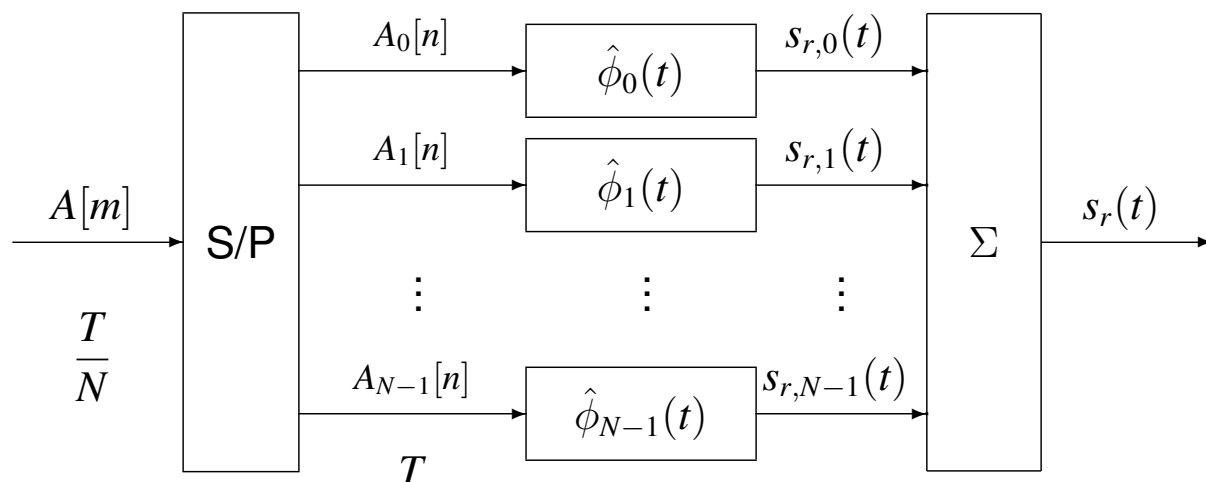
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_r(\tau - mT/N) g_r(\tau - iT/N) d\tau = \frac{T}{N} \delta[m - i]$$

$$\langle \hat{\phi}_k, \hat{\phi}_\ell \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{N} m} = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases} = \delta[k - \ell]$$

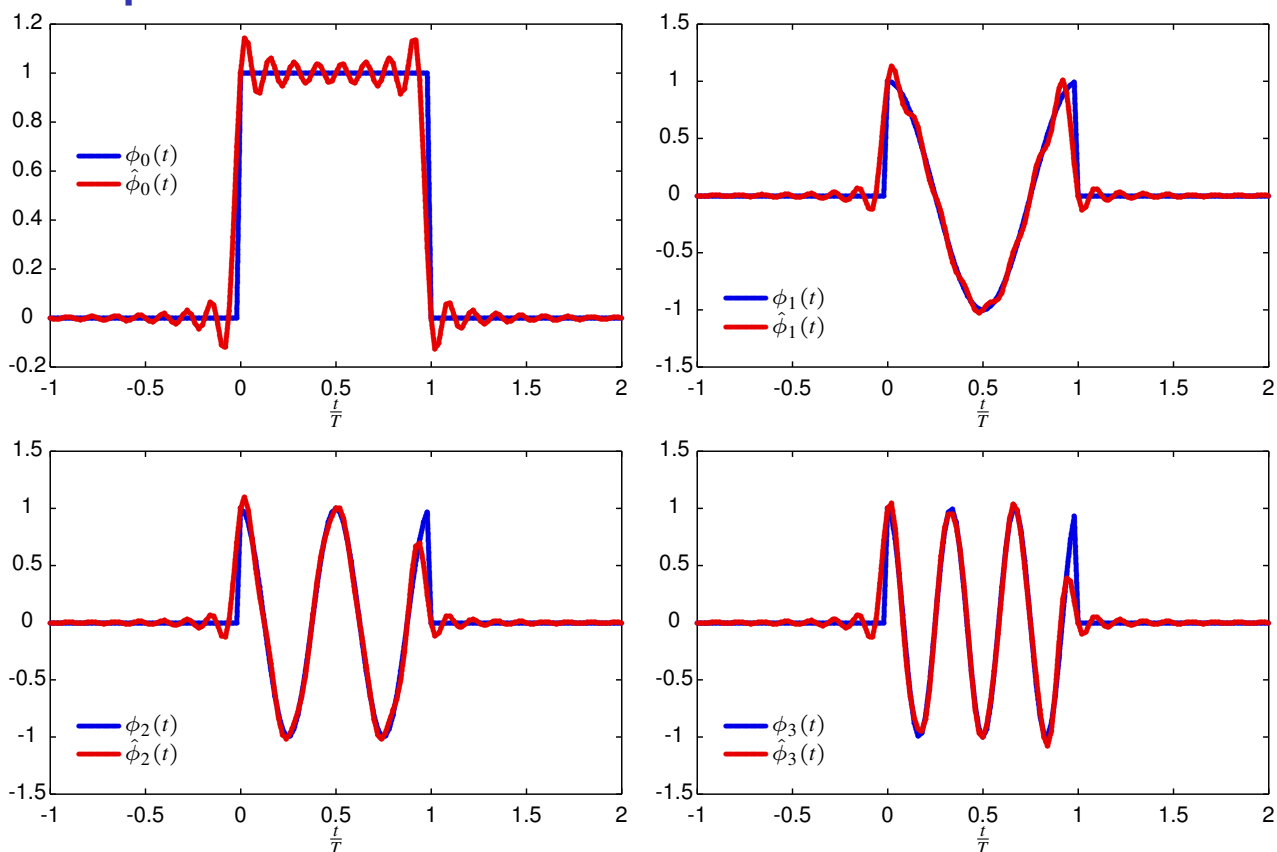
Modulador OFDM en tiempo discreto (equivalente)

● Estructura del modulador en función de las funciones base equivalentes

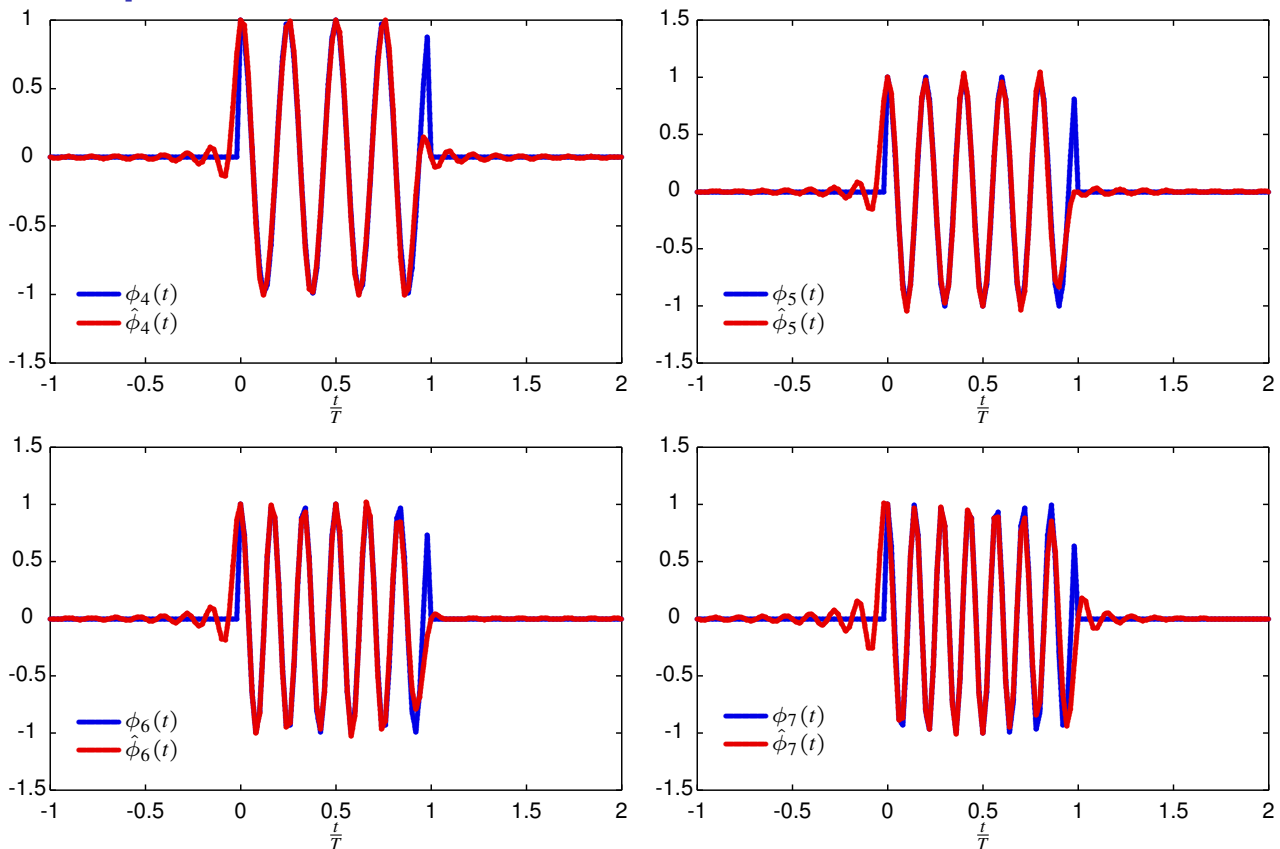
- ▶ Esquema conceptual
- ▶ No se usa para la implementación, sino para el análisis



Comparación de funciones base - Parte real



Comparación de funciones base - Parte real



Espectro de OFDM en tiempo discreto

- Densidad espectral de potencia

$$S_{sr}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \left| \hat{\Phi}_k(j\omega) \right|^2$$

- Respuesta en frecuencia de las funciones base discretas

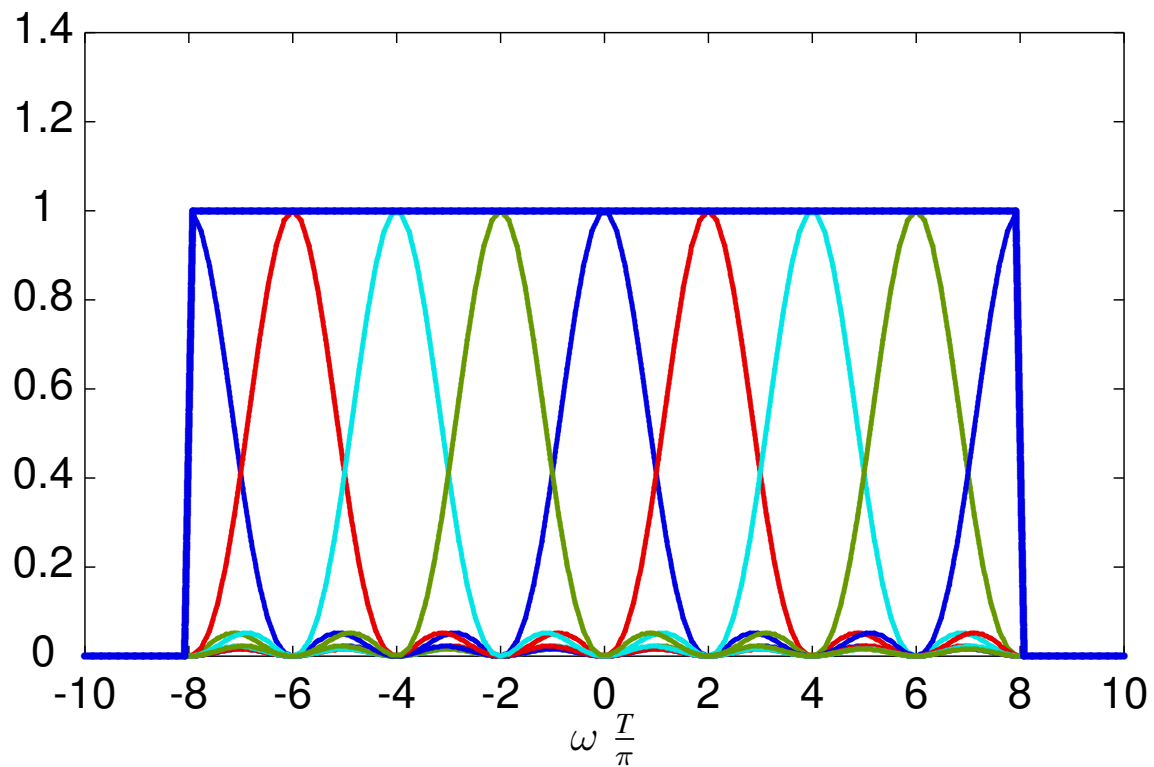
$$\left| \Xi_k(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{1}{N} \frac{\sin^2[(\omega - 2\pi k/N)N/2]}{\sin^2[(\omega - 2\pi k/N)/2]}$$

- Respuesta en frecuencia de las funciones base continuas

$$\left| \hat{\Phi}_k(j\omega) \right|^2 = \frac{N}{T} \left| \Xi_k(e^{j\omega T/N}) \right|^2 \left(\frac{T}{N} \right)^2 \Pi \left(\frac{\omega T}{2\pi N} \right)$$

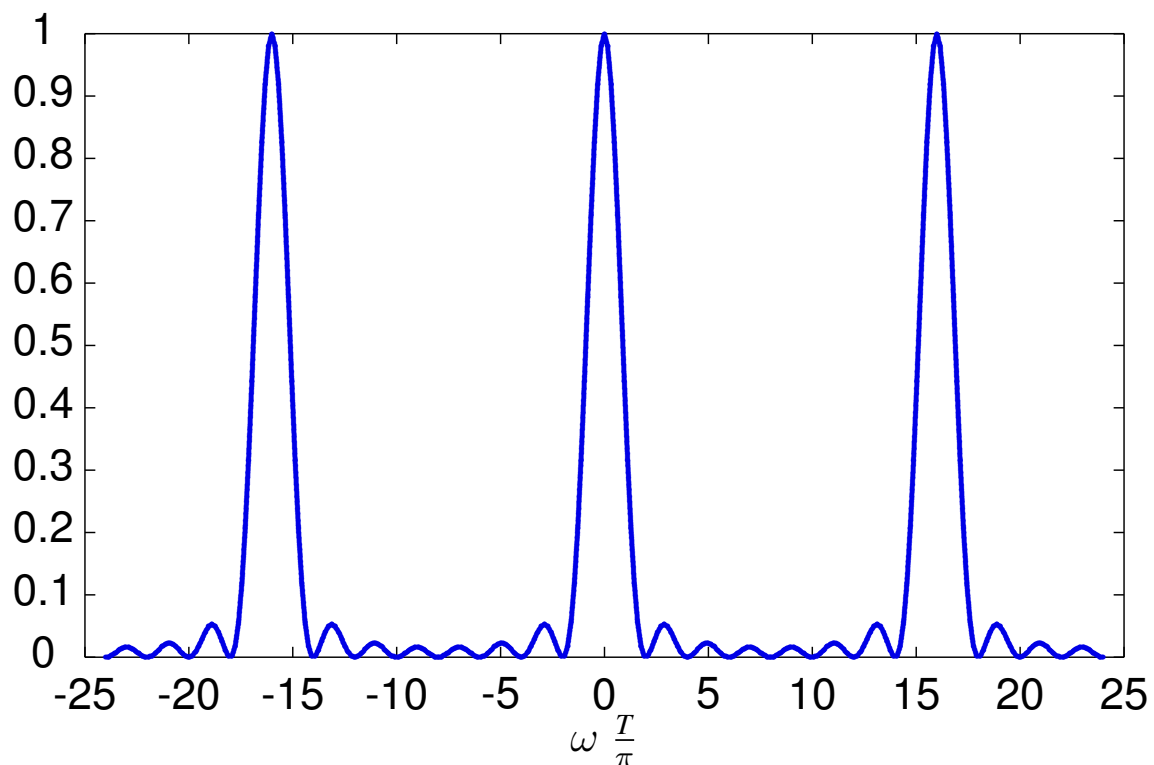
$$\left| \hat{\Phi}_k(j\omega) \right|^2 = \frac{T}{N^2} \frac{\sin^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2]}{\sin^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2N]}, \quad |\omega| < \frac{\pi}{T} N$$

Espectro OFDM en tiempo discreto - $N = 8$



Espectro OFDM en tiempo discreto - Periodicidad de

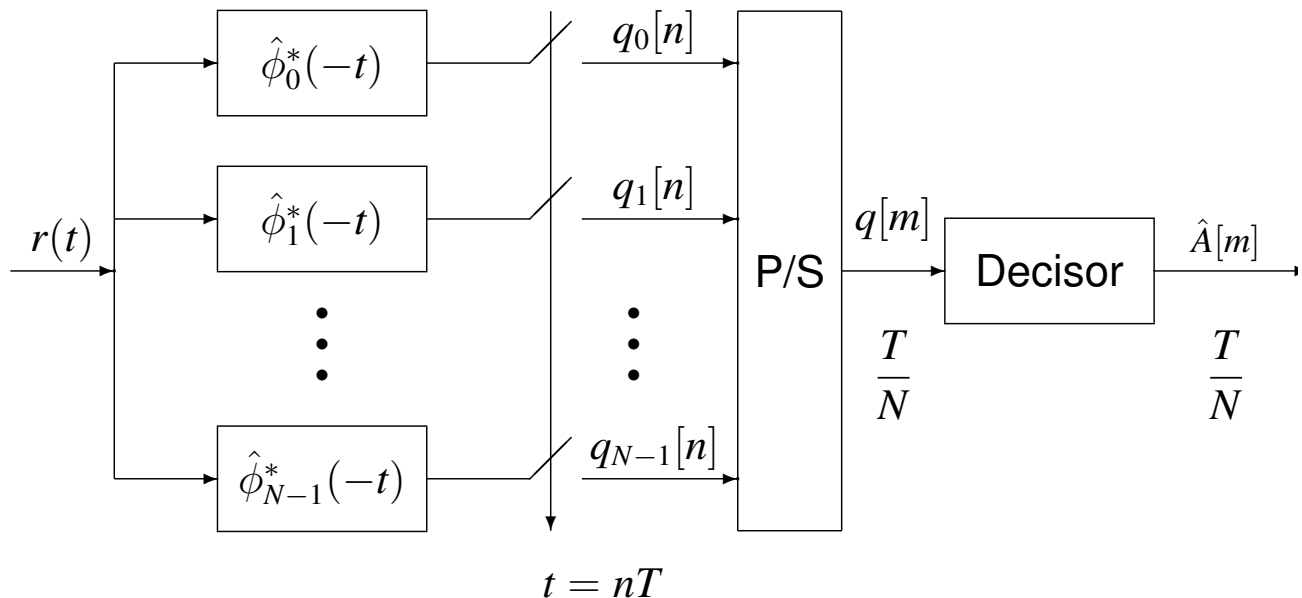
$$|\Xi_k(e^{j\omega T})|^2$$



Receptor para OFDM en tiempo discreto

- Estructura del receptor en función de las funciones base equivalentes (banco de N filtros adaptados)

- ▶ Esquema conceptual
- ▶ No se usa para la implementación, sino para el análisis



Ruido en el receptor

- Filtro receptor para la portadora de índice k : $\sqrt{2} f_k(t)$
- Densidad espectral de potencia de la secuencia de ruido en esa portadora, $z_k[n]$

$$S_{z_k}(e^{j\omega}) = \frac{2}{T} \sum_i S_n \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{\omega_c}{T} - j\frac{2\pi i}{T} \right) \left| F_k \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi i}{T} \right) \right|^2$$

- Receptor, filtro adaptado $f_k(t) = \hat{\phi}_k^*(-t)$
 - ▶ Normalizado, $r_{f_k}(t)$ cumple Nyquist
- $n(t)$: blanco, gaussiano, estacionario $S_n(j\omega) = N_0/2$
 - ▶ $z_k[n]$ blanco, gaussiano, circularmente simétrico

$$\sigma_{z_k}^2 = N_0, \quad k = 0, \dots, N-1$$

- ▶ Una consecuencia de la ortogonalidad de los pulsos de cada portadora

$$E\{z_i[n] z_k^*[n]\} = 0, \quad \text{if } i \neq k$$

Receptor para OFDM en tiempo discreto

- Filtros adaptados

$$\hat{\phi}_k^*(-t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k^*[m] g_r(-t - mT/N), \text{ con } \xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi k}{N} m} w_N[m]$$

- Expresión analítica para la salida de los demoduladores

$$\begin{aligned} q_k[n] &= \left(r(t) * \hat{\phi}_k^*(-t) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k^*[m] \left(r(t) * g_r \left(-t - m\frac{T}{N} \right) \right) \Big|_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N} m} (r(t) * g_r(-t)) \Big|_{t=nT+m\frac{T}{N}} \end{aligned}$$

- Se define la salida del filtro adaptado $g_r(-t)$ como $v(t) = r(t) * g(-t)$
- Definiendo la secuencia $v[m] = v(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}} = r(t) * g_r(-t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}}$, ahora

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N} m} v[nN + m]$$

Observaciones $q_k[n]$ a través de la DFT

- DFT y DFT inversa (IDFT) de secuencias de N muestras
Para $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$X[k] = \text{DFT}_N\{x[m]\}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{2\pi k}{N} m}$$

$$x[m] = \text{IDFT}_N\{X[k]\}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N} m}$$

- Observaciones $q_k[n]$

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N} m} v[nN + m]$$

- Identificación de términos en la DFT

$$x[m] \equiv v[nN + m] = v^{(n)}[m], \text{ factor de escala } \frac{1}{\sqrt{T}}$$

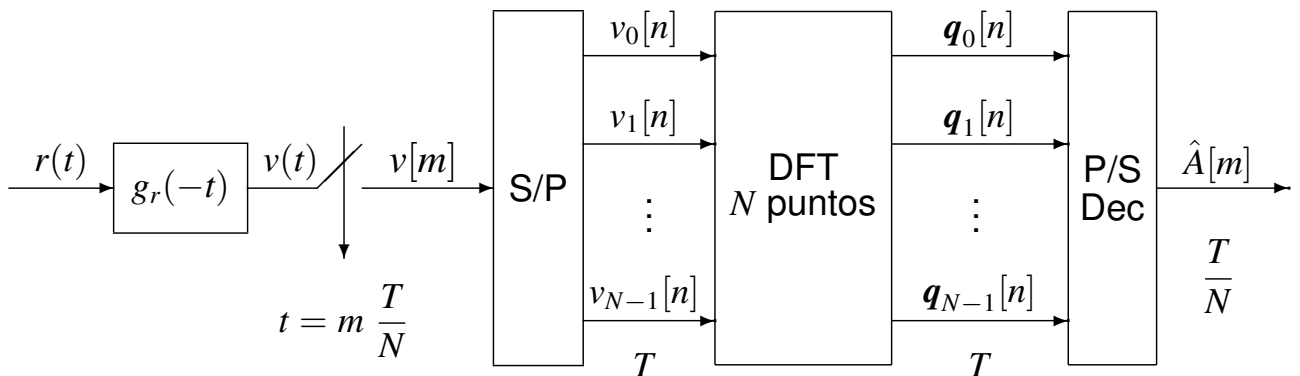
Por tanto

$$\{q_k[n]\}_{k=0}^{N-1} = \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N \left\{ v^{(n)}[m] \right\}_{m=0}^{N-1}$$

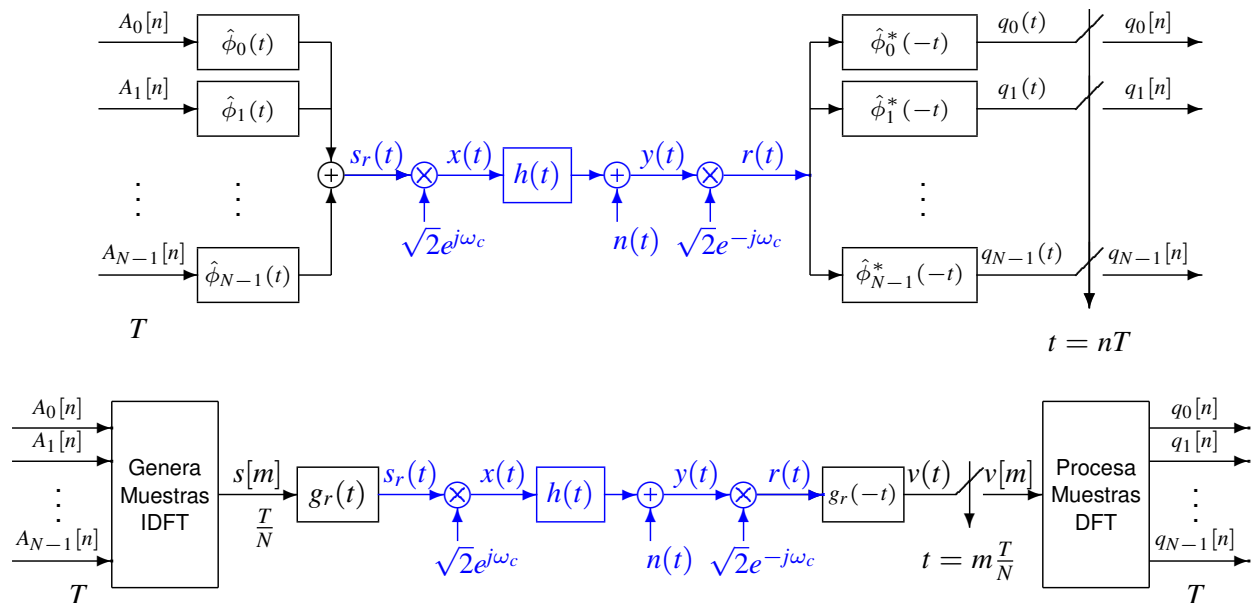
Receptor para OFDM en tiempo discreto

Generación de observaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{v^{(0)}[m]}_{v[0], v[1], \dots, v[N-1]} & \underbrace{v^{(1)}[m]}_{v[N], v[N+1], \dots, v[2N-1]} & \dots & \underbrace{v^{(n)}[m]}_{v[nN], v[nN+1], \dots, v[nN+N-1]} & \dots \\ \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N & \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N & \dots & \downarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \times \text{DFT}_N & \dots \\ \underbrace{q_0[0], q_1[0], \dots, q_{N-1}[0]}_{q_k[0]} & \underbrace{q_0[1], q_1[1], \dots, q_{N-1}[1]}_{q_k[1]} & \dots & \underbrace{q_0[n], q_1[n], \dots, q_{N-1}[n]}_{q_k[n]} & \dots \end{array} \right\}$$



Transmisión OFDM en tiempo discreto



- Canal entre la entrada de índice i ($A_i[n]$) y salida de índice k ($q_k[n]$)

$$p_{k,i}[n] = p_{k,i}(t)|_{t=nT}, \text{ con } p_{k,i}(t) = \hat{\phi}_i(t) * h_{eq}(t) * \hat{\phi}_k^*(-t)$$

- Canal para transmisión de muestras a $\frac{T}{N}$

$$d[m] = d(t)|_{t=m\frac{T}{N}}, \text{ con } d(t) = g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)$$

OFDM interpretada como proceso por bloques

- Proceso de muestras por bloques de tamaño N
- Transmisor: muestras para el n -ésimo bloque

Bloque de índice n : $s^{(n)}[m] = s[nN + m]$, $m = \{0, 1, \dots, N - 1\}$
 $s^{(n)}[m]$ para $m = 0, \dots, N - 1$ vienen dadas por N valores de $\text{IDFT}_N(A_k[n])$

- Canal discreto equivalente para las muestras $s[m]$ (a tiempo $\frac{T}{N}$)

$$d[m] = d(t) \Big|_{t=m\frac{T}{N}}, \text{ con } d(t) = g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)$$

- Transmisión a través de $d[m]$

$$v[m] = s[m] * d[m] + z[m]$$

- Demodulación

- ▶ Se divide $v[m]$ en bloques de N muestras

$$v^{(n)}[m] = v[nN + m], \quad m = \{0, 1, \dots, N - 1\}$$

- ▶ Procesado de cada bloque para obtener las observaciones en n
 $q_k[n]$ para $k = 0, \dots, N - 1$ son los N valores de $\text{DFT}_N(v^{(n)}[m])$

Canal discreto equivalente (a tiempo de símbolo)

- Salida del filtro adaptado (antes del muestreo)

$$q_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\ell} A_i[\ell] p_{k,i}(t - \ell T) + z_k(t), \quad k = 0, \dots, N - 1$$

- Respuesta conjunta del i -ésimo transmisor, k -ésimo receptor y canal complejo equivalente en banda base

$$\text{OFDM en tiempo continuo: } p_{k,i}(t) = \phi_i(t) * h_{eq}(t) * \phi_k^*(-t)$$

$$\text{OFDM en tiempo discreto: } p_{k,i}(t) = \hat{\phi}_i(t) * h_{eq}(t) * \hat{\phi}_k^*(-t)$$

- Salida muestreada

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\ell} A_i[\ell] p_{k,i}[n - \ell] + z_k[n], \quad k = 0, \dots, N - 1$$

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} A_i[n] * p_{k,i}[n] + z_k[n], \quad k = 0, \dots, N - 1$$

- ▶ Se definen N^2 canales discretos equivalentes

$$p_{k,i}[n], \quad i \in \{0, 1, \dots, N - 1\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$$

conectando todas las N entradas (índice i) con todas las N salidas (índice k)

Generalización del criterio de Nyquist para la ISI

- Interferencia entre símbolos (ISI, Inter-symbol Interference)
 - ▶ Contribución en $q_k[n]$ de símbolos en $A_k[n-j]$ para $j \neq 0$
- Interferencia entre portadoras (ICI, Inter-carrier interference)
 - ▶ Contribución en $q_k[n]$ de símbolos en $A_i[n]$ para $i \neq k$
- Condición para evitar la interferencia intersimbólica (ISI)

$$p_{i,i}[n] = C \delta[n]$$

- Condición para evitar la interferencia entre portadoras (ICI)

$$p_{k,i}[n] = 0, \text{ for } k \neq i, \forall n$$

- Ambas condiciones juntas

$$p_{k,i}[n] = C \delta[n] \delta[k-i]$$

- Generalización del criterio de Nyquist para la ISI en frecuencia

$$\mathbf{P}(e^{j\omega}) = C \mathbf{I}_{N \times N}$$

$P_{k,i}(e^{j\omega})$: Transformada de Fourier de $p_{k,i}[n]$

$\mathbf{P}(e^{j\omega})$: Matriz con elementos $P_{k,i}(e^{j\omega})$ (fila k , columna i)

- ▶ Difícil cumplir todas las restricciones: N^2 restricciones, N grados de libertad

Particularización para OFDM en tiempo discreto

- Respuestas conjuntas entrada-canal-salida

$$p_{k,i}(t) = \frac{N}{T} \sum_m \sum_\ell \xi_i[m] \xi_k^*[\ell] \left[g_r \left(t - m \frac{T}{N} \right) * h_{eq}(t) * g_r \left(-t - \ell \frac{T}{N} \right) \right]$$

- Canales discretos equivalentes son $p_{k,i}[n] = p_{k,i}(nT)$

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi i}{N} m} e^{-j \frac{2\pi k}{N} \ell} d[nN + \ell - m]$$

$d[m]$: muestras de la respuesta conjunta del filtro reconstructor, canal complejo equivalente en banda base y filtro receptor a $\frac{T}{N}$

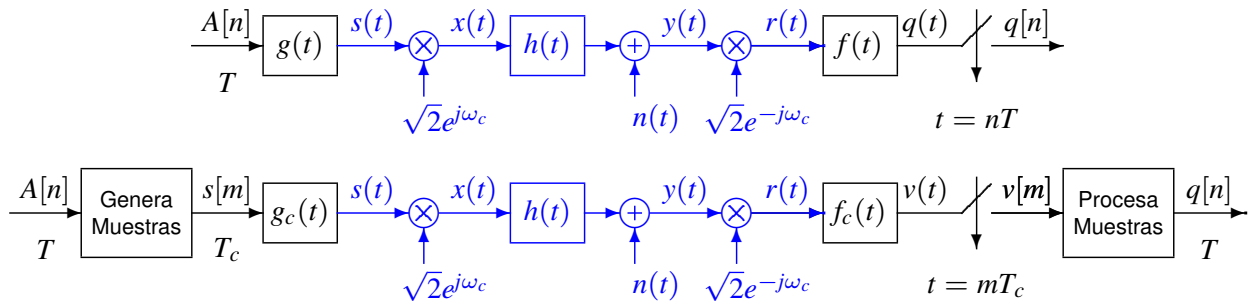
$$d[m] = (g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)) \Big|_{t=m \frac{T}{N}}$$

NOTA: con esta definición $v[m] = s[m] * d[m] + z[m]$

- Las condiciones del criterio de Nyquist generalizado se cumplen si

$$d[m] = K \delta[m]$$

Transmisión DSSS



- Filtros receptores - filtros adaptados: $f(t) = g^*(-t)$, $f_c(t) = g_c(-t)$
- Respuestas conjuntas transmisor/receptor/canal
 - ▶ Transmisión de $A[n]$ a tiempo de símbolo: $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) = r_g(t) * h_{eq}(t)$
 - ▶ Transmisión de $s[m]$ a tiempo de chip: $d(t) = g_c(t) * h_{eq}(t) * f_c(t) = r_{g_c}(t) * h_{eq}(t)$

● Canales discretos equivalentes

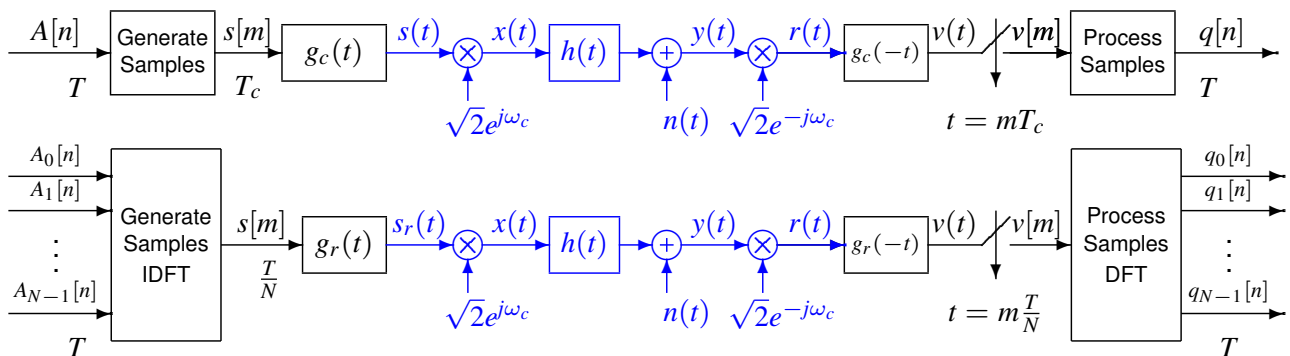
- ▶ A tiempo de símbolo

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} = p(nT) \text{ relaciona } q[n] \text{ con } A[n]: q[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$

- ▶ A tiempo de chip

$$d[m] = d(t)|_{t=mT_c} = d(mT_c) \text{ relaciona } v[m] \text{ con } s[m]: v[m] = s[m] * d[m] + z_c[m]$$

Comparación DSSS/OFDM



$$T_c \equiv \frac{T}{N} \quad g_c(t) \equiv g_r(t)$$

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g_c(t - mT_c) \equiv \hat{\phi}_i(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi i}{N} m} g_r \left(t - m \frac{T}{N} \right) \quad x[m] \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi i}{N} m}$$

$$g^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] g_c(-t - \ell T_c) \equiv \hat{\phi}_k^*(-t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\frac{2\pi k}{N} \ell} g_r \left(-t - \ell \frac{T}{N} \right) \quad x^*[\ell] \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\frac{2\pi k}{N} \ell}$$

Comparación DSSS/OFDM (II)

● DSSS

$$s^{(n)}[m] = A[n] x[m]$$

$$q[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] v[nN + \ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x^*[\ell] v^{(n)}[\ell]$$

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[m] x^*[\ell] d[nN + \ell - m]$$

● OFDM

$$s^{(n)}[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} m} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}\{A_k[n]\}$$

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi k}{N} \ell} v[nN + \ell] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi k}{N} \ell} v^{(n)}[\ell] = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}\{v^{(n)}[m]\}$$

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi i}{N} m} e^{-j \frac{2\pi k}{N} \ell} d[nN + \ell - m]$$

Eliminación de ISI e ICI - Extensión cíclica

- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
 - ▶ Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Con una extensión cíclica de las muestras, incluyendo un prefijo cíclico de C muestras, tal que $C \geq K_d$, los canales son

$$p_{k,i}[n] = \frac{N}{T} \delta[n] \delta[k - i] D[k]$$

- ISI e ICI son completamente eliminadas
- Observación para la portadora de índice k , $q_k[n]$, es ahora

$$q_k[n] = \frac{N}{T} A_k[n] D[k] + z_k[n]$$

$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[m]$

- ▶ Diferente relación señal a ruido en cada portadora (factor de ganancia $D[k]$)

NOTA: con la extensión, se transmitirán $N + C$ muestras cada T segundos, por lo que la nueva definición del canal discreto equivalente $d[m]$ será

$$d[m] = d(t) \Big|_{t=m \frac{T}{N+C}}$$

Extensión cíclica - proceso por bloques

- Proceso de muestras por bloque
- Muestras para el n -ésimo bloque

$s^{(n)}[m]$ para $m = 0, \dots, N-1$ vienen dadas por N valores de $\text{IDFT}_N(A_k[n])$

- Extensión cíclica de cada bloque - Prefijo cíclico

$$\tilde{s}^{(n)}[m] = \begin{cases} s^{(n)}[m+N] & m = -C, \dots, -1 \\ s^{(n)}[m] & m = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

- Transmisión a través de $d[m]$ (a tiempo $\frac{T}{T+C}$)

$$\tilde{v}^{(n)}[m] = \tilde{s}^{(n)}[m] * d[m] + \tilde{z}^{(n)}[m]$$

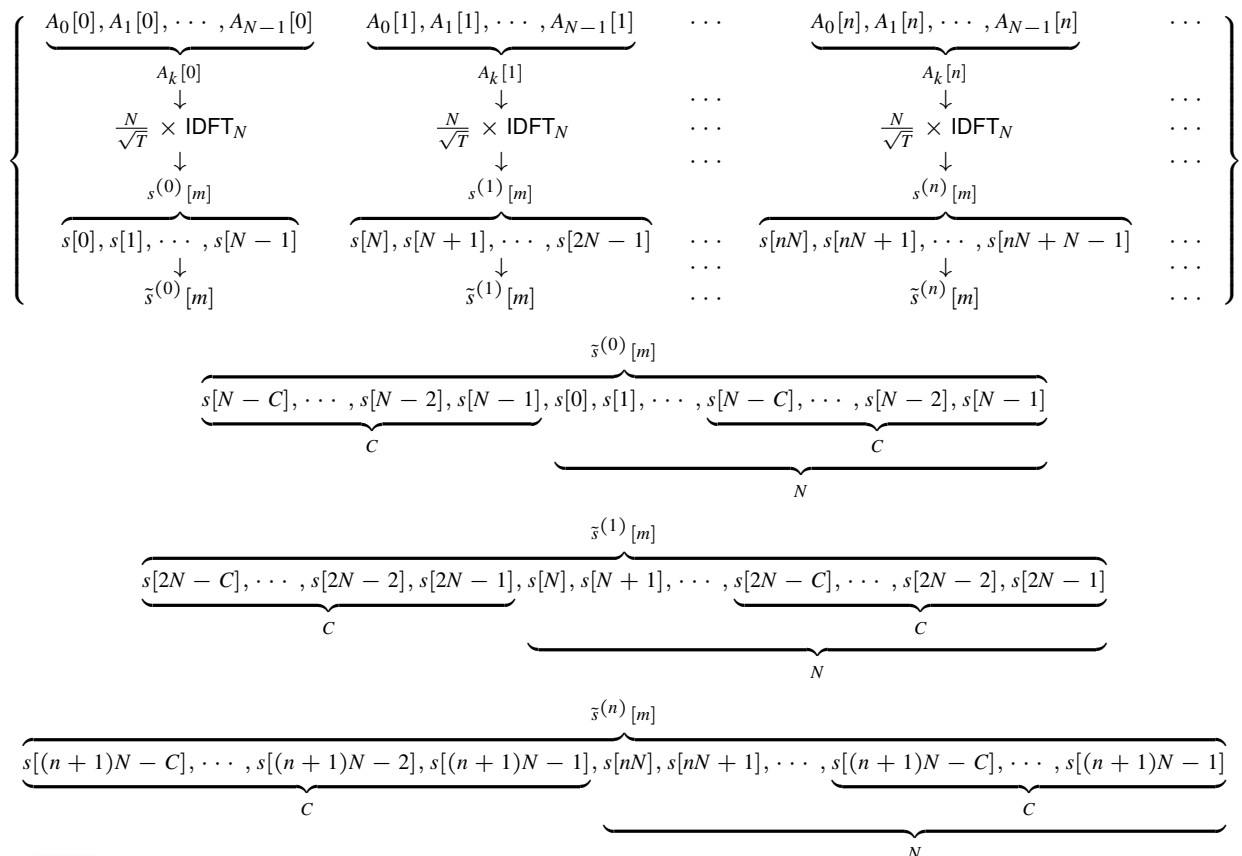
- Eliminación del prefijo cíclico

$$v^{(n)}[m] = \tilde{v}^{(n)}[m] w_N[m]$$

- Demodulación

$q_k[n]$ para $k = 0, \dots, N-1$ son los N valores de $\text{DFT}_N(v^{(n)}[m])$

Extensión cíclica - proceso por bloques (II)



Extensión cíclica - proceso por bloques (III)

- $q_k[n]$: se obtiene a partir de la DFT de N puntos de $v^{(n)}[m]$
- El prefijo cíclico se introduce para simular una convolución circular
 - ▶ La convolución de $\tilde{s}^{(n)}[m]$ con $d[m]$ es equivalente a la convolución circular de $s^{(n)}[m]$ con $d[m]$
- Utilidad por la propiedad de la DFT de ser multiplicativa bajo convolución circular

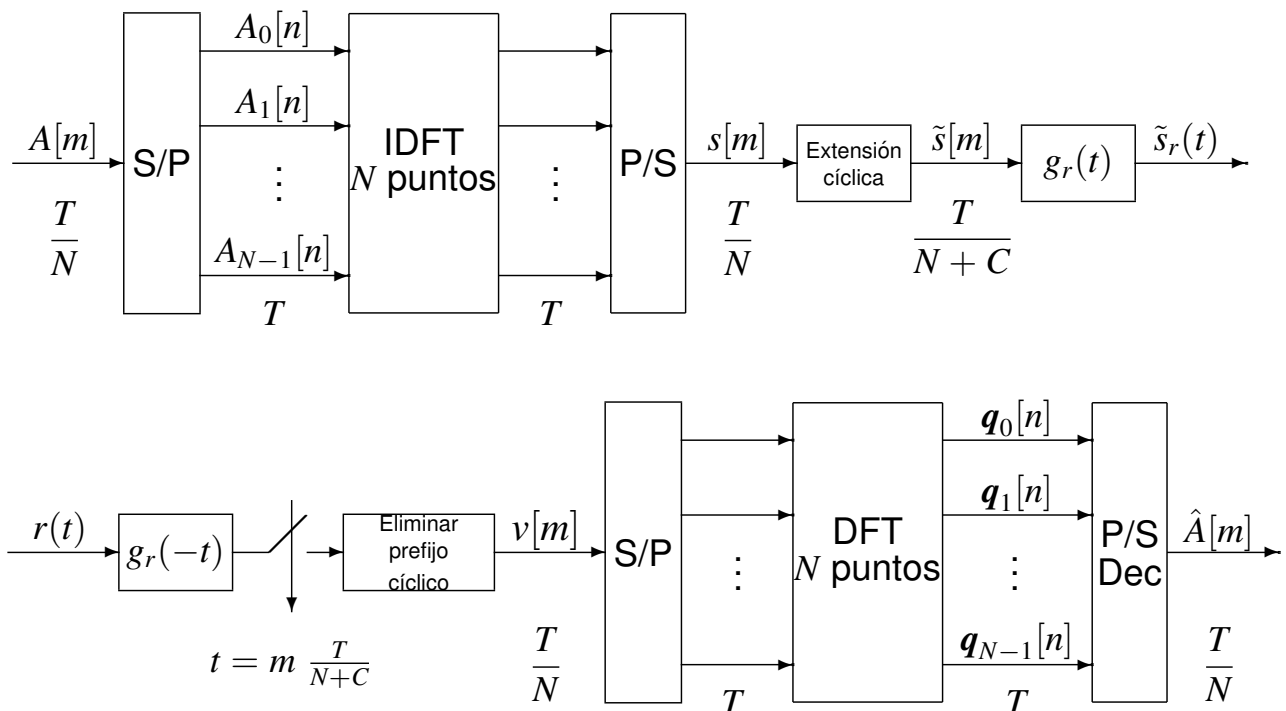
Si $z[n] = x[n] \circledast y[n]$ entonces

$$\text{DFT}_N(z[n]) = \text{DFT}_N(x[n]) \times \text{DFT}_N(y[n])$$

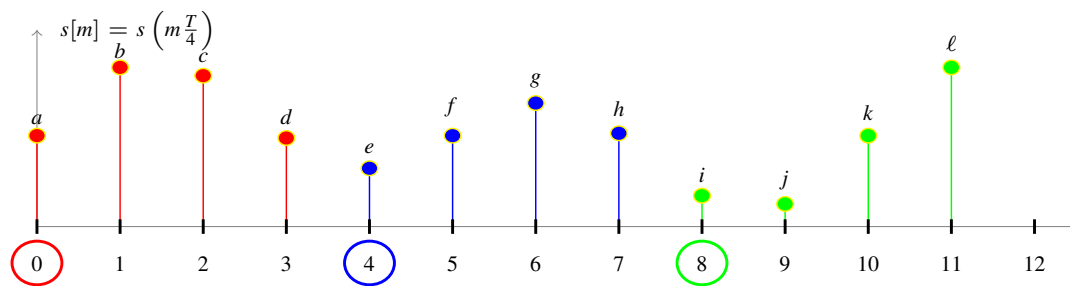
- Teniendo esto en cuenta, sin ruido, y abusando de la notación

$$\begin{aligned} q_k[n] &= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N(\tilde{s}^{(n)}[m] * d[m]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N(s^{(n)}[m] \circledast d[m]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N(s^{(n)}[m]) \times \text{DFT}_N(d[m]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \text{DFT}_N\left(\frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_N(A_k[n])\right) \times \text{DFT}_N(d[m]) \\ &= A_k[n] \times \frac{N}{T} D[k] \end{aligned}$$

Modulador/demodulador OFDM con prefijo cíclico



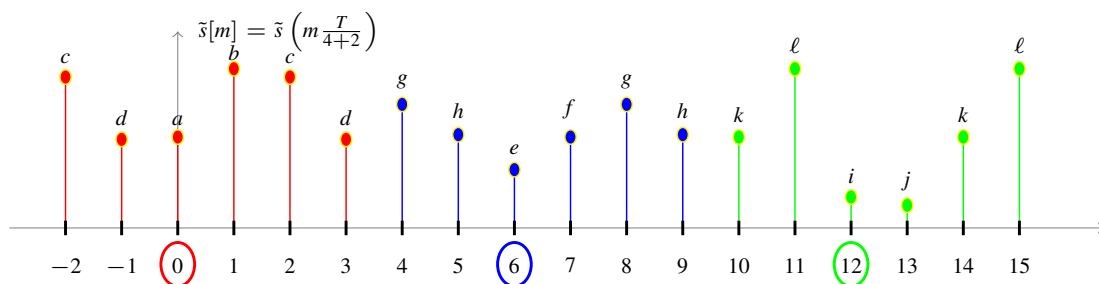
Prefijo cíclico: $N = 4, C = 2$



$$\{a, b, c, d\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[0], A_1[0], A_2[0], A_3[0]\}$$

$$\{e, f, g, h\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[1], A_1[1], A_2[1], A_3[1]\}$$

$$\{i, j, k, \ell\} = \frac{N}{\sqrt{T}} \text{IDFT}_4 \{A_0[2], A_1[2], A_2[2], A_3[2]\}$$



Eliminación de ISI e ICI - Estudio analítico

- Asunción: respuesta $d[m]$ es causal y de longitud finita $K_d + 1$
 - Canal $d[m]$ tiene memoria de K_d muestras
- Nuevas funciones base en tiempo discreto (longitud se extiende C muestras)

$$\tilde{\xi}_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j \frac{2\pi k}{N} m} w_{N+C}[m + C], \quad k = 0, \dots, N-1$$

- Valores no nulos para $m \in [-C, N-1]$ (en lugar de $m \in [0, N-1]$)
- Condición para eliminar ISI e ICI:

$$C \geq K_d$$

- Muestras de la señal generada son ahora dadas por

$$\tilde{s}[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \tilde{\xi}_k[m - n(N+C)]$$

- Ahora hay $N + C$ muestras por intervalo de símbolo (T s)

- Señal en el demodulador se obtiene como

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} \xi_k^*[m] v[n(N+C) + m]$$

Nuevos canales discretos equivalentes

- Con esta modificación los canales son

$$\begin{aligned}
 p_{k,i}[n] &= \frac{1}{T} \sum_{m=-C}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N} m} e^{-j\frac{2\pi k}{N} \ell} d[n(N+C) + \ell - m] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{u=\ell-N+1}^{\ell+C} e^{-j\frac{2\pi i}{N} u} e^{j\frac{2\pi(i-k)}{N} \ell} d[n(N+C) + u] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{u=0}^{K_d} e^{-j\frac{2\pi i}{N} u} d[u] \delta[n] \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(i-k)}{N} \ell} \\
 &= \frac{N}{T} \delta[n] \delta[k-i] \underbrace{\sum_{u=0}^{K_d} e^{-j\frac{2\pi i}{N} u} d[u]}_{\text{DFT de } d[m]} = \frac{N}{T} \delta[n] \delta[k-i] D[i]
 \end{aligned}$$

$D[k]$: coeficiente de índice k de la DFT de N puntos de $d[m]$

- ISI e ICI son eliminadas

Eficiencia espectral de OFDM con prefijo cíclico

- Señal OFDM se construye a partir de muestras: filtro reconstructor $g_r(t)$

$$s_r(t) = \sum_m s[m] g_r(t - mT_s), \text{ con } g_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{N}{T_s}t\right)$$

T_s : tiempo asociado a la secuencia de muestras $s[m]$

- Ancho de banda de la señal modulada paso banda $x(t)$ es

$$W = \frac{2\pi}{T_s} \text{ rad/s}, B = \frac{1}{T_s} \text{ Hz}$$

- OFDM sin prefijo cíclico

- En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N}$

$$W = \frac{2\pi}{T} \times N \text{ rad/s}, B = R_s \times N \text{ Hz}$$

- OFDM con prefijo cíclico

- En este caso las muestras se interpolan a $T_s = \frac{T}{N+C}$

$$W = \frac{2\pi}{T} \times (N+C) \text{ rad/s}, B = R_s \times (N+C) \text{ Hz}$$

- Eficiencia de OFDM utilizando un prefijo cíclico de longitud C

$$\eta = \frac{N}{N+C}$$

Relación señal a ruido en cada portadora

- Observaciones a tiempo de símbolo

$$q_k[n] = \frac{N}{T} D[k] A_k[n] + z_k[n]$$

- Relación señal a ruido en cada portadora

$$\left. \frac{S}{N} \right|_k = \frac{\mathcal{E} \left\{ \frac{N}{T} D[k] A_k[n] \right\}}{\mathcal{E} \{ z_k[n] \}} = \frac{E \left[\left| \frac{N}{T} D[k] A_k[n] \right|^2 \right]}{E \left[|z_k[n]|^2 \right]} = \frac{\left| \frac{N}{T} D[k] \right|^2 E_s}{\sigma_z^2}$$

- ▶ Relación $\left. \frac{S}{N} \right|_k$ proporcional a $|D[k]|^2$
- ▶ Las prestaciones serán diferentes para cada portadora
 - ★ Cuanto mayor el valor de $|D[k]|$, mejor serán las prestaciones de la portadora de índice k