Ejercicio 1

a) La variable aleatoria λ tiene la función densidad de probabilidad $f_\lambda(x) = A(2\pi - x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Encuentre el valor de A.

b) El proceso aleatorio $Z(t, \lambda)$ se define como

$$Z(t, \lambda) = 3 + \lambda \cos(6000\pi t),$$

con λ siendo la variable aleatoria del apartado anterior. Calcule la media $m_Z(t)$ y autocorrelación $R_Z(t_1, t_2)$ del proceso $Z(t, \lambda)$.

c) ¿Es el proceso $Z(t, \lambda)$ Gaussiano?¿Y estacionario?¿Y ergódigo? Justifique sus respuestas.

d) El proceso $Y(t) = 3+\cos(6000\pi t+\lambda)$, similar al anterior pero no igual, tiene densidad espectral de potencia

$$S_Y(jw) = 9 \cdot 2\pi\delta(w) + \frac{\pi}{2}(\delta(w + 6000\pi) + \delta(w - 6000\pi))$$

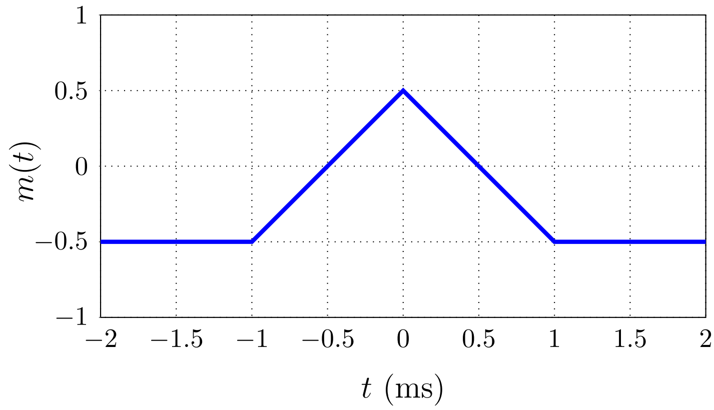
¿Cuál es la potencia total del proceso?

e) Una antena recibe $Y(t) + N(t)$, donde $Y(t)$ es la señal del apartado anterior y $N(t)$ es ruido AWGN (aditivo, Gaussiano y blanco) con densidad espectral de potencia 10^{-12} W/Hz. El receptor pasa esta señal por un filtro paso bajo ideal con ancho de banda de 1500 Hz (es decir, deja pasar desde $w = -3000\pi$ hasta $w = 3000\pi$). ¿Cuál será la SNR en dB a la salida?

(2,5 puntos)

Ejercicio 2

Se desea transmitir el mensaje $m(t)$ de la figura a un receptor a través de un canal con ruido Gaussiano blanco (observe que la señal toma valores en [-0.5, 0.5] y asuma que vale -0.5 fuera del intervalo dibujado):



Primero analizaremos la posibilidad de usar una modulación angular para transmitir el mensaje

a) Dibuje $x_{FM}(t)$, la señal resultante de modular el mensaje anterior con una modulación de frecuencia (FM). El dibujo no necesita ser muy preciso y puede asumir la frecuencia portadora f_c y la constante de desviación k_f que desee, siempre y cuando sea razonable (deben verse más de 10 oscilaciones).

b) ¿Cuál será el ancho de banda de la señal $x_{FM}(t)$? ¿y la potencia $P_{x_{FM}}$, asumiendo que la portadora tiene una amplitud $A_c = 1$?

c) Para aumentar la eficiencia espectral, decidimos filtrar el mensaje $m(t)$ antes de modularlo. Si usamos un filtro paso bajo con ancho de banda de 1 kHz ($W = 2\pi 1000$ rad), ¿cual será el ancho de banda aproximado de la señal modulada resultante? Asuma que la constante de desviación de frecuencia es $k_f = 2500$.

Ahora analizaremos la posibilidad de usar una modulación de amplitud

d) Dibuje la densidad espectral de potencia de la señal $x_{AM}(t)$, resultante de modular el mensaje $m(t)$ de la figura con una modulación AM convencional, si usamos un índice de modulación $a = 0.5$ y una frecuencia portadora de $10kHz$. De nuevo, el dibujo no necesita ser muy preciso.

e) Calcule la eficiencia de potencia que ofrece la modulación AM convencional del apartado anterior.

f) Describa las ventajas e inconvenientes de la modulación AM convencional respecto a la modulación de banda lateral única

(2,5 puntos)

Ejercicio 3

Un sistema digital de comunicaciones transmite a una tasa de símbolo de 5 kbaudios. La constelación es

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y el primer elemento de la base ortonormal es

$$\phi_0(t) = \begin{cases} A\cos(10^4\pi t) & \text{si } 0 \leq t < 2 \times 10^{-4} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Asumiendo que A es una constante no negativa, calcule su valor, elija el resto de elementos de la base ortonormal, explicando la razón de la elección, y dibuje las señales asociadas a los vectores $\mathbf{a}_0$ y $\mathbf{a}_4$.

b) Si sólo se transmiten $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$, todos con probabilidad 1/4:

   I) Realice una asignación binaria óptima y calcule la tasa de transmisión binaria del sistema.

   II) Diseñe el decisor óptimo, calcule la probabilidad de error de símbolo exacta y aproxime la probabilidad de error de bit.

c) Si se transmiten los 8 símbolos de forma equiprobable:

   I) Calcule la energía media por símbolo y la tasa de transmisión binaria del sistema.

   II) Diseñe el decisor óptimo y acote la probabilidad de error de símbolo mediante la cota de la unión.

(2,5 puntos)

Ejercicio 4

Un canal discreto sin memoria tiene una entrada 4-ária, X, y una salida 3-ária, Y, con las siguientes probabilidades conjuntas entre valores de entrada y de salida:

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_0	x_1	x_2	x_3
y_0	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon)$	0	0
y_1	0	$\frac{\alpha}{2}\varepsilon$	$\frac{1-\alpha}{2}\varepsilon$	0
y_2	0	0	$\frac{1-\alpha}{2}(1-\varepsilon)$	$\frac{1-\alpha}{2}$

a) Represente el canal mediante su matriz de canal y su diagrama de flechas.

b) Calcule $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ e $I(X,Y)$.

c) Para el caso $\varepsilon = 1$, dibuje las medidas cuantitativas de información del apartado anterior en función de la variable $z = p_X(x_0) + p_X(x_1)$ para valores de z en el intervalo $(0, 1)$.

d) Calcule la capacidad de este canal en el caso en que sólo se transmiten x_0 y x_1.

(2,5 puntos)