Ejercicio 1

Un proceso aleatorio $X(t)$ estacionario tiene media $m_X = 1$ y densidad espectral de potencia

$$S_X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) + 10^{-5}\,\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi\,10^6}\right) = \begin{cases} 2\pi\,\delta(\omega) + 10^{-5}, & \text{si } |\omega| \leq \pi 10^6 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{si } |\omega| > \pi 10^6 \text{ rad/s} \end{cases}$$

a) Calcule la potencia del proceso $X(t)$, su función de autocorrelación, y discuta si se trata o no de un proceso blanco.

b) El proceso aleatorio $X(t)$ se filtra con un filtro con la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \sqrt{2\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi\,10^6}\right)} = \begin{cases} \sqrt{2\left(1 - \left|\frac{\omega}{2\pi\,10^6}\right|\right)}, & \text{si } |\omega| \leq 2\pi\,10^6 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{si } |\omega| > 2\pi\,10^6 \text{ rad/s} \end{cases}$$

i) Calcule la media y la función de autocorrelación del proceso filtrado, $Y(t)$.

ii) Calcule la potencia y la densidad espectral de potencia de $Y(t)$, y represente dicha densidad espectral de potencia, $S_Y(j\omega)$.

c) Se define el proceso aleatorio $Z(t) = X(t-5) - 1$

i) Calcule la media del proceso $m_Z(t)$, la función de autocorrelación del proceso, $R_Z(t+\tau, t)$, y explique si el proceso $Z(t)$ es estacionario o cicloestacionario y por qué.

ii) Calcule la función de correlación cruzada entre $X(t)$ y $Z(t)$, $R_{X,Z}(t+\tau, t)$, y explique si los procesos $X(t)$ y $Z(t)$ son o no conjuntamente estacionarios y por qué.

A continuación se indican los valores de algunas constantes de interés

- Constante de Boltzmann: $1,38 \times 10^{-23}$ J/ºK
- Constante de Plank: $6,62 \times 10^{-34}$ J·s

(2,5 puntos)

Ejercicio 2

Un sistema analógico de comunicaciones se diseña para transmitir una señal moduladora que cumple $-1 \leq m(t) \leq 1$ V y que tiene la siguiente densidad espectral de potencia

$$S_M(j\omega) = \begin{cases} A_M \left(1 - \left|\frac{\omega}{2\pi\ 10^6}\right|\right), & \text{si } |\omega| \leq 2\pi\ 10^6 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{si } |\omega| > 2\pi\ 10^6 \text{ rad/s} \end{cases}$$

donde $A_M = 5 \times 10^{-7}$, y por tanto la potencia de la moduladora son 500 mW. Durante la transmisión la señal transmitida sufre sólo atenuación, sin ninguna distorsión lineal o no lineal, y la potencia de la señal recibida a la entrada del receptor es de 4 pW. A dicha señal se suma ruido térmico con el modelo estadístico habitual, teniendo en cuenta que el sistema funciona a una temperatura de ruido de 290ºK.

a) Represente la densidad espectral de potencia de la señal moduladora, y calcule la relación señal a ruido a la salida del receptor si se transmite la señal en banda base sin modular y el receptor es un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz, con el valor de B más apropiado para recuperar la señal moduladora (indique claramente el valor de dicho ancho de banda).

b) Se utiliza ahora una modulación de doble banda lateral con una frecuencia de portadora 100 MHz. Por simplicidad, considere que la amplitud de la portadora es $A_c = 1$.

   I) Represente la densidad espectral de potencia de la señal modulada e indique el ancho de banda, en Hz, de esta señal.

   II) Calcule la relación señal a ruido, en dB, a la salida de un receptor coherente.

c) Repita el apartado anterior para una modulación de banda lateral única de banda inferior

d) Repita el apartado anterior para una modulación de banda lateral vestigial de banda superior con un vestigio de 100 kHz.

e) Calcule el ancho de banda de la señal modulada y la relación señal a ruido a la salida del receptor para:

   I) Una modulación de fase con índice de modulación 3.

   II) Una modulación de frecuencia con índice de modulación 3.

NOTA: en las representaciones, las figuras deben estar adecuadamente etiquetadas en los dos ejes.

(2,5 puntos)

Ejercicio 4

Las probabilidades de transición para un canal discreto equivalente con entrada X y salida Y son

$P_{Y\|X}(y_j\|x_i)$	x_0	x_1	x_2	x_3
y_0	$1-\varepsilon$	0	0	0
y_1	ε	1	0	0
y_2	0	0	1	ε
y_3	0	0	0	$1-\varepsilon$

a) Represente el canal mediante una matriz de canal y mediante un diagrama de flechas.

b) Si los cuatro símbolos de entrada son equiprobables:

  I) Calcule las entropías $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ y $H(X,Y)$, y la información mutua $I(X,Y)$.

  II) Dibuje, en función de ε, el valor de las siguientes medidas: $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$.

c) Calcule la capacidad del canal si sólo se pueden transmitir los símbolos x_0 y x_1.

(2,5 puntos)

Ejercicio 3

En un sistema de comunicaciones digital los elementos de la base generadora y ortogonal $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ generan el conjunto de símbolos:

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \phi_1(t) + \phi_2(t) \\
s_2(t) &= -\phi_1(t) - \phi_2(t) \\
s_3(t) &= 3\phi_1(t) + 3\phi_2(t) \\
s_4(t) &= -3\phi_1(t) - 3\phi_2(t)
\end{aligned}$$

con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(\mathbf{a}_1 = 0.1) \quad P(\mathbf{a}_2 = 0.2) \quad P(\mathbf{a}_3 = 0.2) \quad P(\mathbf{a}_4 = 0.5)$$

Los símbolos se transmiten por un canal con ruido aditivo, blanco y Gausiano con $N_0/2 = 1$.

a) Identifique el número de símbolos M y la dimensión de la base generadora N

b) Calcule la constelación, la energía media de la misma y la distancia entre símbolos.

c) Compare la energía anterior con la energía de la misma constelación, donde los símbolos son equiprobables. Identifique qué constelación es la más eficiente desde el punto de vista de energía (menor gasto de energía).

d) Diseñe el demodulador óptimo.

e) Obtenga las regiones de decisión.

f) Calcule la probabilidad de error de forma exacta, no utilice cotas.

(2,5 puntos)