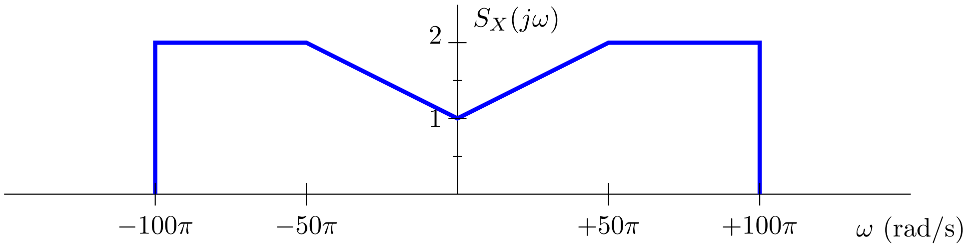
Ejercicio 1

Un proceso aleatorio $X(t)$, estacionario, tiene media $m_X = A$ y la densidad espectral de potencia de la figura



a) Calcule la potencia del proceso $X(t)$, y su función de autocorrelación.

b) El proceso aleatorio $X(t)$ se filtra con un filtro paso bajo de ancho de banda 25 Hz y ganancia en potencia $G = 2$.

   I) Calcule la media, la potencia y la función de autocorrelación del proceso de salida, $Y(t)$, y calcule y represente su densidad espectral de potencia, $S_Y(j\omega)$.

   II) Si al proceso $X(t)$ se le suma ruido térmico, y la temperatura de ruido es de 290º Kelvin, calcule la relación señal a ruido antes y después de filtrar con el filtro especificado la suma de $X(t)$ y del ruido térmico.

c) Se define el proceso aleatorio $Z(t) = X(t)\ \cos(200\pi t)$

   I) Calcule la media del proceso $m_Z(t)$, la función de autocorrelación del proceso, $R_Z(t+\tau, t)$, y explique si el proceso es estacionario o cicloestacionario y por qué.

   II) Calcule la potencia, y calcule y represente la densidad espectral de potencia de $Z(t)$.

A continuación se indican los valores de algunas constantes de interés

- Constante de Boltzmann: $1,38 \times 10^{-23}$ J/ºK
- Constante de Plank: $6,62 \times 10^{-34}$ J·s

(2,5 puntos)

Ejercicio 2

Un sistema analógico de comunicaciones se diseña para transmitir una señal moduladora que tiene la siguiente densidad espectral de potencia

$$S_M(j\omega) = \begin{cases} A_M \left(1 + \cos\left(\pi \frac{\omega}{W}\right)\right), & \text{si } |\omega| \leq W = 10^6 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $A_M = 2 \times 10^{-18}$. Durante la transmisión se suma ruido térmico con el modelo estadístico habitual, y el sistema funciona a una temperatura de ruido de 290ºK.

a) Represente la densidad espectral de potencia de la señal moduladora, y calcule la mejor posible relación señal a ruido, en decibelios (dB), a la salida del receptor si se transmite la señal en banda base sin modular, se desprecia la atenuación durante la transmisión, y el receptor es un filtro paso bajo ideal. Indique el ancho de banda en Hz del filtro receptor más apropiado.

b) Se utiliza ahora una modulación de amplitud convencional con índice de modulación 1/2 y una frecuencia de portadora $f_c = 100$ MHz. Por simplicidad, considere que la amplitud de la portadora es $A_c = 1$ y que para la moduladora $|m(t)| \leq 1$ micro-voltio.

   I) Represente la densidad espectral de potencia de la señal modulada e indique el ancho de banda en Hz de esta señal.

   II) Si en el receptor se utiliza un receptor coherente con un filtro de ruido previo, y este filtro es un filtro ideal, dibuje la respuesta en frecuencia del filtro de ruido óptimo para este sistema (aquel que maximiza la relación señal a ruido) y calcule dicha relación señal a ruido, en dB, a la salida del receptor coherente si la potencia de la señal modulada a la entrada del receptor es de 2 pico-vatios.

c) Repita el apartado anterior para una modulación de banda lateral única de banda superior.

NOTA: en las representaciones, las figuras deben estar adecuadamente etiquetadas en los dos ejes.

(2,5 puntos)

Ejercicio 3

Un sistema digital de comunicaciones utiliza la constelación y el modulador

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \qquad \phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } T/2 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para transmitir sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, con $N_0 = 1.45$.

a) Si los 8 símbolos son equiprobables

  I) Calcule la energía media por símbolo, y compárela con la de una constelación equivalente, con las mismas prestaciones, pero que requiera la mínima energía (presente la constelación modificada y la mínima energía media por símbolo).

  II) Realice la asignación binaria óptima.

b) Si sólo se utilizan los primeros 4 símbolos, $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, con probabilidades

$$p_A(\mathbf{a}_0) = p_A(\mathbf{a}_3) = 0.1, \qquad p_A(\mathbf{a}_1) = p_A(\mathbf{a}_2) = 0.4$$

  I) Diseñe el decisor óptimo.

  II) Calcule la probabilidad de error exacta del sistema.

c) Si se utilizan los 8 símbolos de forma equiprobable:

  I) Diseñe el decisor óptimo.

  II) Calcule la probabilidad de error exacta.

  III) Aproxime la probabilidad de error.

  IV) Acote la probabilidad de error mediante la cota de la unión.

(2,5 puntos)

Ejercicio 4

Se tienen dos canales discretos equivalentes con entrada X y salida Y que están dados por las siguientes probabilidades conjuntas entre entrada y salida

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_0	x_1
y_0	$\alpha\ \epsilon$	0
y_1	$\alpha\ (1-2\epsilon)$	$(1-\alpha)\epsilon$
y_2	$\alpha\ \epsilon$	$(1-\alpha)\ (1-2\epsilon)$
y_3	0	$(1-\alpha)\ \epsilon$

Canal A

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_0	x_1
y_0	α	$(1-\alpha)\ (1-\epsilon)$
y_1	0	$(1-\alpha)\ \epsilon$

Canal B

a) Para el Canal A, obtenga la matriz de canal y represente el canal mediante un diagrama de flechas.

b) Para el Canal A con $\alpha = \frac{1}{2}$:

   I) Calcule las siguientes medidas cuantitativas de información:

   - $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X,Y)$

   II) Represente $H(Y)$ y $H(Y|X)$ en función de ϵ.

c) Para el Canal B, calcule su capacidad de canal.

(2,5 puntos)